

УДК 517.983+517.444

МНОГОМЕРНЫЕ МОДИФИЦИРОВАННЫЕ G- И H- ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ИХ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

С. М. Ситник¹, О. В. Скоромник², М. В. Папкович³e-mail: ¹sitnik@bsu.edu.ru, ²skoromnik@gmail.com, ³mpapkovich@yandex.by

В работе, имеющей обзорный характер, рассматриваются пять классов многомерных интегральных преобразований с H - функцией Фокса, G -функцией Мейера, гипергеометрической функцией Гаусса и функцией Лежандра первого рода в ядрах в весовых пространствах интегрируемых функций в области $R_+^n = R_+^1 \times R_+^1 \times \dots \times R_+^1$. Получены условия ограниченности и взаимной однозначности операторов таких преобразований из одних пространств интегрируемых функций в другие, доказаны аналоги формулы интегрирования по частям. Для рассматриваемых преобразований установлены различные интегральные представления и выведены формулы обращения.

Keywords: многомерные интегральные преобразования со специальными функциями в ядрах; многомерное преобразование Меллина; H -функция Фокса; G -функция Мейера; гипергеометрическая функция Гаусса; функция Лежандра первого рода; пространство интегрируемых функций; дробные интегралы и производные.

MULTIDIMENSIONAL MODIFIED G - AND H -TRANSFORMS AND THEIR SPECIAL CASES

S. M. Sitnik¹, O. V. Skoromnik², M. V. Papkovich³e-mail: ¹sitnik@bsu.edu.ru, ²skoromnik@gmail.com, ³mpapkovich@yandex.by

This survey paper considers five classes of multidimensional integral transforms with Fox H -function, the Meyer G -function, the Gauss hypergeometric function, and Legendre function of the first kind in kernels in weighted spaces integrable functions in the domain $R_+^n = R_+^1 \times R_+^1 \times \dots \times R_+^1$. Boundedness and one-to-one correspondence conditions are obtained for operators of such transforms from some spaces of integrable functions into others, analogs of the integration-by-parts formula are proved. For the considered transforms, various integral representations and inversion formulas are derived.

Keywords: multidimensional integral transformations with special functions in kernels; multidimensional Mellin transform; Fox H -function; Mejer G -function; Gauss hypergeometric function; Legendre function of the first kind; space of integrable functions; fractional integrals and derivatives.

Mathematics Subject Classification (2020): Primary 35A22, 33C60, Secondary 44A30.

1. Введение

Рассматриваются многомерные интегральные преобразования [1, формулы (40) и (41); 2, формулы (1.1)–(1.3)]:

$$(H_{\sigma, \kappa}^1 f)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\sigma \int_0^{\mathbf{x}} H_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}^{\mathbf{m}, \mathbf{n}} \left[\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}} \middle| \begin{matrix} (\mathbf{a}_i, \alpha_i)_{1, p} \\ (\mathbf{b}_j, \beta_j)_{1, q} \end{matrix} \right] \mathbf{t}^\kappa f(\mathbf{t}) \frac{d\mathbf{t}}{\mathbf{t}} (\mathbf{x} > 0); \quad (1.1)$$

$$(G_{\sigma, \kappa}^1 f)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\sigma \int_0^{\mathbf{x}} G_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}^{\mathbf{m}, \mathbf{n}} \left[\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}} \middle| \begin{matrix} (\mathbf{a}_i)_{1, p} \\ (\mathbf{b}_j)_{1, q} \end{matrix} \right] \mathbf{t}^\kappa f(\mathbf{t}) \frac{d\mathbf{t}}{\mathbf{t}} (\mathbf{x} > 0); \quad (1.2)$$

$$(G_{\sigma,\kappa;\delta}^1 f)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\sigma \int_0^{\mathbf{x}} G_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^{\mathbf{m},\mathbf{n}} \left[\frac{\mathbf{x}^\delta}{\mathbf{t}^\delta} \middle| \frac{(\mathbf{a}_i)_{1,p}}{(\mathbf{b}_j)_{1,q}} \right] \mathbf{t}^\kappa f(\mathbf{t}) \frac{d\mathbf{t}}{\mathbf{t}} (\mathbf{x} > 0); \quad (1.3)$$

$$({}_1 I_{\sigma,\omega;\zeta} f)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\sigma \int_0^{\mathbf{x}} \frac{(\mathbf{x}^\zeta - \mathbf{t}^\zeta)^{c-1}}{\Gamma(c)} {}_2F_1 \left(a, b; c; 1 - \frac{\mathbf{x}^\zeta}{\mathbf{t}^\zeta} \right) \mathbf{t}^\omega f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} (\mathbf{x} > 0); \quad (1.4)$$

$$(P_{\delta,1}^\gamma f)(\mathbf{x}) = \int_0^{\mathbf{x}} (\mathbf{x}^2 - \mathbf{t}^2)^{-\gamma/2} P_\delta^\gamma \left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}} \right) f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = g(\mathbf{x}) (\mathbf{x} > 0); \quad (1.5)$$

где (см., например, [1–2; 3, п. 28.4; 4–5]) $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ — Евклидово n -мерное пространство; $\mathbf{x} \cdot \mathbf{t} = \sum_{n=1}^n x_n t_n$ — скалярное произведение; в частности,

$\mathbf{x} \cdot \mathbf{1} = \sum_{n=1}^n x_n$ for $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$. Выражение $\mathbf{x} > \mathbf{t}$ означает $x_1 > t_1, \dots, x_n > t_n$, аналогично для знаков $\geq, <, \leq$; $\int_0^{\mathbf{x}} = \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \dots \int_0^{x_n}$; $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{N}_0^n = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \times \dots \times \mathbb{N}_0$, $\mathbb{R}_+^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} > 0\}$; C^n ($n \in \mathbb{N}$) — n -мерное пространство комплексных чисел $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ ($z_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2, \dots, n$);

$\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{N}_0^n$ и $m_1 = m_2 = \dots = m_n$; $\mathbf{n} = (\bar{n}_1, \bar{n}_2, \dots, \bar{n}_n) \in \mathbb{N}_0^n$ и $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = \dots = \bar{n}_n$; $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{N}_0$ и $p_1 = p_2 = \dots = p_n$; $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{N}_0$ и $q_1 = q_2 = \dots = q_n$ ($0 \leq \mathbf{m} \leq \mathbf{q}$, $0 \leq \mathbf{n} \leq \mathbf{p}$);

$a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in C^n$; $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in C^n$; $c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in C^n$; $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in C^n$;

$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in C^n$; $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n) \in C^n$; $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{R}_+^n$;

$\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) \in \mathbb{R}^n$; $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$; $0 < \gamma < 1$;

$\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, $1 \leq i \leq p$, $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in} \in \mathbb{C}$ ($1 \leq i_1 \leq p_1, \dots, 1 \leq i_n \leq p_n$);

$\mathbf{b}_j = (b_{j1}, b_{j2}, \dots, b_{jn})$, $1 \leq j \leq q$, $b_{j1}, b_{j2}, \dots, b_{jn} \in \mathbb{C}$ ($1 \leq j_1 \leq q_1, \dots, 1 \leq j_n \leq q_n$);

$\alpha_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in})$, $1 \leq i \leq p$, $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in} \in \mathbb{R}_1^+$ ($1 \leq i_1 \leq p_1, \dots, 1 \leq i_n \leq p_n$);

$\beta_j = (\beta_{j1}, \beta_{j2}, \dots, \beta_{jn})$, $1 \leq j \leq q$, $\beta_{j1}, \beta_{j2}, \dots, \beta_{jn} \in \mathbb{R}_1^+$ ($1 \leq j_1 \leq q_1, \dots, 1 \leq j_n \leq q_n$);

$\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n = \mathbb{N}_0 \times \dots \times \mathbb{N}_0$ ($k_i \in \mathbb{N}_0$, $i = 1, 2, \dots, n$) — мультииндекс с $\mathbf{k}! = k_1! \dots k_n!$ and $|\mathbf{k}| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$; for $l = (l_1, l_2, \dots, l_n) \in \mathbb{R}_+^n$

$\mathbf{D}^l = \frac{\partial^{|\mathbf{l}|}}{(\partial x_1)^{l_1} \dots (\partial x_n)^{l_n}}$, $d\mathbf{t} = dt_1 \cdot dt_2 \dots dt_n$; $\mathbf{t}^l = t^{l_1} \dots t^{l_n}$;

$\mathbf{x}^\zeta - \mathbf{t}^\zeta = (x_1^{\zeta_1} - t_1^{\zeta_1}) \dots (x_n^{\zeta_n} - t_n^{\zeta_n})$; $f(\mathbf{t}) = f(t_1, t_2, \dots, t_n)$; функция

$$H_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^{\mathbf{m},\mathbf{n}} \left[\mathbf{z} \middle| \frac{(\mathbf{a}_i, \alpha_i)_{1,p}}{(\mathbf{b}_j, \beta_j)_{1,q}} \right] = \prod_{k=1}^n H_{p_k, q_k}^{m_k, \bar{n}_k} \left[\frac{x_k}{t_k} \middle| \frac{(a_{i_k}, \alpha_{i_k})_{1,p_k}}{(b_{j_k}, \beta_{j_k})_{1,q_k}} \right], \quad (1.6)$$

представляет собой произведение H -функций $H_{p,q}^{m,n}[z]$:

$$H_{p,q}^{m,n}[z] \equiv H_{p,q}^{m,n} \left[z \middle| \frac{(a_i, \alpha_i)_{1,p}}{(b_j, \beta_j)_{1,q}} \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_L \mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(s) z^{-s} ds, \quad z \neq 0, \quad (1.7)$$

