

УДК 517.968.21+517.958

О СВЯЗИ МЕЖДУ СВОЙСТВАМИ БЕСКОНЕЧНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ СКАЛЯРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

Н. Н. Роговцов*e-mail:* rogovtsov@bntu.by

В работе кратко описаны основные аналитические свойства бесконечных непрерывных дробей, которые играют ключевую роль в конструктивной теории интегральных скалярных характеристических уравнений теории переноса излучения (РТТ). Установлена связь между дискретными спектрами этих интегральных уравнений и нулями указанных выше дробей. Для каждого приведенного скалярного интегрального характеристического уравнения найдены концы интервалов или отрезков, которые принадлежат интервалу $(-i; i)$ мнимой оси и на которых не могут находиться элементы дискретных спектров.

Ключевые слова: *интегральные скалярные характеристические уравнения; дискретные спектры; бесконечные непрерывные дроби; теория переноса излучения.*

ON RELATION BETWEEN THE PROPERTIES OF INFINITE CONTINUED FRACTIONS AND INTEGRAL SCALAR CHARACTERISTIC EQUATIONS OF RADIATIVE TRANSFER THEORY

N. N. Rogovtsov*e-mail:* rogovtsov@bntu.by

The main analytical properties of the infinite continued fractions which play a key role in the constructive theory of the integral scalar characteristic equations of the transfer theory are briefly described in the article. The relation between discrete spectra of these integral equations and zeros the above-mentioned fractions are installed. The ends of intervals or segments that belong to the interval $(-i, i)$ of the imaginary axis and do not contain elements of discrete spectra are found for each reduced scalar integral characteristic equation.

Keywords: *integral scalar characteristic equations; discrete spectrum; continued fraction; radiative transfer theory.*

Mathematics Subject Classification (2020): Primary 80A21, Secondary 37B10, 45B05.

1. Введение

Впервые однородное интегральное скалярное характеристическое уравнение РТТ было получено в статье [1] при решении частной проблемы теории рассеяния света в мутных (дисперсных) средах. Однако дальнейшее развитие РТТ показало, что значительную часть информации о свойствах решений различных краевых задач (BVPs) для интегро-дифференциального уравнения переноса излучения (RTE) можно извлечь, используя известные качественные и конструктивные математические свойства однородных и неоднородных интегральных скалярных характеристических уравнений РТТ. В частности, на основе общих идей и конструкций метода редукции общих соотношений инвариантности (GIRRM) [2, 3] в работах (см. [3–6] и ссылки в

них) удалось найти целый ряд точных, асимптотических и численных решений канонических и многомерных BVPs для RTE для случаев дисперсных сред различной конфигурации. Ряд важных результатов качественной математической теории этих интегральных скалярных характеристических уравнений был получен в публикациях (см. работы [7–9] и ссылки в них). Однако значительная часть утверждений, сформулированных в этих публикациях является малоприменимой при отыскании аналитических или численных решений BVPs для RTE. Дальнейшему развитию качественной и конструктивной теории таких интегральных уравнений были посвящены работы [5, 6, 10, 11]. В них, в частности, в рамках допущений, при выполнении которых данные уравнения являются уравнениями Фредгольма, были найдены явные аналитические представления для собственных функций, соответствующих элементам дискретных спектров однородных интегральных скалярных характеристических уравнений РТТ, и предложен эффективный алгоритм отыскания этих элементов. Отметим, что в публикациях [3–6, 10, 11] эффективно использовались свойства инвариантности [2], которыми обладают бесконечные непрерывные дроби и бесконечные системы линейных алгебраических уравнений. В данной статье установлены в явной форме ограничения, накладываемые на расположение элементов дискретных спектров указанных выше интегральных уравнений, соответствующих случаям неконсервативного и консервативного рассеяний в дисперсной среде. Сформулированы также утверждения, относящиеся к аналитическим свойствам бесконечных непрерывных дробей, используемых в конструктивной теории интегральных скалярных характеристических уравнений РТТ [5, 6, 10].

