

УДК 519.876.2

РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДОВ ДЕКОМПОЗИЦИИ В ЗАДАЧЕ ОЦЕНКИ ПОТОКА НА НЕНАБЛЮДАЕМОЙ ЧАСТИ ДВУНАПРАВЛЕННОЙ СЕТИ

Л. А. Пилипчук¹, М. П. Романчук²*e-mail:* ¹pilipchuk@bsu.by, ²romanchump@bsu.by

Задача минимизации размера множества M обозреваемых узлов сети с целью локализации специальных программируемых устройств (сенсоров) для сбора необходимой информации о функции потока относится к классу NP-полных задач. Поиск оптимального решения с применением стратегий полного перебора сенсорных конфигураций узлов исследуемого класса NP-полных задач потребует огромных вычислительных затрат. Для больших сетей актуальной прикладной проблемой является поиск приемлемого числа обозреваемых узлов, что гарантировало бы ее полную наблюдаемость (субоптимальное решение). В работе рассматривается численная реализация методов декомпозиции построения оптимального решения в задаче оценки потока на ненаблюдаемой части двунаправленной сети.

Ключевые слова: *граф; поток; разреженная линейная система; декомпозиция; моделирование; сенсорная конфигурация узлов; оптимальное решение; вычислительные эксперименты.*

IMPLEMENTATION OF DECOMPOSITION METHODS IN THE FLOW ESTIMATION PROBLEM ON THE UNOBSERVED PART OF A BIDIRECTIONAL NETWORK

L. A. Pilipchuk¹, M. P. Romanchuk²*e-mail:* ¹pilipchuk@bsu.by, ²romanchump@bsu.by

The problem of minimization of the size of the set M for surveyed nodes in order to localize special programmable devices (sensors) to collect necessary information about the flow function belongs to the class of NP-complete problems. Determination of the optimal solution using the full brute-force strategies of sensor node configurations of the investigated class of NP-complete problems requires enormous computational cost. For large networks, a relevant applied problem is to find an acceptable number of the observable nodes that would guarantee its complete observability (suboptimal solution). In this paper we consider the numerical implementation of decomposition methods for construction of an optimal solution in the flow estimation problem on the unobserved part of a bidirectional network.

Keywords: *graph; flow; sparse linear system; decomposition; modelling; sensor nodes configuration; optimal solution; computational experiments.*

Mathematics Subject Classification (2020): Primary 05C82, 68Q06, Secondary 49L25, 90C35.

1. Введение

Для задач управления потоками и их контроля в сетях неотъемлемой составляющей является проектирование стратегий расположения специальных программируемых устройств (сенсоров). Технологии коммуникации позволяют получить информацию о потоках в больших сетях с помощью сенсоров и видеокамер для относительно незначительной части сети. Особую важность имеет разработка оптимальных стратегий расположения минимального количества

сенсоров в узлах сети для сбора частичной информации о функции потока. На основании анализа и использования полученных данных рассматривается возможность оценки потоков в той части сети, которая непосредственно не наблюдается. Задача моделирования процессов оценки потоков на ненаблюдаемой части может быть представлена в виде недоопределенной системы линейных алгебраических уравнений, где совокупность переменных соответствует неизвестным дуговым потокам и переменным интенсивностям узлов, а совокупность уравнений – условиям баланса. Решение системы линейных алгебраических уравнений определяет численные значения потоков на ненаблюдаемой части исходной сети. Это означает, что все потоки известны, т.е. сеть полностью наблюдаема.

В [1] доказано, что задача идентификации минимального числа датчиков и их конфигураций является NP-полной. В последние несколько лет проблема расположения сенсоров для мониторинга потоков в сети была объектом растущего интереса в связи с ее актуальностью в области контроля и управления движением. С ростом размерности сети стратегии полного перебора для определения оптимальных конфигураций обозреваемых узлов NP-полных задач данного класса оказываются неприемлемыми. В этом контексте первостепенное значение имеет разработка новых подходов и стратегий определения местоположения датчиков, развитие технологий и алгоритмов численного решения разреженных систем линейных алгебраических уравнений. В [2], [3] представлены эффективные алгоритмы и технологии численного решения исследуемой задачи.