где

$$\mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(s) \equiv \mathcal{H}_{p,q}^{m,n} \left[\frac{(a_i, \alpha_i)_{1,p}}{(b_j, \beta_j)_{1,q}} \middle| s \right] = \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + \beta_j s) \prod_{i=1}^n \Gamma(1 - a_i - \alpha_i s)}{\prod_{i=n+1}^p \Gamma(a_i + \alpha_i s) \prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - \beta_j s)}; \quad (1.8)$$

а функция $G_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^{\mathbf{m},\mathbf{n}} \left[\mathbf{z} \middle| \frac{(\mathbf{a}_i)_{1,p}}{(\mathbf{b}_j)_{1,q}} \right] = \prod_{k=1}^n G_{p_k, q_k}^{m_k, \bar{n}_k} \left[z_k \middle| \frac{(a_{i_k})_{1,p_k}}{(b_{j_k})_{1,q_k}} \right]$ — есть произведение G -функций $G_{p_k, q_k}^{m_k, \bar{n}_k}[z_k]$ ($k = 1, 2, \dots, n$):

$$G_{p,q}^{m,n}[z] \equiv G_{p,q}^{m,n} \left[z \middle| \frac{(a_i)_{1,p}}{(b_j)_{1,q}} \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_L \mathcal{G}_{p,q}^{m,n}(s) z^{-s} ds, \quad z \neq 0, \quad (1.9)$$

где

$$\mathcal{G}_{p,q}^{m,n}(s) \equiv \mathcal{G}_{p,q}^{m,n} \left[\begin{matrix} (a_i)_{1,p} \\ (b_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| s \right] = \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + s) \prod_{i=1}^n \Gamma(1 - a_i - s)}{\prod_{i=n+1}^p \Gamma(a_i + s) \prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - s)}. \quad (1.10)$$

В (1.7) и (1.9) L — специально выбранный бесконечный контур, а пустые произведения, если таковые имеются, считаются равными единице. H -функция является наиболее общей из известных специальных функций и включает в качестве частных случаев элементарные функции, специальные функции гипергеометрического и бесселева типа, а также G -функцию Мейера (1.9), получающуюся из H -функции (1.7) при $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_q = 1$ [6, п. 2.9]. Современная теория H - и G -функций (1.7), (1.9) представлена в главах 1–2 монографии [6]. С элементами теории H -функции (1.7) и ее специальными случаями можно ознакомиться также в книгах [7–10].

Функция ${}_2F_1(a, b; c; z)$ (см., например, [2; 11]) в (1.4) представляет собой произведение гипергеометрических функций Гаусса

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \prod_{k=1}^n {}_2F_1(a_k, b_k; c_k; z_k),$$

а функция [1; 11]

$$P_{\delta}^{\gamma}[z] = \prod_{k=1}^n P_{\delta_k}^{\gamma_k}[z_k]$$

является произведением функций Лежандра первого рода $P_{\delta}^{\gamma}(z)$. Более подробно с теорией гипергеометрической функцией Гаусса и функцией Лежандра можно ознакомиться, например, в [12].

В 1993–1998 годах А.А. Килбасом и М.Сайго была разработана теория интегральных H -преобразований со специальными функциями общего типа в ядрах, а именно H -функциями, в пространствах $\mathfrak{L}_{\nu,r}$ суммируемых функций. Применяя технику преобразования Меллина и учитывая асимптотические свойства H -функции, была построена теория интегральных H -преобразований с такими функциями в ядрах в пространствах $\mathfrak{L}_{\nu,r}$. Полученные результаты представлены в [6].

Одна из научных задач, поставленных А.А. Килбасом, состояла в исследовании с точки зрения теории H -преобразований в весовых пространствах r -суммируемых функций $\mathfrak{L}_{\nu,r}$ на действительной полуоси со степенным весом одномерных интегральных преобразований с гипергеометрической функцией Гаусса и функцией Лежандра первого рода. Полученные результаты опубликованы в работах [13; 14].

Дальнейшей темой исследований А.А. Килбас видел задачу рассмотрения аналогичных свойств интегральных преобразований со специальными функциями в ядрах для многомерных случаев. Исследования в этом направлении (хотя и достаточно обширные) в настоящее время находятся на начальном этапе. В настоящей работе представлены свойства многомерных преобразований (1.1)–(1.5) в весовых пространствах $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ интегрируемых функций $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ на $\mathbb{R}_+^n$, для которых :

$$\|f\|_{\bar{\nu},\bar{2}} = \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^1} x_n^{\nu_n \cdot 2-1} \left\{ \dots \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^1} x_2^{\nu_2 \cdot 2-1} \left[\int_{\mathbb{R}_+^1} x_1^{\nu_1 \cdot 2-1} |f(x_1, \dots, x_n)|^2 dx_1 \right] dx_2 \right\} \dots \right\} dx_n \right\}^{1/2} < \infty$$

($\bar{2} = (2, 2, \dots, 2)$, $\bar{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n) \in \mathbb{R}^n$, $\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_n$), для таких преобразований получены различные интегральные представления и выведены формулы их обращения. Результаты исследования для преобразований (1.1), (1.2) и (1.3)–(1.5) обобщают полученные ранее для соответствующих одномерных случаев [6, гл. 5 и 6] и [13], [14] соответственно.

2. Предварительные сведения

Множество ограниченных линейных операторов, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y , обозначим через $[X, Y]$. Для $\bar{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n) \in \mathbb{R}^n$, $\bar{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ ($1 < \bar{r} < \infty$) через $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{r}}$ обозначим пространство интегрируемых функций $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ с весом на $\mathbb{R}_+^n$, для которых

$$\|f\|_{\bar{\nu}, \bar{r}} = \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^n} x_n^{\nu_n \cdot r_n - 1} \left\{ \dots \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^1} x_2^{\nu_2 \cdot r_2 - 1} \right. \right. \right. \\ \times \left. \left[\int_{\mathbb{R}_+^1} x_1^{\nu_1 \cdot r_1 - 1} |f(x_1, \dots, x_n)|^{r_1} dx_1 \right]^{r_2/r_1} dx_2 \right\}^{r_3/r_2} \dots \left. \right\}^{r_n/r_{n-1}} dx_n \Bigg\}^{1/r_n} < \infty.$$

Многомерное интегральное преобразование Меллина $(\mathfrak{M}f)(\mathbf{s})$ функции $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, определяется по формуле

$$(\mathfrak{M}f)(\mathbf{s}) = \int_0^\infty f(\mathbf{t}) \mathbf{t}^{\mathbf{s}-1} d\mathbf{t}, \quad \operatorname{Re}(\mathbf{s}) = \bar{\nu}, \quad (2.1)$$

$\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{C}^n$; обратное преобразование Меллина для $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$ дается формулой

$$(\mathfrak{M}^{-1}g)(\mathbf{x}) = \mathfrak{M}^{-1}[g(\mathbf{p})](\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\gamma_1 - i\infty}^{\gamma_1 + i\infty} \dots \int_{\gamma_n - i\infty}^{\gamma_n + i\infty} \mathbf{x}^{-\mathbf{s}} g(\mathbf{s}) d\mathbf{s}, \quad (2.2)$$

$\gamma_j = \operatorname{Re}(s_j)$ ($j = 1, \dots, n$). С теорией многомерных интегральных преобразований (2.1), (2.2) можно ознакомиться, например, в книгах [15; 5, глава 1]. Пусть $\mathbf{M}_\xi$, $\mathbf{N}_\varrho$, $\mathbf{R}$ элементарные операторы [5, Глава 1]:

$$(\mathbf{M}_\xi f)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\xi f(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n); \quad (2.3)$$

$$(\mathbf{N}_\varrho f)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^\varrho) \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \varrho = (\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n) \in \mathbb{R}^n, \varrho \neq 0); \quad (2.4)$$

$$(\mathbf{R}f)(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mathbf{x}} f\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right). \quad (2.5)$$

Эти операторы обладают свойствами [1, лемма 1; 2, лемма 2.1]. Лемма 2.1. Для $\bar{\nu} =$

$(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n) \in \mathbb{R}^n$ ($\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_n$) and $1 \leq \bar{r} < \infty$.