2. Интегральные скалярные характеристические уравнения теории переноса излучения

Интегральное скалярное характеристическое уравнение РТТ может быть записано в виде [5]

$$(1 - i\nu\mu) \Phi(\nu; \vec{\Omega}; \omega_0) = \hat{P}(\Phi)(\nu; \vec{\Omega}; \omega_0) + g(\nu; \vec{\Omega}; \omega_0), \quad \vec{\Omega} \in \Omega. \quad (2.1)$$

Здесь i — мнимая единица; ν — заданный или искомый (вещественный или комплексный) параметр; ω_0 — заданный параметр ($\omega_0 \in (0, 1]$); $\Omega = \left\{ \vec{\Omega} \mid \vec{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) = \Omega_1 \vec{e}_1 + \Omega_2 \vec{e}_2 + \Omega_3 \vec{e}_3; \{0; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \text{ — ортонормированный правый репер в трехмерном точечном евклидовом пространстве } \varepsilon_3; \left| \vec{\Omega} \right| = 1 \right\}$ — единичная сфера с центром в точке $0 \in \varepsilon_3$; $\mu = (\vec{\Omega} \cdot \vec{e}_3) = \Omega_3 \in [-1, 1]$; интегральный оператор $\hat{P}$ определяется равенством

$$\hat{P}(\Phi)(\nu; \vec{\Omega}; \omega_0) = \frac{\omega_0}{4\pi} \int_{\Omega} p(\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') \Phi(\nu; \vec{\Omega}'; \omega_0) d\Omega', \quad (2.2)$$

где $p(\mu)$ — фазовая функция, которая почти везде на $[-1, 1]$ неотрицательна и для любого $\vec{\Omega} \in \Omega$; нормирована условием $(4\pi)^{-1} \int_{\Omega} p(\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}') d\Omega' = 1$; $g(\nu; \vec{\Omega}; \omega_0)$ — заданная, а $\Phi(\nu; \vec{\Omega}; \omega_0)$ — искомая функции.

В РТТ исследование уравнения (2.1) обычно сводят к изучению семейства приведенных интегральных скалярных характеристических уравнений. Они имеют такой вид [5]:

$$(1 - i\nu\mu) \Phi_m(\nu; \mu; \omega_0) = \hat{P}_m(\Phi_m)(\nu; \mu; \omega_0) + g_m(\nu; \mu; \omega_0), \quad (2.3)$$

$$\mu \in [-1, 1], m \in Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

Здесь $g_m(\nu; \mu; \omega_0) = \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-im\varphi) g(\nu; \vec{\Omega}; \omega_0) d\varphi$; $\Phi_m(\nu; \mu; \omega_0) = \int_{-\pi}^{\pi} \exp(-im\varphi) \Phi(\nu; \vec{\Omega}; \omega_0) d\varphi$;

$$\hat{P}_m(\Phi_m)(\nu; \mu; \omega_0) = \frac{\omega_0}{2} \int_{-1}^1 P_{|m|}(\mu, \mu') \Phi_m(\nu; \mu'; \omega_0) d\mu';$$

$$P_{|m|}(\mu, \mu') = \sum_{s=|m|}^{+\infty} (2s+1) f_s \frac{(s-|m|)!}{(s+|m|)!} P_{s,|m|}(\mu) P_{s,|m|}(\mu'),$$

где $f_s = 2^{-1} \int_{-1}^1 P_s(\mu) p(\mu) d\mu$. ($P_s(\mu)$ — полином Лежандра s -го порядка; $P_{s,|m|}(\mu)$ — присоединенная функция Лежандра); $\vec{\Omega} = \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_2 + \cos \theta \vec{e}_3$ ($\cos \theta = \mu$, $\sin \theta = \sqrt{1-\mu^2}$). Если фазовая функция $p(\mu) \in L_2(-1, 1)$ и для любых $\mu \in [-1, 1]$ имеет место неравенство $1 - i\nu\mu \neq 0$, то все уравнения (2.1), (2.3) являются уравнениями Фредгольма. Если $\omega_0 \in (0, 1)$, то эти уравнения можно привести к стандартной форме интегральных уравнений Фредгольма [5, 11]. В общем случае, когда $\nu \in \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ — открытая комплексная плоскость), под элементами дискретных и непрерывных спектров в РТТ понимаются значения параметра ν (или параметра $\zeta = -i\nu$), для которых существуют нетривиальные регулярные (обычные) и сингулярные решения уравнений (2.1), (2.3) соответственно. Непрерывные спектры всех уравнений (2.1), (2.3) совпадают с множеством $\tilde{S} = ((-i\infty, -i] \cup [i, i\infty))$ [9, 11]. Дискретные спектры всех уравнений (3), когда $1 - i\nu\mu \neq 0$ для любых $\mu \in [-1, 1]$, могут принадлежать только интервалу $(-i, i)$ [7, 9–11]. Дискретный спектр уравнения (2.1), когда $p(\mu) \in L_2(-1, 1)$, не является пустым множеством и оно может быть только счетным множеством, которое является объединением дискретных спектров всех уравнений (2.3) [7]. Предельными точками указанных выше дискретных спектров могут быть только точки $\nu = \pm i$ [7]. Элементы дискретных спектров могут располагаться только симметрично относительно центра интервала $(-i, i)$ [7, 11].