2. Исследование разреженных систем в задаче идентификации сенсорных конфигураций узлов для оценки потоков на ненаблюдаемой части сети

Необходимо установить сенсоры в определенные (обозреваемые) узлы для сбора информации о функции потока, которая бы гарантировала полную наблюдаемость сети. В результате обработки информации от установленных в обозреваемые узлы сенсоров получена специальная разреженная система линейных алгебраических уравнений, единственность решения которой гарантирует полную наблюдаемость сети.

Пусть задан ориентированный конечный связный двунаправленный граф $G = (I, U)$. Множество дуг U задано на $I \times I$ ($|I| < \infty, |U| < \infty$). Объект исследования — разреженная система линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j \in I_i^+(U)} x_{i,j} - \sum_{j \in I_i^-(U)} x_{j,i} = \begin{cases} 0, & i \in I \setminus I^*, \\ x_i \text{sign}(i), & i \in I^*. \end{cases} \quad (1)$$

$$\sum_{(i,j) \in U} \lambda_{i,j}^p x_{i,j} + \sum_{i \in I^*} \lambda_i^p x_i = \beta_p, p = \overline{1, q}. \quad (2)$$

где $I_i^+(U) = \{j \in I : (i, j) \in U\}$, $I_i^-(U) = \{j \in I : (j, i) \in U\}$, $x_{i,j}$ — величина потока вдоль дуги (i, j) . Узлы $i \in I^*$ — узлы с переменным внешним потоком x_i , $\text{sign}(i) = \begin{cases} 1, & i \in I_+^*, \\ -1, & i \in I_-^*. \end{cases}$ Матрица системы (1)–(2) имеет структуру вида:

$$A = \begin{bmatrix} M & B \\ Q & T \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Матрица M — матрица с блочно-диагональной структурой размера $|I| \times |U|$ ориентированного графа $G = (I, U)$; Q — матрица размера $q \times |U|$ с элементами $\lambda_{i,j}^p, (i, j) \in U, p = \overline{1, q}$. Матрица B — разреженная матрица размера $|I| \times |I^*|$. Матрица содержит в столбце j ненулевой элемент равный $-\text{sign}(i)$ в строке i для всех $j \in I^*$, остальные элементы равны нулю, $i \in I$. T — матрица размера $q \times |I^*|$ состоит из элементов $\lambda_i^p, i \in I^*, p = \overline{1, q}$.

Если ранг матрицы A системы (1)–(2) равен $|I|+q$, а также выполняется неравенство $|I|+q < |U| + |I^*|$, то система (1)–(2) является недоопределенной системой линейных алгебраических уравнений.

3. Недоопределенная разреженная линейная система

Проанализируем работу алгоритма декомпозиции системы (1)–(2) для оценки потоков в сети, на примере двунаправленного орграфа $G = (I, U)$, $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $U = \{(1, 2), (2, 1), (1, 5), (1, 5), (2, 5), (5, 2), (6, 4), (4, 6), (9, 6), (6, 9), (9, 5), (5, 9), (9, 2), (2, 9), (3, 5), (5, 3)\}$, $I^* = \{2, 3, 7, 8\}$ (см. рисунок 1).

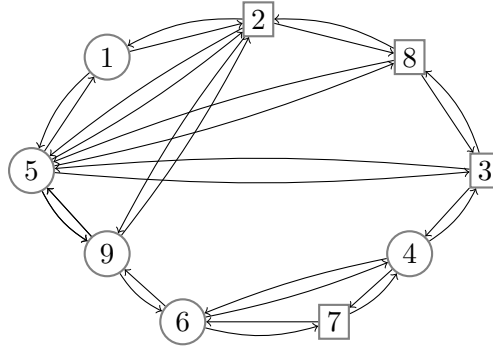


Рис. 1: Двунаправленный орграф $G = (I, U)$

На рисунке 1 узлы с переменным внешним потоком $x_i, i \in I^*$ помечены квадратами.

Положим множество обозреваемых узлов $M = \{9\}$. Удалим из G узел $i = 9$ (см. рисунок 2), Построим разрез $CC(M) = \{(6, 9), (9, 6), (5, 9), (9, 5), (2, 9), (9, 2)\}$, найдем $I(CC(M)) = \{2, 5, 6, 9\}$, построим $M^+ = I(CC(M)) \setminus M = \{2, 5, 6\}$, сформируем множества $M^* = M \cup M^+ = \{2, 5, 6, 9\}$ и $\bar{I} = I \setminus M^* = \{1, 3, 4, 7, 8\}$ [2]. Удалим дуги, исходящие из узлов $i \in M^+$, т. к. поток на них известен [2] и получим орграф $\bar{G} = (\bar{I}, \bar{U})$ — ненаблюдаемую часть орграфа G , $\bar{I} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $\bar{U} = \{(1, 2), (1, 5), (3, 4), (3, 5), (3, 8), (4, 3), (4, 6), (4, 7), (7, 4), (7, 6), (8, 2), (8, 3), (8, 5)\}$ (см. рисунок 3).