(a) $\mathbf{M}_\xi$ является изометрическим изоморфизмом $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{r}}$ на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu} - \operatorname{Re}(\xi), \bar{r}}$; если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{r}}$ ($1 \leq \bar{r} \leq 2$), тогда

$$(\mathfrak{M}\mathbf{M}_\xi f)(\mathbf{s}) = (\mathfrak{M}f)(\mathbf{s} + \xi) \quad (\operatorname{Re}(\mathbf{s}) = \bar{\nu} - \operatorname{Re}(\xi));$$

(b) $\mathbf{N}_\varrho$ является ограниченным изоморфизмом $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{r}}$ на $\mathfrak{L}_{\varrho\bar{\nu}, \bar{r}}$; если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{r}}$ ($1 \leq \bar{r} \leq 2$), тогда

$$(\mathfrak{M}\mathbf{N}_\varrho f)(\mathbf{s}) = \frac{1}{|\varrho|} (\mathfrak{M}f)\left(\frac{\mathbf{s}}{\varrho}\right) \quad (\operatorname{Re}(\mathbf{s}) = \varrho\bar{\nu});$$

(c) $\mathbf{R}$ является изометрическим изоморфизмом $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{r}}$ на $\mathfrak{L}_{1-\bar{\nu}, \bar{r}}$; если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{r}}$ ($1 \leq \bar{r} \leq 2$), тогда

$$(\mathfrak{M}\mathbf{R}f)(\mathbf{s}) = (\mathfrak{M}f)(1 - \mathbf{s}) \quad (\operatorname{Re}(\mathbf{s}) = \bar{\nu}).$$

Многомерные аналоги операторов дробного интегрирования $\mathbf{I}_{0+; \sigma, \eta}^\alpha$ и $\mathbf{I}_{-; \sigma, \eta}^\alpha$ типа Эрдейи-Кобера для $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ ($\operatorname{Re}(\alpha) > 0$), $\sigma > 0$, $\eta \in \mathbb{C}^n$ имеют вид [1; 2]:

$$(\mathbf{I}_{0+; \sigma, \eta}^\alpha f)(\mathbf{x}) = \frac{\sigma \mathbf{x}^{-\sigma(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\mathbf{x}} (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)^{\alpha-1} \mathbf{t}^{\sigma\eta+\sigma-1} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \quad (\mathbf{x} > 0), \quad (2.6)$$

$$(\mathbf{I}_{-; \sigma, \eta}^\alpha f)(\mathbf{x}) = \frac{\sigma \mathbf{x}^{\sigma\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_{\mathbf{x}}^\infty (\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{x}^\sigma)^{\alpha-1} \mathbf{t}^{\sigma(1-\alpha-\eta)-1} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \quad (\mathbf{x} > 0). \quad (2.7)$$

3. $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},2}$ -теория и формулы обращения $H_{\sigma,\kappa}^1$ -преобразования

Для формулировки утверждений, представляющих $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},2}$ -теорию и формулы обращения $H_{\sigma,\kappa}^1$ -преобразования (1.1), нам понадобятся следующие постоянные [1, (57)–(60)], определяемые через параметры Н-функции (1.6) и являющиеся аналогами соответствующих одномерных параметров [6, (3.4.1), (3.4.2), (1.1.7), (1.1.8), (1.1.10)]:

$$\alpha_1 = \begin{cases} -\min_{1 \leq j_1 \leq m_1} \left[\frac{\operatorname{Re}(b_{j_1})}{\beta_{j_1}} \right], & m_1 > 0, \\ -\infty, & m_1 = 0, \end{cases} \quad \beta_1 = \begin{cases} \min_{1 \leq i_1 \leq \bar{n}_1} \left[\frac{1 - \operatorname{Re}(a_{i_1})}{\alpha_{i_1}} \right], & \bar{n}_1 > 0, \\ \infty, & \bar{n}_1 = 0, \end{cases}$$

$$\alpha_2 = \begin{cases} -\min_{1 \leq j_2 \leq m_2} \left[\frac{\operatorname{Re}(b_{j_2})}{\beta_{j_2}} \right], & m_2 > 0, \\ -\infty, & m_2 = 0, \end{cases} \quad \beta_2 = \begin{cases} \min_{1 \leq i_2 \leq \bar{n}_2} \left[\frac{1 - \operatorname{Re}(a_{i_2})}{\alpha_{i_2}} \right], & \bar{n}_2 > 0, \\ \infty, & \bar{n}_2 = 0, \end{cases}$$

и так далее

$$\alpha_n = \begin{cases} -\min_{1 \leq j_n \leq m_n} \left[\frac{\operatorname{Re}(b_{j_n})}{\beta_{j_n}} \right], & m_n > 0, \\ -\infty, & m_n = 0, \end{cases} \quad \beta_n = \begin{cases} \min_{1 \leq i_n \leq \bar{n}_n} \left[\frac{1 - \operatorname{Re}(a_{i_n})}{\alpha_{i_n}} \right], & \bar{n}_n > 0, \\ \infty, & \bar{n}_n = 0; \end{cases} \quad (3.1)$$

$$a_1^* = \sum_{i=1}^{\bar{n}_1} \alpha_{i_1} - \sum_{i=\bar{n}_1+1}^{p_1} \alpha_{i_1} + \sum_{j=1}^{m_1} \beta_{j_1} - \sum_{j=m_1+1}^{q_1} \beta_{j_1}, \quad \Delta_1 = \sum_{j=1}^{q_1} \beta_{j_1} - \sum_{i=1}^{p_1} \alpha_{i_1},$$

$$a_2^* = \sum_{i=1}^{\bar{n}_2} \alpha_{i_2} - \sum_{i=\bar{n}_2+1}^{p_2} \alpha_{i_2} + \sum_{j=1}^{m_2} \beta_{j_2} - \sum_{j=m_2+1}^{q_2} \beta_{j_2}, \quad \Delta_2 = \sum_{j=1}^{q_2} \beta_{j_2} - \sum_{i=1}^{p_2} \alpha_{i_2},$$

и так далее

$$a_n^* = \sum_{i=1}^{\bar{n}_n} \alpha_{i_n} - \sum_{i=\bar{n}_n+1}^{p_n} \alpha_{i_n} + \sum_{j=1}^{m_n} \beta_{j_n} - \sum_{j=m_n+1}^{q_n} \beta_{j_n}, \quad \Delta_n = \sum_{j=1}^{q_n} \beta_{j_n} - \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_{i_n}; \quad (3.2)$$

$$\mu_1 = \sum_{j=1}^{q_1} b_{j_1} - \sum_{i=1}^{p_1} a_{i_1} + \frac{p_1 - q_1}{2}, \mu_2 = \sum_{j=1}^{q_2} b_{j_2} - \sum_{i=1}^{p_2} a_{i_2} + \frac{p_2 - q_2}{2}, \dots,$$

$$\mu_n = \sum_{j=1}^{q_n} b_{j_n} - \sum_{i=1}^{p_n} a_{i_n} + \frac{p_n - q_n}{2}, \quad (3.3)$$

$$\alpha_0^1 = \begin{cases} 1 + \max_{m_1+1 \leq j_1 \leq q_1} \left[\frac{\operatorname{Re}(b_{j_1})-1}{\beta_{j_1}} \right], & q_1 > m_1, \\ -\infty, & q_1 = m_1, \end{cases} \quad \beta_0^1 = \begin{cases} 1 + \min_{\bar{n}_1+1 \leq i_1 \leq p_1} \left[\frac{\operatorname{Re}(a_{i_1})}{\alpha_{i_1}} \right], & p_1 > \bar{n}_1, \\ \infty, & p_1 = \bar{n}_1, \end{cases}$$

$$\alpha_0^2 = \begin{cases} 1 + \max_{m_2+1 \leq j_2 \leq q_2} \left[\frac{\operatorname{Re}(b_{j_2})-1}{\beta_{j_2}} \right], & q_2 > m_2, \\ -\infty, & q_2 = m_2, \end{cases} \quad \beta_0^2 = \begin{cases} 1 + \min_{\bar{n}_2+1 \leq i_2 \leq p_2} \left[\frac{\operatorname{Re}(a_{i_2})}{\alpha_{i_2}} \right], & p_2 > \bar{n}_2, \\ \infty, & p_2 = \bar{n}_2, \end{cases}$$

и так далее

$$\alpha_0^n = \begin{cases} 1 + \max_{m_n+1 \leq j_n \leq q_n} \left[\frac{\operatorname{Re}(b_{j_n})-1}{\beta_{j_n}} \right], & q_n > m_n, \\ -\infty, & q_n = m_n, \end{cases} \quad \beta_0^n = \begin{cases} 1 + \min_{\bar{n}_n+1 \leq i_n \leq p_n} \left[\frac{\operatorname{Re}(a_{i_n})}{\alpha_{i_n}} \right], & p_n > \bar{n}_n, \\ \infty, & p_n = \bar{n}_n. \end{cases} \quad (3.4)$$

Исключительным множеством $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}$ функции $\bar{\mathcal{H}}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^{\mathbf{m},\mathbf{n}}(\mathbf{s})$:

$$\bar{\mathcal{H}}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^{\mathbf{m},\mathbf{n}}(\mathbf{s}) \equiv \bar{\mathcal{H}}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^{\mathbf{m},\mathbf{n}} \left[\begin{matrix} (\mathbf{a}_i, \alpha_i)_{1,\mathbf{p}} \\ (\mathbf{b}_j, \beta_j)_{1,\mathbf{q}} \end{matrix} \middle| \mathbf{s} \right] = \prod_{k=1}^n \mathcal{H}_{p_k, q_k}^{m_k, \bar{n}_k} \left[\begin{matrix} (a_{i_k}, \alpha_{i_k})_{1, p_k} \\ (b_{j_k}, \beta_{j_k})_{1, q_k} \end{matrix} \middle| s \right], \quad (3.5)$$

назовем множество векторов $\bar{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n) \in \mathbb{R}^n$ ($\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_n$), таких что $\alpha_1 < 1 - \nu_1 < \beta_1$, $\alpha_2 < 1 - \nu_2 < \beta_2$, ..., $\alpha_n < 1 - \nu_n < \beta_n$, и функции $\mathcal{H}_{p_1, q_1}^{m_1, \bar{n}_1}(s_1)$, $\mathcal{H}_{p_2, q_2}^{m_2, \bar{n}_2}(s_2)$, ..., $\mathcal{H}_{p_n, q_n}^{m_n, \bar{n}_n}(s_n)$ имеют нули на прямых $\text{Re}(s_1) < 1 - \nu_1$, $\text{Re}(s_2) < 1 - \nu_2$, ..., $\text{Re}(s_n) < 1 - \nu_n$, соответственно [1, пункт 2.1].