Для приложений РТТ представляет интерес проблема отыскания по заданной фазовой функции концов интервалов или отрезков, которым не могут принадлежать элементы дискретных спектров уравнений (2.1), (2.3). Необходимость решения этой проблемы возникает, например, при оценке порядков остаточных членов асимптотических решений ВРPs для RTE для случаев оптически толстых дисперсных сред.

3. Об ограничениях, накладываемых на дискретные спектры структурой ядер интегральных скалярных характеристических уравнений и аналитическими свойствами бесконечных непрерывных дробей

В конструктивной теории характеристических уравнений РТТ [5, 6] особую роль играют аналитические свойства следующих бесконечных непрерывных дробей:

$$\begin{aligned} \wp_0(\nu^2; |m|; \omega_0) &= \left[1; \frac{q_0(|m|; \omega_0) \nu^2}{1}, \frac{q_1(|m|; \omega_0) \nu^2}{1}, \dots \right] = 1 + \frac{+ \infty}{K_{n=1}} ((q_{n-1}(|m|; \omega_0) \nu^2) / 1) = \\ &= 1 + \frac{q_0(|m|; \omega_0) \nu^2}{1 + \frac{q_1(|m|; \omega_0) \nu^2}{1 + \dots}}; \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\wp_2(\nu^2; 0; 1) = \left[1; \frac{q_2(0; 1) \nu^2}{1}, \frac{q_3(0; 1) \nu^2}{1}, \dots \right] = 1 + \frac{+ \infty}{K_{n=1}} ((q_{n+1}(0; 1) \nu^2) / 1). \quad (3.2)$$

Здесь $(|m|, \omega_0) \in Q = (N_0 \times (0, 1)) \cup (N \times (0, 1])$, где $N = N_0 \setminus \{0\}$;
 $q_l(|m|; \omega_0) = (l+1)(l+1+2|m|)(\chi_l^\times(|m|; \omega_0)\chi_{l+1}^\times(|m|; \omega_0))^{-1}$,
 где $\chi_l^\times(|m|; \omega_0) = (2(l+|m|)+1)(1-\omega_0 f_{l+|m|})$. В [5, 6, 11] было доказано, что для случая неконсервативного рассеяния ($\omega_0 \in (0, 1)$) соответствующий индексу $|m|$ дискретный спектр уравнения из семейства (2.3) совпадает со множеством нулей бесконечной непрерывной дроби $\wp_0(\nu^2; |m|; \omega_0)$. Если $\omega_0 = 1$ (рассеяние консервативно), то в [5] было установлено, что дискретный спектр уравнения из семейства (2.3), соответствующего индексу $|m| = 0$, является объединением элемента $\{0\}$ и множества нулей бесконечной непрерывной дроби (3.2). Все нули дробей (3.1), (3.2) принадлежат интервалу $(-i, i)$ [5, 6, 11]. В силу этого в (2.1), (2.3) можно заменить параметр ν на величину $\zeta = -i\nu$ ($\zeta \in (-1, 1)$). Имеет место

Лемма 3.1. Пусть $p(\mu) \in L_2(-1, 1)$, $\nu = i\zeta$, $\zeta \in [-\Delta, \Delta] \subset (-1, 1)$, $\|\hat{K}_{|m|}\|_{L_2(-1, 1)}$ — норма соответствующего индексу m интегрального оператора уравнения из семейства (2.3) в классе $L_2(-1, 1)$. Тогда для любого $|m| \in N_0$ верно неравенство

$$\|\hat{K}_{|m|}\|_{L_2(-1, 1)} \leq \omega_0(1-\Delta)^{-1} \left[\sum_{l=|m|}^{+\infty} f_l^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.3)$$

в котором числовой ряд сходится.