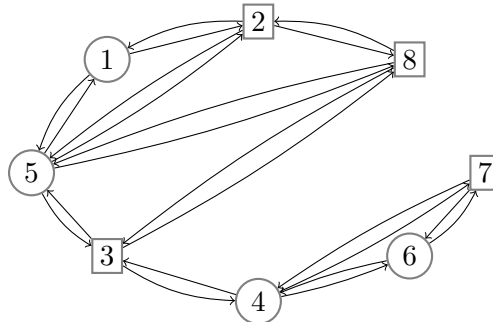


Рис. 2: Орграф после удаления обозреваемого узла $M = \{9\}$ и соответствующих входящих и исходящих дуг из узла $i = 9$

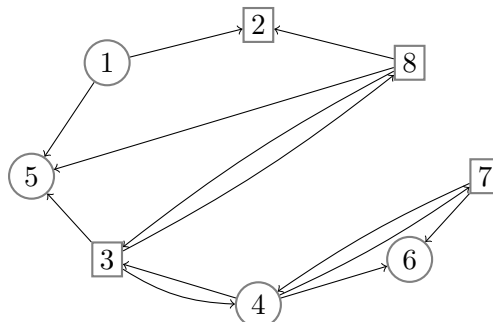


Рис. 3: Орграф $\bar{G}$ — ненаблюдаемая часть орграфа G

К орграфу $\bar{G}$ добавим фиктивный узел ξ и дуги $(\xi, 2)$, $(\xi, 3)$, $(\xi, 7)$, $(\xi, 8)$, получим $\hat{G} = (\hat{I}, \hat{U})$ и построим опору (остовное дерево) T графа $\hat{G}$ для системы вида (1) при $I^* = \emptyset$ [2] (на рисунке 4 опора полученного орграфа отмечена жирными дугами).

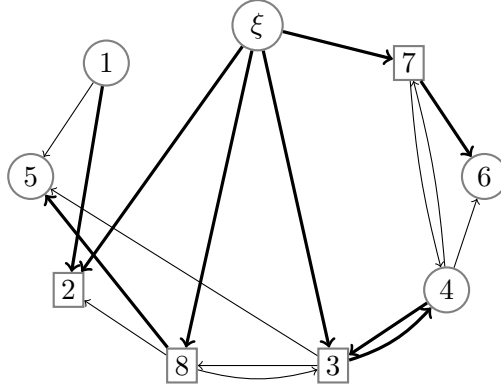


Рис. 4: Орграф $\hat{G}$ с помеченной опорой для системы (1) при $I^* = \emptyset$

Для опоры T (покрывающее дерево графа $\hat{G}$ [2]) выберем узел ξ в качестве корня и построим корневые и вспомогательные структуры для представления корневого дерева в памяти компьютера (см. таблицу 1).

Таблица 1. Корневые структуры для хранения покрывающего дерева T графа $\hat{G}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	ξ
$pred[i]$	2	ξ	ξ	3	8	7	ξ	ξ	0
$dir[i]$	-1	1	1	1	1	1	1	1	0
$depth[i]$	2	1	1	2	2	2	1	1	0
$d[i]$	8	1	4	7	3	ξ	6	5	2

Для орграфа $\hat{G}$ вычислим правую часть $a_i, i \in \bar{I}$ и представим преобразованную систему уравнений баланса:

$$\begin{aligned}
 -x_{1,2} - x_{1,5} &= -\frac{f_{2,9}p_{2,1}}{p_{2,9}} - \frac{f_{5,9}p_{5,1}}{p_{5,9}}, \\
 x_{\xi,2} + x_{1,2} + x_{8,2} &= \frac{f_{2,9}(p_{2,1} + p_{2,5} + p_{2,8} + p_{2,9})}{p_{2,9}} - \frac{f_{5,9}p_{5,2}}{p_{5,9}} - f_{9,2}, \\
 x_{1,5} + x_{3,5} + x_{8,5} &= \frac{f_{5,9}(p_{5,1} + p_{5,2} + p_{5,3} + p_{5,8} + p_{5,9})}{p_{5,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,5}}{p_{2,9}} - f_{9,5}, \\
 x_{\xi,8} + x_{3,8} - x_{8,2} - x_{8,3} - x_{8,5} &= -\frac{f_{2,9}p_{2,8}}{p_{2,9}} - \frac{f_{5,9}p_{5,8}}{p_{5,9}}, \\
 x_{\xi,3} - x_{3,4} - x_{3,5} - x_{3,8} + x_{4,3} + x_{8,3} &= -\frac{f_{5,9}p_{5,3}}{p_{5,9}}, \\
 x_{3,4} - x_{4,3} - x_{4,6} - x_{4,7} + x_{7,4} &= -\frac{f_{6,9}p_{6,4}}{p_{6,9}}, \\
 x_{\xi,7} + x_{4,7} - x_{7,4} - x_{7,6} &= -\frac{f_{6,9}p_{6,7}}{p_{6,9}}, \\
 x_{4,6} + x_{7,6} &= \frac{f_{6,9}(p_{6,4} + p_{6,7} + p_{6,9})}{p_{6,9}} - f_{9,6}, \\
 -x_{\xi,2} - x_{\xi,3} - x_{\xi,7} - x_{\xi,8} &= -f_{2,9} - f_{5,9} - f_{6,9} + f_{9,2} + f_{9,5} + f_{9,6}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Положим неопорные потоки равными 0 и построим частное решение $\tilde{x} = (\tilde{x}_{i,j}, i, j \in \hat{U})$ системы (4):

$$\begin{aligned}
& \tilde{x}_{1,5} \rightarrow 0, \tilde{x}_{3,5} \rightarrow 0, \tilde{x}_{3,8} \rightarrow 0, \tilde{x}_{4,3} \rightarrow 0, \tilde{x}_{4,6} \rightarrow 0, \tilde{x}_{4,7} \rightarrow 0, \\
& \tilde{x}_{7,4} \rightarrow 0, \tilde{x}_{8,2} \rightarrow 0, \tilde{x}_{8,3} \rightarrow 0, \tilde{x}_{1,2} \rightarrow \frac{f_{2,9}p_{2,1}}{p_{2,9}} + \frac{f_{5,9}p_{5,1}}{p_{5,9}}, \\
& \tilde{x}_{3,4} \rightarrow -\frac{f_{6,9}p_{6,4}}{p_{6,9}}, \tilde{x}_{7,6} \rightarrow \frac{f_{6,9}(p_{6,4} + p_{6,7} + p_{6,9})}{p_{6,9}} - f_{9,6}, \\
& \tilde{x}_{8,5} \rightarrow \frac{f_{5,9}(p_{5,1} + p_{5,2} + p_{5,3} + p_{5,8} + p_{5,9})}{p_{5,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,5}}{p_{2,9}} - f_{9,5}, \\
& \tilde{x}_{9,2} \rightarrow \frac{f_{2,9}(p_{2,1} + p_{2,5} + p_{2,8} + p_{2,9})}{p_{2,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,1}}{p_{2,9}} - \frac{f_{5,9}p_{5,1}}{p_{5,9}} - \frac{f_{5,9}p_{5,2}}{p_{5,9}} - f_{9,2}, \\
& \tilde{x}_{9,3} \rightarrow -\frac{f_{5,9}p_{5,3}}{p_{5,9}} - \frac{f_{6,9}p_{6,4}}{p_{6,9}}, \tilde{x}_{9,7} \rightarrow \frac{f_{6,9}(p_{6,4} + p_{6,7} + p_{6,9})}{p_{6,9}} - \frac{f_{6,9}p_{6,7}}{p_{6,9}} - f_{9,6}, \\
& \tilde{x}_{9,8} \rightarrow \frac{f_{5,9}(p_{5,1} + p_{5,2} + p_{5,3} + p_{5,8} + p_{5,9})}{p_{5,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,5}}{p_{2,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,8}}{p_{2,9}} - \frac{f_{5,9}p_{5,8}}{p_{5,9}} - \\
& \quad - f_{9,5}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Построим характеристические векторы $\delta_{ij}(\tau, \rho)$ (см. таблицу 2) в том числе и для дуг, инцидентных узлу ξ (см. таблицу 3). Система характеристических векторов представляет собой базис пространства решений [2] однородной системы, порожденной из системы (4).