Применив многомерное интегральное преобразование Меллина (2.1) к (1.1) с учетом результатов для соответствующего одномерного случая [6, формула (5.1.14)], в работе [1] получили:

$$(\mathfrak{M}H_{\sigma, \kappa}^1 f)(s) = \bar{\mathcal{H}}_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}^{\mathbf{m}, \mathbf{n}} \left[\begin{matrix} (\mathbf{a}_i, \alpha_i)_{1, \mathbf{p}} \\ (\mathbf{b}_j, \beta_j)_{1, \mathbf{q}} \end{matrix} \middle| s + \sigma \right] (\mathfrak{M}f)(s + \sigma + \kappa). \quad (3.6)$$

Следующие утверждения, обобщающие одномерный случай в [6, теорема 5.37], представляют $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ -теорию модифицированного $H_{\sigma, \kappa}^1$ -преобразования (1.1).

Теорема 3.1. [1, теорема 9] Пусть

$$\alpha_1 < \nu_1 - \text{Re}(\kappa_1) < \beta_1, \alpha_2 < \nu_2 - \text{Re}(\kappa_2) < \beta_1, \dots, \alpha_n < \nu_n - \text{Re}(\kappa_1) < \beta_n, \nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_n;$$

$$a_1^* = 0, a_2^* = 0, \dots, a_n^* = 0; \Delta_1[\nu_1 - \text{Re}(\kappa_1)] + \text{Re}(\mu_1) \leq 0,$$

$$\Delta_2[\nu_2 - \text{Re}(\kappa_2)] + \text{Re}(\mu_2) \leq 0, \dots, \Delta_n[\nu_n - \text{Re}(\kappa_n)] + \text{Re}(\mu_n) \leq 0. \quad (3.7)$$

Верны следующие утверждения:

(a) Существует взаимно однозначное преобразование $H_{\sigma, \kappa}^1 \in [\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}, \mathfrak{L}_{\bar{\nu} - \text{Re}(\kappa + \sigma), \bar{2}}]$ такое, что равенство (3.6) выполняется для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ и $\text{Re}(s) = \bar{\nu} - \text{Re}(\kappa + \sigma)$.

Если $a_1^* = 0, a_2^* = 0, \dots, a_n^* = 0; \Delta_1[\nu_1 - \text{Re}(\kappa_1)] + \text{Re}(\mu_1) = 0, \Delta_2[\nu_2 - \text{Re}(\kappa_2)] + \text{Re}(\mu_2) = 0, \dots, \Delta_n[\nu_n - \text{Re}(\kappa_n)] + \text{Re}(\mu_n) = 0$ и $1 - \bar{\nu} + \text{Re}(\kappa) \notin \mathcal{E}_{\bar{\mathcal{H}}}$, тогда $H_{\sigma, \kappa}^1$ биективно отображает $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu} - \text{Re}(\kappa + \sigma), \bar{2}}$.

(b) Преобразование $H_{\sigma, \kappa}^1$ не зависит от $\bar{\nu}$ в том смысле, что если $\bar{\nu}$ и $\tilde{\nu}$ удовлетворяют условиям (3.7) и если преобразования $H_{\sigma, \kappa}^1$ и $\tilde{H}_{\sigma, \kappa}^1$ определены в пространствах $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ и $\mathfrak{L}_{\tilde{\nu}, \bar{2}}$ равенством (3.6), тогда $H_{\sigma, \kappa}^1 f = \tilde{H}_{\sigma, \kappa}^1 f$ для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}} \cap \mathfrak{L}_{\tilde{\nu}, \bar{2}}$.

(c) Если $a_1^* = 0, a_2^* = 0, \dots, a_n^* = 0; \Delta_1[\nu_1 - \text{Re}(\kappa_1)] + \text{Re}(\mu_1) < 0, \Delta_2[\nu_2 - \text{Re}(\kappa_2)] + \text{Re}(\mu_2) < 0, \dots, \Delta_n[\nu_n - \text{Re}(\kappa_n)] + \text{Re}(\mu_n) < 0$; тогда для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ преобразование $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ дается формулой (1.1).

(d) Пусть $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, $\bar{h} = (h_1, \dots, h_n) > 0$, и $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$. Если $\text{Re}(\bar{\lambda}) > (\bar{\nu} - \text{Re}(\kappa))\bar{h} - 1$, тогда $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ можно представить в виде

$$(H_{\sigma, \kappa}^1 f)(\mathbf{x}) = \bar{h} \mathbf{x}^{\sigma+1 - (\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}\mathbf{x}} \mathbf{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \int_0^\infty H_{\mathbf{p}+1, \mathbf{q}+1}^{\mathbf{m}, \mathbf{n}+1} \left[\begin{matrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{t} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (-\bar{\lambda}, \bar{h}), (\mathbf{a}_i, \alpha_i)_{1, \mathbf{p}} \\ (\mathbf{b}_j, \beta_j)_{1, \mathbf{q}}, (-\bar{\lambda} - 1, \bar{h}) \end{matrix} \right] \mathbf{t}^{\kappa-1} f(\mathbf{t}) \mathbf{d}\mathbf{t}, \quad (3.8)$$

а при $\text{Re}(\bar{\lambda}) < (\bar{\nu} - \text{Re}(\kappa))\bar{h} - 1$ дается формулой

$$(H_{\sigma, \kappa}^1 f)(\mathbf{x}) = -\bar{h} \mathbf{x}^{\sigma+1 - (\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}\mathbf{x}} \mathbf{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \int_0^\infty \tilde{H}_{\mathbf{p}+1, \mathbf{q}+1}^{\mathbf{m}+1, \mathbf{n}} \left[\begin{matrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{t} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\mathbf{a}_i, \alpha_i)_{1, \mathbf{p}}, (-\bar{\lambda}, \bar{h}) \\ (-\bar{\lambda} - 1, \bar{h}), (\mathbf{b}_j, \beta_j)_{1, \mathbf{q}} \end{matrix} \right] \mathbf{t}^{\kappa-1} f(\mathbf{t}) \mathbf{d}\mathbf{t}. \quad (3.9)$$

(e) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ и $g \in \mathfrak{L}_{1 - \bar{\nu} + \text{Re}(\kappa + \sigma), \bar{2}}$, то имеет место формула:

$$\int_0^\infty f(\mathbf{x}) (H_{\sigma, \kappa}^1 g)(\mathbf{x}) \mathbf{d}\mathbf{x} = \int_0^\infty (H_{\sigma, \kappa}^2 f)(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) \mathbf{d}\mathbf{x}, \quad (3.10)$$

где

$$(H_{\sigma, \kappa}^2 f)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\sigma \int_0^\infty H_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}^{\mathbf{m}, \mathbf{n}} \left[\begin{matrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{x} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} (\mathbf{a}_i, \alpha_i)_{1, \mathbf{p}} \\ (\mathbf{b}_j, \beta_j)_{1, \mathbf{q}} \end{matrix} \right] \mathbf{t}^\kappa f(\mathbf{t}) \frac{\mathbf{d}\mathbf{t}}{\mathbf{x}}. \quad (3.11)$$

В [1, формулы (68), (69)] были получены формулы обращения для преобразования $H_{\sigma,\kappa}^1 f$, обобщающие соответствующий одномерный случай в [6, (5.5.23) и (5.5.24)]:

$$f(\mathbf{x}) = -\bar{h}\mathbf{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}-\kappa} \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}^{-(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \times$$

$$\times \int_0^\infty H_{\mathbf{p}+1,\mathbf{q}+1}^{\mathbf{q}-\mathbf{m},\mathbf{p}-\mathbf{n}+1} \left[\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{x}} \middle| \begin{matrix} (-\bar{\lambda}, \bar{h}), (1-\mathbf{a}_i - \alpha_i, \alpha_i)_{\mathbf{n}+1,\mathbf{p}}, (1-\mathbf{a}_i - \alpha_i, \alpha_i)_{1,\mathbf{n}} \\ (1-\mathbf{b}_j - \beta_j, \beta_j)_{\mathbf{m}+1,\mathbf{q}}, (1-\mathbf{b}_j - \beta_j, \beta_j)_{1,\mathbf{m}} \end{matrix} (-\bar{\lambda}-1, \bar{h}) \right] \mathbf{t}^{-\sigma} (H_{\sigma,\kappa}^1 f)(\mathbf{t}) d\mathbf{t}$$
(3.12)

или

$$f(\mathbf{x}) = \bar{h}\mathbf{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}-1} \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}^{-(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \times$$

$$\times \int_0^\infty H_{\mathbf{p}+1,\mathbf{q}+1}^{\mathbf{q}-\mathbf{m}+1,\mathbf{p}-\mathbf{n}} \left[\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{x}} \middle| \begin{matrix} (1-\mathbf{a}_i - \alpha_i, \alpha_i)_{\mathbf{n}+1,\mathbf{p}}, (1-\mathbf{a}_i - \alpha_i, \alpha_i)_{1,\mathbf{n}}, (-\bar{\lambda}, \bar{h}) \\ (-\bar{\lambda}-1, \bar{h}), (1-\mathbf{b}_j - \beta_j, \beta_j)_{\mathbf{m}+1,\mathbf{q}}, (1-\mathbf{b}_j - \beta_j, \beta_j)_{1,\mathbf{m}} \end{matrix} \right] \mathbf{t}^{-\sigma} (H_{\sigma,\kappa}^1 f)(\mathbf{t}) d\mathbf{t}.$$
(3.13)

Условия справедливости формул (3.12), (3.13) дает следующая теорема, которая обобщает результаты для соответствующего одномерного случая в [6, Теорема 5.47]).