Из леммы 3.1, принадлежности элементов дискретных спектров уравнений (2.1), (2.3) только интервалу $(-i, i)$ и принципа сжимающих отображений следует, что верна

Теорема 3.1. Допустим, что $p(\mu) \in L_2(-1, 1)$ и $\omega_0 \in (0, 1]$. Тогда для любого $\Delta \in (0, 1)$ существует такое конечное число $m_0(\Delta; \omega_0) \in N_0$, что для любых $|m| \geq m_0(\Delta; \omega_0)$ однородные аналоги интегральных уравнений из семейства (3) не имеют нетривиальных решений в $L_2(-1, 1)$ на отрезке $[-i\Delta, i\Delta]$. При этом такие решения могут существовать только на подмножестве $(-i, -i\Delta) \cup (i\Delta, i)$ множества $\mathbb{C}$.

С использованием леммы 3.1 и теорем 2, 3, 7, 12 и формулы (17) из статей [5, 6] устанавливается, что справедливо

Следствие 3.1. Предположим, что $p(\mu) \in L_2(-1, 1)$, пара $(|m|, \omega_0) \in Q = (N_0 \times (0, 1)) \cup (N \times (0, 1])$, $\Delta \in (0, 1)$ и $m_0(\Delta; \omega_0)$ — число, принадлежащее N_0 и удовлетворяющее неравенству $\Delta < 1 - \omega_0 \left[\sum_{l=m_0(\Delta; \omega_0)}^{+\infty} f_l^2 \right]^{\frac{1}{2}}$. Тогда для любого $|m| \geq m_0(\Delta; \omega_0)$ бесконечная непрерывная дробь $\wp_0(\nu^2; |m|; \omega_0)$ не имеет нулей относительно параметра ν на отрезке $[-i\Delta, i\Delta]$. При этом для любых $|m| \geq m_0(\Delta; \omega_0)$ бесконечные непрерывные дроби $(\wp_0(\nu^2; |m|; \omega_0))^{-1}$ являются аналитическими функциями на множестве $\mathbb{C} \setminus ((-i\infty, -i\Delta] \cup [i\Delta, +i\infty))$.

Обозначим символом $\tilde{m}_0(\omega_0)$ наименьшее число из множества N_0 , удовлетворяющее неравенству $0 < \tilde{\Delta}(\tilde{m}_0(\omega_0)) = 1 - \omega_0 \left[\sum_{l=\tilde{m}_0(\omega_0)}^{+\infty} f_l^2 \right]^{\frac{1}{2}}$, где $\omega_0 \in (0, 1]$. В силу сходимости ряда $\sum_{l=0}^{+\infty} f_l^2$ такое наименьшее число всегда существует, если $p(\mu) \in L_2(-1, 1)$.

Замечание 3.1. Если $p(\mu) \in L_2(-1, 1)$ и $\omega_0 \in (0, 1]$, то для любых $(|m|, \nu) \in \{\tilde{m}_0(\omega_0), \tilde{m}_0(\omega_0) + 1, \dots\} \times (-i\tilde{\Delta}(\tilde{m}_0(\omega_0)), i\tilde{\Delta}(\tilde{m}_0(\omega_0)))$ однородные аналоги интегральных уравнений из семейства (2.3) не имеют нетривиальных решений в классе $L_2(-1, 1)$, а дроби $\wp_0(\nu^2; |m|; \omega_0)$ не имеют нулей. При этом бесконечные непрерывные дроби $(\wp_0(\nu^2; |m|; \omega_0))^{-1}$ являются аналитическими функциями на множестве $\mathbb{C} \setminus ((-i\infty, -i\tilde{\Delta}(\tilde{m}_0(\omega_0))] \cup [i\tilde{\Delta}(\tilde{m}_0(\omega_0)), +i\infty))$.

Из условия нормировки фазовой функции $p(\mu)$ из класса $L_2(-1, 1)$ следует, что верно

Замечание 3.2. Пусть $p(\mu)$ — фазовая функция из класса $L_2(-1, 1)$. Тогда при $\omega_0 = 1$ число $\tilde{m}_0(1)$ не может равняться нулю. Если $\omega_0 \in (0, 1)$, то число $\tilde{m}_0(\omega_0)$ может быть равным нулю, когда выполнено неравенство $\omega_0 < \left[\sum_{l=0}^{+\infty} f_l^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$. При выполнении данного неравенства все бесконечные непрерывные дроби $\wp_0(\nu^2; |m|; \omega_0)$, когда $|m| \in N_0$, не имеют нулей на $(-i\tilde{\Delta}(0), i\tilde{\Delta}(0))$.