Таблица 2. Характеристические векторы

	$\delta_{1,2}$	$\delta_{1,5}$	$\delta_{8,2}$	$\delta_{3,4}$	$\delta_{4,3}$	$\delta_{3,8}$	$\delta_{8,3}$	$\delta_{4,7}$	$\delta_{7,4}$	$\delta_{8,5}$	$\delta_{7,6}$	$\delta_{4,6}$	$\delta_{3,5}$
(1,5)	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0
(8,2)	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(4,3)	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
(3,8)	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
(8,3)	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
(4,7)	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
(7,4)	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
(4,6)	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	1	0
(3,5)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1

Таблица 3. Характеристические векторы для дуг, инцидентных ξ

	$\delta_{\xi,2}$	$\delta_{\xi,3}$	$\delta_{\xi,7}$	$\delta_{\xi,8}$
(1,5)	1	0	0	-1
(8,2)	-1	0	0	1
(4,3)	0	0	0	0
(3,8)	0	1	0	-1
(8,3)	0	-1	0	1
(4,7)	0	1	-1	0
(7,4)	0	-1	1	0
(4,6)	0	1	-1	0
(3,5)	0	1	0	-1

Построим общее решение однородной системы, порожденной системой (4):

$$\begin{aligned}
x_{1,2} & \rightarrow \frac{f_{2,9}p_{2,1}}{p_{2,9}} + \frac{f_{5,9}p_{5,1}}{p_{5,9}} - x_{1,5}, \\
x_{3,4} & \rightarrow -\frac{f_{6,9}p_{6,4}}{p_{6,9}} + x_{4,3} + x_{4,6} + x_{4,7} - x_{7,4}, \\
x_{8,5} & \rightarrow \frac{f_{5,9}(p_{5,1} + p_{5,2} + p_{5,3} + p_{5,8} + p_{5,9})}{p_{5,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,5}}{p_{2,9}} - f_{9,5} - x_{1,5} - x_{3,5}, \\
x_{7,6} & \rightarrow \frac{f_{6,9}(p_{6,4} + p_{6,7} + p_{6,9})}{p_{6,9}} - f_{9,6} - x_{4,6},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{\xi,2} &\rightarrow \frac{f_{2,9}(p_{2,1} + p_{2,5} + p_{2,8} + p_{2,9})}{p_{2,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,1}}{p_{2,9}} - \frac{f_{5,9}p_{5,1}}{p_{5,9}} - \frac{f_{5,9}p_{5,2}}{p_{5,9}} - \\
&\quad - f_{9,2} + x_{1,5} - x_{8,2}, \\
x_{\xi,3} &\rightarrow -\frac{f_{5,9}p_{5,3}}{p_{5,9}} - \frac{f_{6,9}p_{6,4}}{p_{6,9}} + x_{3,5} + x_{3,8} + x_{4,6} + x_{4,7} - x_{7,4} - x_{8,3}, \\
x_{\xi,7} &\rightarrow \frac{f_{6,9}(p_{6,4} + p_{6,7} + p_{6,9})}{p_{6,9}} - \frac{f_{6,9}p_{6,7}}{p_{6,9}} - f_{9,6} - x_{4,6} - x_{4,7} + x_{7,4}, \\
x_{\xi,8} &\rightarrow \frac{f_{5,9}(p_{5,1} + p_{5,2} + p_{5,3} + p_{5,8} + p_{5,9})}{p_{5,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,5}}{p_{2,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,8}}{p_{2,9}} - \\
&\quad - \frac{f_{5,9}p_{5,8}}{p_{5,9}} - f_{9,5} - x_{1,5} - x_{3,5} - x_{3,8} + x_{8,2} + x_{8,3}
\end{aligned}$$

Система дополнительных уравнений [2] имеет вид:

$$\begin{aligned}
x_{1,2} - \frac{p_{1,5}x_{1,5}}{p_{1,2}} = 0, \quad x_{3,4} - \frac{p_{3,8}x_{3,8}}{p_{3,4}} = 0, \quad x_{3,4} - \frac{p_{3,5}x_{3,5}}{p_{3,4}} = 0, \\
x_{4,3} - \frac{p_{4,7}x_{4,7}}{p_{4,3}} = 0, \quad x_{4,3} - \frac{p_{4,6}x_{4,6}}{p_{4,3}} = 0, \quad x_{7,4} - \frac{p_{7,6}x_{7,6}}{p_{7,4}} = 0, \\
x_{8,2} - \frac{p_{8,3}x_{8,3}}{p_{8,2}} = 0, \quad x_{8,2} - \frac{p_{8,5}x_{8,5}}{p_{8,2}} = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Запишем матрицу Λ системы (6):