Теорема 3.2. [1, теорема 10] Пусть $a_1^* = 0, a_2^* = 0, \dots, a_n^* = 0$; $\alpha_1 < \nu_1 - \text{Re}(\kappa_1) < \beta_1$, $\alpha_2 < \nu_2 - \text{Re}(\kappa_2) < \beta_2, \dots, \alpha_n < \nu_n - \text{Re}(\kappa_n) < \beta_n$; $\alpha_0^1 < 1 - \nu_1 + \text{Re}(\kappa_1) < \beta_0^1$, $\alpha_0^2 < 1 - \nu_2 + \text{Re}(\kappa_2) < \beta_0^2, \dots, \alpha_0^n < 1 - \nu_n + \text{Re}(\kappa_n) < \beta_0^n$; и пусть $\bar{\lambda} \in C^n$, $\bar{h} > 0$.

Если $\Delta_1[\nu_1 - \text{Re}(\kappa_1)] + \text{Re}(\mu_1) = 0$, $\Delta_2[\nu_2 - \text{Re}(\kappa_2)] + \text{Re}(\mu_2) = 0, \dots, \Delta_n[\nu_n - \text{Re}(\kappa_n)] + \text{Re}(\mu_n) = 0$ и $f \in \mathcal{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$, то формулы обращения (3.12) и (3.13) справедливы соответственно при $\text{Re}(\bar{\lambda}) > (1 - \bar{\nu} + \text{Re}(\kappa))\bar{h} - 1$ и $\text{Re}(\bar{\lambda}) < (1 - \bar{\nu} + \text{Re}(\kappa))\bar{h} - 1$.

4. $\mathcal{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ -теории и формулы обращения многомерных $G_{\sigma,\kappa}^1$ -, $G_{\sigma,\kappa;\delta}^1$ -преобразований

Модифицированное $G_{\sigma,\kappa}^1$ -преобразование (1.2) является частным случаем модифицированного $H_{\sigma,\kappa}^1$ -преобразования (1.1), когда выполняются условия $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_q = 1$. Поэтому $\mathcal{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ -теория для $G_{\sigma,\kappa}^1$ -преобразования (1.2) следует из соответствующих результатов для модифицированного $H_{\sigma,\kappa}^1$ -преобразования (1.1) и изложена в [2].

Исключительным множеством $\mathcal{E}_{\bar{g}}$ функции $\bar{g}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^{\mathbf{m},\mathbf{n}}(\mathbf{s})$:

$$\bar{g}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^{\mathbf{m},\mathbf{n}}(\mathbf{s}) \equiv \bar{g}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^{\mathbf{m},\mathbf{n}} \left[\frac{(\mathbf{a}_i)_{1,\mathbf{p}}}{(\mathbf{b}_j)_{1,\mathbf{q}}} \middle| \mathbf{s} \right] = \prod_{k=1}^n \mathcal{G}_{p_k, q_k}^{m_k, \bar{n}_k} \left[\frac{(a_{i_k})_{1,p_k}}{(b_{j_k})_{1,q_k}} \middle| s \right],$$
(4.1)

назовем множество векторов $\bar{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n) \in \mathbb{R}^n$ ($\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_n$), таких что $\alpha_1 < 1 - \nu_1 < \beta_1$, $\alpha_2 < 1 - \nu_2 < \beta_2, \dots, \alpha_n < 1 - \nu_n < \beta_n$, и функции $\mathcal{G}_{p_1, q_1}^{m_1, \bar{n}_1}(s_1)$, $\mathcal{G}_{p_2, q_2}^{m_2, \bar{n}_2}(s_2), \dots, \mathcal{G}_{p_n, q_n}^{m_n, \bar{n}_n}(s_n)$, имеют нули на прямых $\text{Re}(s_1) < 1 - \nu_1$, $\text{Re}(s_2) < 1 - \nu_2, \dots, \text{Re}(s_n) < 1 - \nu_n$, соответственно [2, (3.6)].

В [2] было получено представление оператора $G_{\sigma,\kappa;\delta}^1$ -преобразования в виде композиции оператора $G_{\sigma/\delta, \kappa/\delta}^1$ -преобразования (1.2) и элементарных операторов вида (2.4) $\mathbf{N}_{\mathbf{g}}$:

$$(G_{\sigma,\kappa;\delta}^1 f)(\mathbf{x}) = \frac{1}{\delta} (\mathbf{N}_{\delta} G_{\sigma/\delta, \kappa/\delta}^1 \mathbf{N}_{1/\delta} f)(\mathbf{x}).$$
(4.2)

Применив преобразование Меллина (2.1) к (1.3), учитывая (3.6), представление (4.2) и утверждения леммы 2.1, в [2, формула 4.3] получили:

$$(\mathfrak{M} G_{\sigma,\kappa;\delta}^1 f)(\mathbf{s}) = \frac{1}{\delta} \bar{g}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^{\mathbf{m},\mathbf{n}} \left[\frac{(\mathbf{a}_i)_{1,\mathbf{p}}}{(\mathbf{b}_j)_{1,\mathbf{q}}} \middle| \frac{\mathbf{s} + \sigma}{\delta} \right] (\mathfrak{M} f)(\mathbf{s} + \sigma + \kappa).$$
(4.3)

Справедлива теорема.

Теорема 4.1.[2, теорема 4.1] Пусть

$$\alpha_1 < (\nu_1 - \operatorname{Re}(\kappa_1))/\delta_1 < \beta_1, \alpha_2 < (\nu_2 - \operatorname{Re}(\kappa_2))/\delta_2 < \beta_1, \dots, \alpha_n < (\nu_n - \operatorname{Re}(\kappa_1))/\delta_n < \beta_n, \nu_1 = \dots = \nu_n; \quad (4.4)$$

$$a_1^* = 0, a_2^* = 0, \dots, a_n^* = 0; \Delta_1[\nu_1 - \operatorname{Re}(\kappa_1)]/\delta_1 + \operatorname{Re}(\mu_1) \leq 0,$$

$$\Delta_2[\nu_2 - \operatorname{Re}(\kappa_2)]/\delta_2 + \operatorname{Re}(\mu_2) \leq 0, \dots, \Delta_n[\nu_n - \operatorname{Re}(\kappa_n)]/\delta_n + \operatorname{Re}(\mu_n) \leq 0. \quad (4.5)$$

Верны следующие утверждения:

(а) Существует взаимно однозначное преобразование $G_{\sigma, \kappa; \delta}^1 \in [\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}, \mathfrak{L}_{\bar{\nu} - \operatorname{Re}(\kappa + \sigma), \bar{2}}]$ такое, что равенство (4.3) выполняется для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ и $\operatorname{Re}(\mathbf{s}) = \bar{\nu} - \operatorname{Re}(\kappa + \sigma)$.

Если $a_1^* = 0, a_2^* = 0, \dots, a_n^* = 0; \Delta_1[\nu_1 - \operatorname{Re}(\kappa_1)]/\delta_1 + \operatorname{Re}(\mu_1) = 0, \Delta_2[\nu_2 - \operatorname{Re}(\kappa_2)]/\delta_2 + \operatorname{Re}(\mu_2) = 0, \dots, \Delta_n[\nu_n - \operatorname{Re}(\kappa_n)]/\delta_n + \operatorname{Re}(\mu_n) = 0$ и $1 - (\bar{\nu} - \operatorname{Re}(\kappa))/\delta \notin \mathcal{E}_{\bar{g}}$, тогда $G_{\sigma, \kappa; \delta}^1$ -преобразование биективно отображает $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu} - \operatorname{Re}(\kappa + \sigma), \bar{2}}$.

(б) Преобразование $G_{\sigma, \kappa; \delta}^1 f$ не зависит от $\bar{\nu}$ в том смысле, что если $\bar{\nu}$ и $\tilde{\bar{\nu}}$ удовлетворяют условиям (4.4)–(4.5) и если преобразования $G_{\sigma, \kappa; \delta}^1 f$ и $\tilde{G}_{\sigma, \kappa; \delta}^1 f$ определены в пространствах $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ и $\mathfrak{L}_{\tilde{\bar{\nu}}, \bar{2}}$ равенством (4.3), тогда $G_{\sigma, \kappa; \delta}^1 f = \tilde{G}_{\sigma, \kappa; \delta}^1 f$ для $f \in \mathfrak{L}_{\tilde{\bar{\nu}}, \bar{2}} \cap \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$.

(с) Если $a_1^* = 0, a_2^* = 0, \dots, a_n^* = 0; \Delta_1[\nu_1 - \operatorname{Re}(\kappa_1)]/\delta_1 + \operatorname{Re}(\mu_1) < 0, \Delta_2[\nu_2 - \operatorname{Re}(\kappa_2)]/\delta_2 + \operatorname{Re}(\mu_2) < 0, \dots, \Delta_n[\nu_n - \operatorname{Re}(\kappa_n)]/\delta_n + \operatorname{Re}(\mu_n) < 0$; тогда для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ преобразование $G_{\sigma, \kappa; \delta}^1 f$ дается формулой (1.3).