Для приложений РТТ представляет особый интерес анализ ситуаций, когда $\tilde{m}_0(\omega_0) \in N$ и $m \in \{0, \dots, \tilde{m}_0(\omega_0) - 1\}$. Имеет место

Теорема 3.2. Допустим, что фазовая функция $p(\mu) \in L_2(-1, 1)$, $(m, \omega_0) \in Q$, $f^* = \sup_{l \in N} \{|f_l|\}$, $f^{**} = \sup_{l \in \{2, 3, \dots\}} \{|f_l|\}$, $f^{***} = \sup_{l \in \{3, 4, \dots\}} \{|f_l|\}$. Тогда будут верны такие утверждения:

- 1) если $\tilde{m}_0(\omega_0) \in N$, $m = 0$, то бесконечная непрерывная дробь $\wp_0(\nu^2; 0; \omega_0)$ не имеет нулей на отрезке $[-ia_1, ia_1]$, где $a_1 = \frac{1}{4} \sqrt{3(1 - \omega_0)(1 - \omega_0 f^*)(\tilde{m}_0(\omega_0))^{-1}}$;
- 2) если $\tilde{m}_0(\omega_0) \in \{2, 3, \dots\}$, $m \in \{1, \dots, \tilde{m}_0(\omega_0) - 1\}$, то дроби $\wp_0(\nu^2; m; \omega_0)$ не имеют нулей на отрезке $[-ia_2, ia_2]$, где $a_2 = \frac{1}{4} \sqrt{3(1 - \omega_0 f^*)(1 - \omega_0 f^{**})(\tilde{m}_0(\omega_0))^{-1}}$;
- 3) бесконечная непрерывная дробь $\wp_2(\nu^2; 0; 1)$ не имеет нулей на отрезке $[-ia_3, ia_3]$, где $a_3 = \frac{2}{3} \sqrt{(1 - f^{**})(1 - f^{***})}$;
- 4) бесконечные непрерывные дроби $(\wp_0(\nu^2; 0; \omega_0))^{-1}$, $(\wp_0(\nu^2; m; \omega_0))^{-1} \Big|_{\substack{\tilde{m}_0(\omega_0) \in N \setminus \{1\} \\ m \in \{1, \dots, \tilde{m}_0(\omega_0) - 1\}}}$, $(\wp_2(\nu^2; 0; 1))^{-1}$ являются аналитическими функциями соответственно на множествах $\mathbb{C} \setminus ((-i\infty, -ia_1] \cup [ia_1, +i\infty))$, $\mathbb{C} \setminus ((-i\infty, -ia_2] \cup [ia_2, +i\infty))$, $\mathbb{C} \setminus ((-i\infty, -ia_3] \cup [ia_3, +i\infty))$.

Доказательство. Положим, $\nu = i\zeta$ ($\zeta \in (-1, 1)$) и рассмотрим бесконечную непрерывную дробь $(-\frac{1}{4}\zeta^2 / \wp_0(-\zeta^2; 0; \omega_0))$. Согласно теореме Ворпицкого [12] эта дробь будет сходиться к конечному пределу, если будут верны все неравенства $|\frac{1}{4}\zeta^2| \leq \frac{1}{4}$, $|q_{n-2}(0; \omega_0)\zeta^2| \leq \frac{1}{4}$ ($n \in \{2, 3, \dots\}$). Поскольку $\zeta \in (-1, 1)$, то первое неравенство выполняется автоматически. Для выполнения всех остальных неравенств следует считать, что $|\zeta| \leq \frac{1}{2}[q_l(0; \omega_0)]^{-\frac{1}{2}}$ для любых $l \in N_0$. Используя определение величин $q_l(0; \omega_0)$ и произведя нижние оценки правых частей всех этих неравенств, получим, что для всех $l \in N_0$ имеет место оценка $a_1 \leq \frac{1}{2}[q_l(0; \omega_0)]^{-\frac{1}{2}}$. Следовательно, если считать, что $\zeta \in [-a_1, a_1]$, то бесконечная непрерывная дробь $(\frac{1}{4}\nu^2 / \wp_0(\nu^2; 0; \omega_0))$ на отрезке $[-ia_1, ia_1]$ будет сходиться к конечному пределу. В силу этого бесконечная непрерывная дробь $\wp_0(\nu^2; 0; \omega_0)$ на отрезке $[-ia_1, ia_1]$ не будет иметь нулей (если $\nu = 0$ и $\omega_0 \in (0, 1)$, то $\wp_0(0; 0; \omega_0) = 1$). Доказательства справедливости утверждений 2), 3) проводятся аналогичным образом. Верность утверждения 4) следует из истинности утверждений 1), 2), 3) и теоремы 6 из статьи [5]. Теорема доказана.