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\frac{p_{1,5}}{p_{1,2}} - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{p_{3,8}}{p_{3,4}} & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -\frac{p_{3,5}}{p_{3,4}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{p_{4,7}}{p_{4,3}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{p_{4,6}}{p_{4,3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{p_{7,6}}{p_{7,4}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{p_{8,3}}{p_{8,2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{p_{8,5}}{p_{8,2}} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{p_{8,5}}{p_{8,2}} \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\text{rank}(\Lambda) = 8$, число неопорных дуг равно 9, то система недоопределена. Выберем дуги

$$\widehat{U}_W = \{(1, 5), (8, 2), (4, 3), (3, 8), (8, 3), (4, 7), (7, 4), (4, 6)\},$$

тогда $\widehat{U}_{-T} \setminus \widehat{U}_W = \{(3, 5)\}$. Таким образом

$$\Lambda_W = \begin{pmatrix} -\frac{p_{1,5}}{p_{1,2}} - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{p_{3,8}}{p_{3,4}} & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -\frac{p_{3,5}}{p_{3,4}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{p_{4,7}}{p_{4,3}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{p_{4,6}}{p_{4,3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{p_{7,6}}{p_{7,4}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{p_{8,3}}{p_{8,2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{p_{8,5}}{p_{8,2}} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{p_{8,5}}{p_{8,2}} \end{pmatrix},$$

определитель матрицы Λ_W равен

$$\det(\Lambda_W) = \frac{(p_{1,2} + p_{1,5})p_{3,8}(p_{4,6}p_{4,7}p_{7,4} + p_{4,3}(p_{4,6}p_{7,4} + p_{4,7}(p_{7,4} + p_{7,6})))p_{8,3}}{p_{1,2}p_{3,4}p_{4,3}^2p_{7,4}p_{8,2}}.$$

Т.к. $p_{ij} > 0$, то в выражении $\det(\Lambda_W)$ все слагаемые строго положительны, следовательно, $\det(\Lambda_W) \neq 0$, значит, матрица Λ_W – невырожденная.

Вычислим правую часть β :

$$\beta = \begin{pmatrix} -\frac{f_{2,9}p_{2,1}}{p_{2,9}} - \frac{f_{5,9}p_{5,1}}{p_{5,9}} \\ \frac{f_{6,9}p_{6,4}}{p_{6,9}} \\ \frac{f_{6,9}p_{6,4}}{p_{6,9}} + \frac{p_{3,5}x_{3,5}}{p_{3,4}} \\ 0 \\ 0 \\ p_{7,6} \left(\frac{f_{6,9}(p_{6,4} + p_{6,7} + p_{6,9})}{p_{6,9}} - f_{9,6} \right) p_{7,4}^{-1} \\ 0 \\ p_{8,5} \left(\frac{f_{5,9}(p_{5,1} + p_{5,2} + p_{5,3} + p_{5,8} + p_{5,9})}{p_{5,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,5}}{p_{2,9}} - f_{9,5} - x_{3,5} \right) \end{pmatrix} \quad (7)$$

Общее решение системы (4), (6) может быть получено по правилам, описанным в [2] в виде решения двух систем, полученных на основе декомпозиции потоков на ненаблюдаемой части сети.

4. Переопределенная разреженная линейная система

Для графа, представленного на рисунке 1, изменим количество обозреваемых узлов, либо их конфигурацию. В результате сбора необходимой информации о функции потока ранг матрицы системы может измениться, т.е. возможно, что система будет *переопределенной* либо иметь единственное решение. Рассмотрим случай построения решения для переопределенной системы. Для графа G , представленного на рисунке 1, положим $M = \{8, 9\}$ и удалим узлы $i \in M$ и соответствующие входящие и исходящие дуги из узлов множества M орграфа G (см. рисунок 4).