(д) Пусть $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ и $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$. Если $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > (\bar{\nu} - \operatorname{Re}(\kappa))/\delta - 1$, тогда $G_{\sigma, \kappa; \delta}^1 f$ можно представить в виде

$$(G_{\sigma, \kappa; \delta}^1 f)(\mathbf{x}) = \frac{1}{\delta} \mathbf{x}^{\sigma+1-\delta(\bar{\lambda}+1)} \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}^{\delta(\bar{\lambda}+1)} \int_0^\infty G_{\mathbf{p}+1, \mathbf{q}+1}^{\mathbf{m}, \mathbf{n}+1} \left[\frac{\mathbf{x}^\delta}{\mathbf{t}^\delta} \middle| \begin{matrix} -\bar{\lambda}, (\mathbf{a}_i)_{1, \mathbf{p}} \\ (\mathbf{b}_j)_{1, \mathbf{q}}, -\bar{\lambda} - 1 \end{matrix} \right] \mathbf{t}^{\kappa-1} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, \quad (4.6)$$

а при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < (\bar{\nu} - \operatorname{Re}(\kappa))/\delta - 1$ дается формулой

$$(G_{\sigma, \kappa; \delta}^1 f)(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\delta} \mathbf{x}^{\sigma+1-\delta(\bar{\lambda}+1)} \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}^{\delta(\bar{\lambda}+1)} \int_0^\infty G_{\mathbf{p}+1, \mathbf{q}+1}^{\mathbf{m}+1, \mathbf{n}} \left[\frac{\mathbf{x}^\delta}{\mathbf{t}^\delta} \middle| \begin{matrix} (\mathbf{a}_i)_{1, \mathbf{p}}, -\bar{\lambda} \\ -\bar{\lambda} - 1, (\mathbf{b}_j)_{1, \mathbf{q}} \end{matrix} \right] \mathbf{t}^{\kappa-1} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}. \quad (4.7)$$

(е) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ и $g \in \mathfrak{L}_{1-\bar{\nu}+\operatorname{Re}(\kappa+\sigma), \bar{2}}$, то имеет место формула :

$$\int_0^\infty f(\mathbf{x}) (G_{\sigma, \kappa; \delta}^1 g)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_0^\infty (G_{\kappa, \sigma; \delta}^2 f)(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (4.8)$$

где

$$(G_{\kappa, \sigma; \delta}^2 f)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\kappa \int_0^\infty G_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}^{\mathbf{m}, \mathbf{n}} \left[\frac{\mathbf{t}^\delta}{\mathbf{x}^\delta} \middle| \begin{matrix} (\mathbf{a}_i)_{1, \mathbf{p}} \\ (\mathbf{b}_j)_{1, \mathbf{q}} \end{matrix} \right] \mathbf{t}^\sigma f(\mathbf{t}) \frac{d\mathbf{t}}{\mathbf{x}}. \quad (4.9)$$

В [2, формулы (4.10), (4.11)] были получены формулы обращения для преобразования $G_{\sigma, \kappa; \delta}^1 f$:

$$f(\mathbf{x}) = \delta \mathbf{x}^{\delta-(\kappa-1)-\delta(\bar{\lambda}+1)} \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}^{-\delta(\bar{\lambda}+1)} \times \\ \times \int_0^\infty G_{\mathbf{p}+1, \mathbf{q}+1}^{\mathbf{q}-\mathbf{m}, \mathbf{p}-\mathbf{n}+1} \left[\frac{\mathbf{t}^\delta}{\mathbf{x}^\delta} \middle| \begin{matrix} -\bar{\lambda}, -\mathbf{a}_{\mathbf{n}+1}, \dots, -\mathbf{a}_{\mathbf{p}}, -\mathbf{a}_1, \dots, -\mathbf{a}_{\mathbf{n}} \\ -\mathbf{b}_{\mathbf{m}+1}, \dots, -\mathbf{b}_{\mathbf{q}}, -\mathbf{b}_1, \dots, -\mathbf{b}_{\mathbf{m}}, -\bar{\lambda} - 1 \end{matrix} \right] \mathbf{t}^{\delta-\sigma-1} (G_{\sigma, \kappa; \delta}^1 f)(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \quad (4.10)$$

или

$$f(\mathbf{x}) = -\delta \mathbf{x}^{\delta-(\kappa-1)-\delta(\bar{\lambda}+1)} \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}^{\delta(\bar{\lambda}+1)} \times \\ \times \int_0^\infty G_{\mathbf{p}+1, \mathbf{q}+1}^{\mathbf{q}-\mathbf{m}+1, \mathbf{p}-\mathbf{n}} \left[\frac{\mathbf{t}^\delta}{\mathbf{x}^\delta} \middle| \begin{matrix} -\mathbf{a}_{\mathbf{n}+1}, \dots, -\mathbf{a}_{\mathbf{p}}, -\mathbf{a}_1, \dots, -\mathbf{a}_{\mathbf{n}}, -\bar{\lambda}, \\ -\bar{\lambda} - 1, -\mathbf{b}_{\mathbf{m}+1}, \dots, -\mathbf{b}_{\mathbf{q}}, -\mathbf{b}_1, \dots, -\mathbf{b}_{\mathbf{m}}, \end{matrix} \right] \mathbf{t}^{\delta-\sigma-1} (G_{\sigma, \kappa; \delta}^1 f)(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \quad (4.11)$$

Условия справедливости формул (4.10), (4.11) приведены в следующей теореме.

Теорема 4.2. [2, теорема 4.2] Пусть $a_1^* = 0, a_2^* = 0, \dots, a_n^* = 0$; $\alpha_1 < (\nu_1 - \operatorname{Re}(\kappa_1))/\delta_1 < \beta_1$, $\alpha_2 < (\nu_2 - \operatorname{Re}(\kappa_2))/\delta_2 < \beta_2, \dots, \alpha_n < (\nu_n - \operatorname{Re}(\kappa_n))/\delta_n < \beta_n$; $\alpha_0^1 < 1 - (\nu_1 - \operatorname{Re}(\kappa_1))/\delta_1 < \beta_0^1$, $\alpha_0^2 < 1 - (\nu_2 - \operatorname{Re}(\kappa_2))/\delta_2 < \beta_0^2, \dots, \alpha_0^n < 1 - (\nu_n - \operatorname{Re}(\kappa_n))/\delta_n < \beta_0^n$; и пусть $\bar{\lambda} \in C^n$.

Если $\Delta_1[\nu_1 - \operatorname{Re}(\kappa_1)]/\delta_1 + \operatorname{Re}(\mu_1) = 0$, $\Delta_2[\nu_2 - \operatorname{Re}(\kappa_2)]/\delta_2 + \operatorname{Re}(\mu_2) = 0, \dots, \Delta_n[\nu_n - \operatorname{Re}(\kappa_n)]/\delta_n + \operatorname{Re}(\mu_n) = 0$ ($\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_n$) и $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$, то формулы обращения (4.10) и (4.11) справедливы соответственно при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > (-\bar{\nu} + \operatorname{Re}(\kappa))/\delta$ и $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < (-\bar{\nu} + \operatorname{Re}(\kappa))/\delta$.

5. $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ -теория и формула обращения многомерного ${}_1\mathcal{I}_{\sigma, \omega; \zeta}^c$ -преобразования

Рассуждая аналогично соответствующему одномерному случаю, изложенному в [13, пункт 3], в [2, формула (5.1)] вывели формулу многомерного преобразования Меллина (2.1) от преобразования ${}_1\mathcal{I}_{\sigma, \omega; \zeta}^c f$ (1.4)

$$({}_1\mathcal{I}_{\sigma, \omega; \zeta}^c f)(\mathbf{s}) = \frac{1}{\zeta} \bar{\mathcal{G}}_{2, 2}^{0, 2} \left[\begin{matrix} c-a & c-b \\ 0 & c-a-b \end{matrix} \middle| \frac{\mathbf{s} + \sigma}{\zeta} \right] (\mathfrak{M}f)(\mathbf{s} + \sigma + \omega + \zeta(c-1) + 1). \quad (5.1)$$

Из (5.1) с учетом (4.3) следует, что преобразование (1.4) ${}_1\mathcal{I}_{\sigma, \omega; \zeta}^c f$ является частным случаем преобразования вида (1.3) $G_{\sigma, \kappa; \delta}^1 f$. На основании этого получено представление для преобразования ${}_1\mathcal{I}_{\sigma, \omega; \zeta}^c f$ в следующем виде [2, формула (5.5)]

$$({}_1\mathcal{I}_{\sigma, \omega; \zeta}^c f)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\sigma \int_0^\infty G_{2, 2}^{0, 2} \left[\begin{matrix} \mathbf{x}^\zeta \\ \mathbf{t}^\zeta \end{matrix} \middle| \begin{matrix} c-a & c-b \\ 0 & c-a-b \end{matrix} \right] \mathbf{t}^{\omega + \zeta(c-1)} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}. \quad (5.2)$$

На основании (5.2) и (1.3) $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n) = (2, 2, \dots, 2)$; $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) = (2, 2, \dots, 2)$, параметры (3.2), (3.3) имеют следующие значения:

$$a_1^* = a_2^* = \dots = a_n^* = 0; \Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_n = 0; \mu_1 = -c_1, \mu_2 = -c_2, \dots, \mu_n = -c_n. \quad (5.3)$$

Для удобства введем обозначения

$$\theta = (\theta_1, \theta_1, \dots, \theta_n) = \zeta^{-1}[-\bar{\nu} - \operatorname{Re}(\omega) - 1] + 1, \bar{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = \bar{\nu} + \operatorname{Re}(\omega - \sigma) + 1. \quad (5.4)$$

Параметры $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ и $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in C^n$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in C^n$ в (3.1) для преобразования (1.4) принимают следующие значения

$$\mathbf{m} = (0, 0, \dots, 0), \mathbf{n} = (2, 2, \dots, 2), \alpha = -\infty, \beta = 1 - \max[\operatorname{Re}(c), \operatorname{Re}(a+b)]. \quad (5.5)$$

На основании (5.1) число θ не принадлежит исключительному множеству $\mathcal{E}_{\bar{\zeta}}$ функции $\bar{\mathcal{G}}_{2, 2}^{0, 2}$ в правой части (5.1), если :

$$\mathbf{s} \neq \mathbf{m} + 1, \mathbf{s} \neq \mathbf{l} + 1 + \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c} \quad (\mathbf{l} = (l_1, l_2, \dots, l_n); \mathbf{m} = (\bar{m}_1, \bar{m}_2, \dots, \bar{m}_n) \in \mathbb{N}_0^n), \quad (5.6)$$

для $\operatorname{Re}(\mathbf{s}) = 1 - \theta$.