При корректном вычислении бесконечных непрерывных дробей, которые используются в конструктивной теории интегральных скалярных характеристических уравнений [5, 6], необходимо принимать во внимание аналитические свойства бесконечных непрерывных дробей $\wp_0(\nu^2; m; 0) = \left[1; \frac{q_0(m; 0)\nu^2}{1}, \frac{q_1(m; 0)\nu^2}{1}, \dots\right]$, которые для любых $m \in N_0$ совпадают с (3.1) при формальной замене в них величины ω_0 на нуль. Имеет место

Теорема 3.3. Для любого конечного $m \in N_0$ бесконечные непрерывные дроби $\wp_0(\nu^2; m; 0)$, $(\wp_0(\nu^2; m; 0))^{-1}$ являются аналитическими функциями на множестве $\mathbb{C} \setminus ((-i\infty, -i] \cup [i, +i\infty))$.

Справедливость теоремы устанавливается посредством использования теоремы 12 из статьи [6] и равенства $\int_{-1}^1 (1 - i\nu\mu)^{-1} P_{m,m}^2(\mu) d\mu = 2(2m)!((2m+1)\wp_0(\nu^2; m; 0))^{-1}$.

Литература

1. Амбарцумян В.А. Новый способ расчета рассеяния света в мутной среде. *Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз.* No. 3 (1942), 97.
2. Роговцов Н.Н. *Свойства и принципы инвариантности. Приложение к решению задач математической физики. Ч.1.* Минск: МО РБ, БГПА, 1999.
3. Rogovtsov N.N. General Invariance Relations Reduction Method and Its Applications to Solutions of Radiative Transfer for Turbid Media of Various Configurations. In: *Light Scattering Reviews*/Ed. Kokhanovsky A.A. Chichester: Springer-Praxis. Vol. 5, 2010, 249–327.
4. Rogovtsov N.N., Borovik F.N. Applications of General Invariance Relations Reduction. Method to Solution of Radiation Transfer Problems. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. Vol. 183, 2016, 128–153.
5. Rogovtsov N.N. Constructive Theory of Scalar Characteristics Equations of Theory of Radiation Transport: I. Basic Assertions of the Theory and Conditions for the Applicability of the Truncation Method. *Differential Equations*. Vol. 51, №2, 2015, 268–281.
6. Rogovtsov N.N. Constructive Theory of Scalar Characteristics Equations of Theory of Radiation Transport: II. Algorithms for Finding Solutions and Their Analytic Representations. *Differential Equations*. Vol. 51, №5, 2015, 661–673.
7. Масленников М.А. Проблема Милна с анизотропным рассеянием. *Тр. Мат. ин-та АН СССР*. Т. 47, (1968), 3–132.
8. Фельдман И.А. О дискретном спектре характеристического уравнения теории переноса излучения. *Математические исследования, Кишинев*. Т. 10, No. 1(35) (1975), 236–243.
9. Гермогенова Т.А., Шулая Д.А. О характеристическом уравнении теории переноса излучения. *Доклады АН СССР*. Т. 231, No. 4 (1976), 841–844.
10. Роговцов Н.Н. О решении характеристического уравнения теории переноса излучения в замкнутой форме. В: *Труды международной конференции. Краевые задачи, специальные функции и дробное исчисление / Под ред. Килбаса А.А. Минск.* (1996), 305–312.
11. Rogovtsov N.N., Borovik F.N. The Characteristic Equation of Radiative Transfer Theory. In: *Light Scattering Reviews*/Ed. Kokhanovsky A.A. Chichester: Springer-Praxis. Vol. 4, 2009, 347–429.
12. Джозунс У., Трон В. *Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения.* М.: Мир, 1985.