$\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ -теория преобразования (1.4) следует из (5.2) и утверждений теоремы 4.1 для преобразования $G_{\sigma, \kappa; \delta}^1 f$.

Теорема 5.1. [2, теорема 6.1] Пусть

$$\theta > \max[\operatorname{Re}(c-a), \operatorname{Re}(c-b)]; \operatorname{Re}(c) \geq 0. \quad (5.7)$$

Верны следующие утверждения:

(a) Существует взаимно однозначное преобразование ${}_1I_{\sigma,\omega;\zeta}^c \in [\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}, \mathfrak{L}_{\bar{\eta},\bar{2}}]$ такое, что равенство (5.1) выполняется для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ и $\operatorname{Re}(s) = \bar{\eta}$. Если $\operatorname{Re}(c) = 0$ и (5.6) имеет место, то преобразование ${}_1I_{\sigma,\omega;\zeta}^c f$ биективно отображает $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ на $\mathfrak{L}_{\bar{\eta},\bar{2}}$.

(b) Преобразование ${}_1I_{\sigma,\omega;\zeta}^c f$ не зависит от $\bar{\nu}$ в том смысле, что если $\bar{\nu}$ и $\tilde{\bar{\nu}}$ удовлетворяют условиям (5.7) и если преобразования ${}_1I_{\sigma,\omega;\zeta}^c f$ и $\tilde{{}_1I}_{\sigma,\omega;\zeta}^c f$ определены в пространствах $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ и $\mathfrak{L}_{\tilde{\bar{\nu}},\bar{2}}$ равенством (5.1), тогда ${}_1I_{\sigma,\omega;\zeta}^c f = \tilde{{}_1I}_{\sigma,\omega;\zeta}^c f$ для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}} \cap \mathfrak{L}_{\tilde{\bar{\nu}},\bar{2}}$.

(c) Если $\operatorname{Re}(c) > 1$, тогда для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ преобразование ${}_1I_{\sigma,\omega;\zeta}^c f$ задается равенством (1.4).

(d) Пусть $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ и $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$. Если $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < \theta$, тогда для преобразования ${}_1I_{\sigma,\omega;\zeta}^c f$ справедливо представление

$$({}_1I_{\sigma,\omega;\zeta}^c f)(\mathbf{x}) = \frac{1}{\zeta} \mathbf{x}^{\sigma+1-\zeta(\bar{\lambda}+1)} \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}^{\zeta(\bar{\lambda}+1)} \int_0^\infty G_{3,3}^{0,3} \left[\frac{\mathbf{x}^\zeta}{\mathbf{t}^\zeta} \middle| \begin{matrix} -\bar{\lambda}, c-a, c-b \\ 0, c-a-b, -\bar{\lambda}-1 \end{matrix} \right] \mathbf{t}^{\omega+\zeta(c-1)} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}. \quad (5.8)$$

Если $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > \theta$, тогда

$$({}_1I_{\sigma,\omega;\zeta}^c f)(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\zeta} \mathbf{x}^{\sigma+1-\zeta(\bar{\lambda}+1)} \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}^{\zeta(\bar{\lambda}+1)} \int_0^\infty G_{3,3}^{1,2} \left[\frac{\mathbf{x}^\zeta}{\mathbf{t}^\zeta} \middle| \begin{matrix} c-a, c-b, -\bar{\lambda} \\ -\bar{\lambda}-1, 0, c-a-b \end{matrix} \right] \mathbf{t}^{\omega+\zeta(c-1)} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}. \quad (5.9)$$

(e) Для двух функций $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$ и $g \in \mathfrak{L}_{\bar{k}^*,\bar{2}}$, где $\bar{k}^* = -\bar{\nu} + \operatorname{Re}(\omega - \sigma)$, верно равенство:

$$\int_0^\infty f(\mathbf{x}) ({}_1I_{\sigma,\omega;\zeta}^c g)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_0^\infty ({}_1I_{\sigma,\omega;\zeta}^c f)(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (5.10)$$

В [2, формулы (7.5), (7.6)] были получены формулы обращения для преобразования ${}_1I_{\sigma,\omega;\zeta}^c f$, обобщающие соответствующий одномерный случай в [13]:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \zeta \mathbf{x}^{\zeta-\omega-\zeta(\bar{\lambda}+1)-\zeta(c-1)} \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}^{\zeta(\bar{\lambda}+1)} \times \\ &\times \int_0^\infty G_{3,3}^{2,1} \left[\frac{\mathbf{t}^\zeta}{\mathbf{x}^\zeta} \middle| \begin{matrix} -\bar{\lambda}, -c+a, -c+b \\ 0, -c+a+b, -\bar{\lambda}-1 \end{matrix} \right] \mathbf{t}^{\zeta-\sigma-1} ({}_1I_{\sigma,\omega;\zeta}^c f)(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \end{aligned} \quad (5.11)$$

или

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= -\zeta \mathbf{x}^{\zeta-\omega-\zeta(\bar{\lambda}+1)-\zeta(c-1)} \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}^{\zeta(\bar{\lambda}+1)} \times \\ &\times \int_0^\infty G_{3,3}^{3,0} \left[\frac{\mathbf{t}^\zeta}{\mathbf{x}^\zeta} \middle| \begin{matrix} -c+a, -c+b, -\bar{\lambda} \\ -\bar{\lambda}-1, 0, -c+a+b \end{matrix} \right] \mathbf{t}^{\zeta-\sigma-1} ({}_1I_{\sigma,\omega;\zeta}^c f)(\mathbf{t}) d\mathbf{t}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Условия справедливости формул (5.11), (5.12) следуют из теоремы 4.2.

Теорема 5.2. [2, теорема 7.1] Пусть

$$\theta > \max[0, \operatorname{Re}(c-a-b), \operatorname{Re}(c-a), \operatorname{Re}(c-b)], \quad \bar{\lambda} \in \mathbb{C}^n$$

Если $\operatorname{Re}(c) = 0$ и $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$, то при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > \theta - 1$, верно равенство (5.11), а при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < \theta - 1$ верно равенство (5.12).

Аналогичные результаты были получены в [2] для трех модификаций преобразования (1.4).

6. $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ -теория и формула обращения многомерного $P_{\delta, 1}^\gamma$ -преобразования

Рассуждая аналогично соответствующему одномерному случаю, изложенному в [14, пункт 3], в [1, формула (81)] получили формулу многомерного преобразования Меллина (2.1) от преобразования (1.5) $P_{\delta, 1}^\gamma f$:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{M}P_{\delta, 1}^\gamma f)(s) &= 2^{\gamma-1} \frac{\Gamma((1+\gamma+\delta-s)/2)\Gamma((\gamma-\delta-s)/2)}{\Gamma(1-s/2)\Gamma((1-s)/2)} (\mathfrak{M}f)(1-\gamma+s) = \\ &= 2^{\gamma-1} \overline{\mathcal{H}}_{2,2}^{0,2} \left[\begin{pmatrix} \frac{1-\gamma-\delta}{2}, \frac{1}{2} \\ 0, \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+\frac{\delta-\gamma}{2}, \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \end{pmatrix} \middle| s \right] (\mathfrak{M}f)(s+1-\gamma). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Поэтому в силу (3.6) исходное интегральное преобразование (1.5) является модифицированным $H_{\sigma, \kappa}^1$ -преобразованием с $\sigma = 0$, $\kappa = 1 - \gamma$ [1, формула (82)]:

$$(P_{\delta, 1}^\gamma f)(s) = 2^{\gamma-1} \int_0^\infty H_{2,2}^{0,2} \left[\begin{pmatrix} \frac{1-\gamma-\delta}{2}, \frac{1}{2} \\ 0, \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+\frac{\delta-\gamma}{2}, \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right] t^{-\gamma} f(t) dt. \quad (6.2)$$

Параметры (3.1)–(3.3) для $P_{\delta, 1}^\gamma f$ равны соответственно $a_1^* = a_2^* = \dots = a_n^* = 0$; $\Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_n = 0$; $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n) = (2, 2, \dots, 2)$; $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) = (2, 2, \dots, 2)$, $\alpha_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$, $\beta_j = (\beta_{j1}, \beta_{j2}, \dots, \beta_{jn}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$ ($i = 1, \dots, p$; $j = 1, \dots, q$); $\mu = \gamma - 1$ и параметры:

$$\mathbf{m} = 0, \mathbf{n} = 2, \alpha = -\infty, \beta = \min[\operatorname{Re}(1 + \gamma + \delta), \operatorname{Re}(\gamma - \delta)]; \quad (6.3)$$

На основании (6.1), $1 - \bar{\nu}$ не принадлежит исключительному множеству $\mathcal{E}_{\bar{H}} \overline{\mathcal{H}}_{2,2}^{0,2}$ -функции в правой части (6.1), если:

$$s \neq 2m + 1, s \neq 2l + 2 \ (l = (l_1, l_2, \dots, l_n); m = (\bar{m}_1, \bar{m}_2, \dots, \bar{m}_n) \in \mathbb{N}_0^n), \quad (6.4)$$

для $\operatorname{Re}(s) = 1 - \bar{\nu}$.

$\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ -теория преобразования (1.5) следует из (6.1), (6.2), теоремы 3.1 для $H_{\sigma, \kappa}^1$ -преобразования (1.1).

Теорема 6.1. [1, теорема 11] Пусть

$$\begin{aligned} -\infty < \nu_1 - \operatorname{Re}(1 - \gamma_1) < \min[\operatorname{Re}(1 + \gamma_1 + \delta_1), \operatorname{Re}(\gamma_1 - \delta_1)], \operatorname{Re}(\gamma_1 - 1) \leq 0; \\ -\infty < \nu_2 - \operatorname{Re}(1 - \gamma_2) < \min[\operatorname{Re}(1 + \gamma_2 + \delta_2), \operatorname{Re}(\gamma_2 - \delta_2)], \operatorname{Re}(\gamma_2 - 1) \leq 0; \dots; \\ -\infty < \nu_n - \operatorname{Re}(1 - \gamma_n) < \min[\operatorname{Re}(1 + \gamma_n + \delta_n), \operatorname{Re}(\gamma_n - \delta_n)], \operatorname{Re}(\gamma_n - 1) \leq 0. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Верны следующие утверждения:

(a) Существует взаимно однозначное преобразование $P_{\delta, 1}^\gamma \in [\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}, \mathfrak{L}_{\bar{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma), \bar{2}}]$ такое, что равенство (6.1) выполняется для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ и $\operatorname{Re}(s) = \bar{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma)$. Если $\operatorname{Re}(\gamma - 1) = 0$ и (6.4) имеет место, то преобразование $P_{\delta, 1}^\gamma$ биективно на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$.

(b) Преобразование $P_{\delta, 1}^\gamma f$ не зависит от $\bar{\nu}$ в том смысле, что если $\bar{\nu}$ и $\tilde{\bar{\nu}}$ удовлетворяют (6.5) и если преобразования $P_{\delta, 1}^\gamma f$ и $\tilde{P}_{\delta, 1}^\gamma f$ определены в пространствах $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ и $\mathfrak{L}_{\tilde{\bar{\nu}}, \bar{2}}$ равенством (6.1), тогда $P_{\delta, 1}^\gamma f = \tilde{P}_{\delta, 1}^\gamma f$ для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}} \cap \mathfrak{L}_{\tilde{\bar{\nu}}, \bar{2}}$.

(c) Если $\operatorname{Re}(\gamma - 1) < 0$, тогда для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ $P_{\delta, 1}^\gamma f$ дается формулами (1.5) и (6.2).

(d) Пусть $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, $\bar{h} = (h_1, \dots, h_n) > 0$, и $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$. Если $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > (\bar{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma))\bar{h} - 1$, тогда преобразование $P_{\delta, 1}^\gamma f$ представимо в виде

$$\begin{aligned}
(P_{\delta,1}^\gamma f)(\mathbf{x}) &= 2^{\gamma-1} \bar{h} \mathbf{x}^{1-(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \times \\
&\times \int_0^\infty H_{3,3}^{0,3} \left[\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}} \middle| \begin{matrix} (-\bar{\lambda}, h), & (\frac{1-\gamma-\delta}{2}, \frac{1}{2}), & (1 + \frac{\delta-\gamma}{2}, \frac{1}{2}) \\ (0, \frac{1}{2}), & (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), & (-\bar{\lambda}-1, \bar{h}) \end{matrix} \right] \mathbf{t}^{-\gamma} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t},
\end{aligned} \tag{6.6}$$

а при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < (\bar{\nu} - \operatorname{Re}(1-\gamma))\bar{h} - 1$ дается формулой

$$\begin{aligned}
(P_{\delta,1}^\gamma f)(\mathbf{x}) &= -2^{\gamma-1} \bar{h} \mathbf{x}^{1-(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \times \\
&\times \int_0^\infty H_{3,3}^{1,2} \left[\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}} \middle| \begin{matrix} (\frac{1-\gamma-\delta}{2}, \frac{1}{2}), & (1 + \frac{\delta-\gamma}{2}, \frac{1}{2}), & (-\bar{\lambda}, \bar{h}) \\ (-\bar{\lambda}-1, \bar{h}), & (0, \frac{1}{2}), & (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \end{matrix} \right] \mathbf{t}^{-\gamma} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}.
\end{aligned} \tag{6.7}$$

(e) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ и $g \in \mathfrak{L}_{1-\bar{\nu}+\operatorname{Re}(1-\gamma), \bar{2}}$, то имеет место формула :

$$\int_0^\infty f(\mathbf{x}) (P_{\delta,1}^\gamma g)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_0^\infty 2^{\gamma-1} (P_{\delta,2}^* f)(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \tag{6.8}$$

где $(P_{\delta,2}^* f)(\mathbf{x})$ преобразование вида

$$(P_{\delta,2}^* f)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{x}}^\infty (\mathbf{t}^2 - \mathbf{x}^2)^{-\gamma/2} P_\delta^\gamma \left(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{x}} \right) f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = g(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} > 0). \tag{6.9}$$

В [1, формулы (102) и (103)] получены формулы обращения для преобразования (1.5) $P_{\delta,1}^\gamma f$:

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) &= -2^{1-\gamma} \bar{h} \mathbf{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}-1+\gamma} \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}^{-(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \times \\
&\times \int_0^\infty H_{3,3}^{2,1} \left[\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{x}} \middle| \begin{matrix} -(\bar{\lambda}, \bar{h}), & (\frac{\gamma+\delta}{2}, \frac{1}{2}), & (\frac{\gamma-\delta-1}{2}, \frac{1}{2}) \\ (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), & (0, \frac{1}{2}), & (-\bar{\lambda}-1, \bar{h}) \end{matrix} \right] (P_{\delta,1}^\gamma f)(\mathbf{t}) d\mathbf{t},
\end{aligned} \tag{6.10}$$

или

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) &= 2^{1-\gamma} \bar{h} \mathbf{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}-1} \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}^{-(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \times \\
&\times \int_0^\infty H_{3,3}^{3,0} \left[\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{x}} \middle| \begin{matrix} (\frac{\gamma+\delta}{2}, \frac{1}{2}), & (\frac{\gamma-\delta-1}{2}, \frac{1}{2}), & (-\bar{\lambda}, \bar{h}) \\ (-\bar{\lambda}-1, \bar{h}), & (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), & (0, \frac{1}{2}) \end{matrix} \right] (P_{\delta,1}^\gamma f)(\mathbf{t}) d\mathbf{t}.
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Условия справедливости формул (6.10) и (6.11) приведены в следующем утверждении.

Теорема 6.2. [2, теорема 13] Пусть $\operatorname{Re}(\gamma) = 1$, $-\infty < \bar{\nu} < \min[1, \operatorname{Re}(2+\delta), \operatorname{Re}(1-\delta)]$, $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}^n$, $\bar{h} > 0$.

Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$, то формула обращения (6.10) справедлива при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > (1-\bar{\nu})\bar{h} - 1$, а формула (6.11) справедлива при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < (1-\bar{\nu})\bar{h} - 1$.

Аналогичные результаты были получены в [1] еще для одной модификации преобразования вида (1.5).

Литература

1. Sitnik S.M., Skoromnik O.V. One-dimensional and multi-dimensional integral transforms of Buschman–Erdelyi type with Legendre Functions in kernels. *Transmutation Operators and Applications. Trends in Mathematics.* (2020), 293–319.

2. Папкович М.В., Скоромник О.В. Многомерные модифицированные G -преобразования и интегральные преобразование с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах в весовых пространствах суммируемых функций. *Вестник Витебского государственного университета*. №1 (114) (2022), 5–20.
3. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*. Минск: Наука и техника, 1987.
4. Ситник С.М., Скоромник О.В., Шлапаков С.А. Многомерное общее интегральное преобразование со специальными функциями в ядре. *Вестник Витебского государственного университета*. №3 (104) (2019), 18–27.
5. Kilbas A.A., Srivastava H.M., and Trujillo J.J. *Theory and applications of fractional differential equations*. Elsevier, Amsterdam, 2006.
6. Kilbas A. A., Saigo M. *H-Transforms. Theory and Applications*. Chapman and Hall, Boca Raton, 2004.
7. Kiryakova V. *Generalized Fractional Calculus and Applications*. Wiley and Son., New York, 1994.
8. Prudnikov A.P., Brychkov Yu. A., and Marichev O.I. *Integrals and Series. More Special Functions*. Vol. 3, Gordon and Breach., New York, 1990.
9. Mathai A.M. and Saxena R.K. *The H-Function with Applications in Statistics and other Disciplines*. Halsted Press, Wiley, New York, 1978.
10. Srivastava H.M., Gupta K.C., and Goyal S.L. *The H-function of One and Two Variables with Applications*. South Asian Publishers., New Delhi, 1982.
11. Скоромник О.В. *Интегральные преобразования с функциями Гаусса и Лежандра в ядрах и интегральные уравнения первого рода*. Полоцкий государственный университет, Новополоцк, 2019.
12. Бейтман Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции: в 3 т. – Т.1.: Гипергеометрическая функция Гаусса. Функция Лежандра*. М.: Наука, 1973.
13. Килбас А.А., Скоромник О.В. $L_{\nu,r}$ -теория интегральных преобразований с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах. *Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки*. №3 (2007), 42–50.
14. Kilbas A.A., Skoromnik O.V. Integral transforms with the Legendre function of the first kind in the kernels on $L_{\nu,r}$ -spaces. *Integral Transforms and Special Functions*. Vol. 20, №9 (2009), 653–672.
15. Brychkov Yu. A., Glaeske H.-Y., Prudnikov A. P., and Vu Kim Tuan *Multidimensional Integral Transformations*. Gordon And Breach, Philadelphia, 1992.