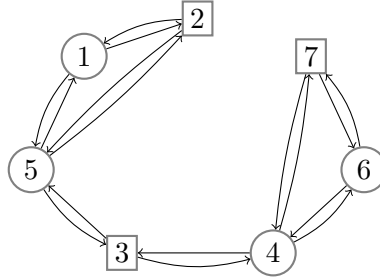


Рис. 4: Орграф после удаления обозреваемых узлов и соответствующих входящих и исходящих дуг из узлов множества $M = \{8, 9\}$

Удалим дуги, исходящие из узлов $i \in M^+$, т.к. поток на них известен и получим орграф (см. рисунок 5) $\bar{G} = (\bar{I}, \bar{U})$, $\bar{I} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $\bar{U} = \{(1, 2), (1, 5), (4, 3), (4, 7), (7, 4), (7, 6), (4, 6)\}$.

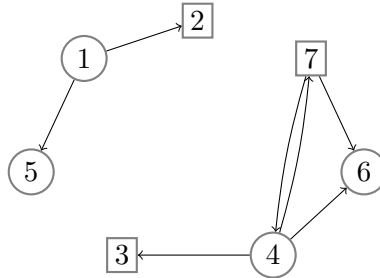
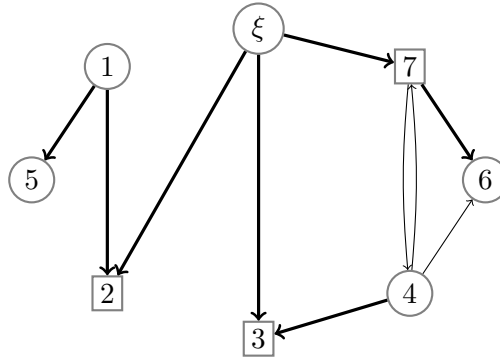


Рис. 5: Орграф $\bar{G} = (\bar{I}, \bar{U})$ состоит из двух компонент связности

Дополним орграф $\bar{G} = (\bar{I}, \bar{U})$ узлом ξ и дугами $(\xi, 2), (\xi, 3), (\xi, 7)$, получим орграф $\hat{G} = (\hat{I}, \hat{U})$, $\hat{I} = \bar{I} \cup \{\xi\}$, $\hat{U} = \bar{U} \cup \{(\xi, 2), (\xi, 3), (\xi, 7)\}$ и построим его опору T [1] (на рисунке 6 опора полученного орграфа отмечена жирными дугами).

Рис. 6: Орграф $\hat{G}$ с помеченной опорой для системы (8)

Для опоры орграфа $\hat{G}$ выберем узел ξ в качестве корня и построим корневые и вспомогательные структуры (см. таблицу 4).

Таблица 4. Корневые структуры для хранения T орграфа $\hat{G}$

i	1	2	3	4	5	6	7	ξ
$pred[i]$	2	ξ	ξ	3	1	7	ξ	0
$dir[i]$	-1	1	1	-1	1	1	1	0
$depth[i]$	2	1	1	2	3	2	1	0
$d[i]$	5	1	4	7	3	ξ	6	2

Для орграфа $\hat{G}$ вычислим $a_i, i \in \bar{I}$ с учетом сбора информации, полученной от сенсоров, и преобразований системы (4). Запишем систему уравнений баланса:

$$\begin{aligned}
 -x_{1,2} - x_{1,5} &= -\frac{f_{2,8}p_{2,1}}{p_{2,8}} - \frac{f_{2,9}p_{2,1}}{p_{2,9}} + p_{5,1} \left(-\frac{f_{5,8}}{p_{5,8}} - \frac{f_{5,9}}{p_{5,9}} \right), \\
 x_{\xi,2} + x_{1,2} &= \frac{f_{2,8}(p_{2,1} + p_{2,5} + p_{2,8})}{p_{2,8}} + \frac{f_{2,9}(p_{2,1} + p_{2,5} + p_{2,9})}{p_{2,9}} - \\
 &\quad - \frac{f_{5,8}p_{5,2}}{p_{5,8}} - \frac{f_{5,9}p_{5,2}}{p_{5,9}} - f_{8,2} - f_{9,2}, \\
 x_{1,5} &= \frac{f_{5,8}(p_{5,1} + p_{5,2} + p_{5,3} + p_{5,8})}{p_{5,8}} + \frac{f_{5,9}(p_{5,1} + p_{5,2} + p_{5,3} + p_{5,9})}{p_{5,9}} - \\
 &\quad - \frac{f_{2,8}p_{2,5}}{p_{2,8}} - \frac{f_{2,9}p_{2,5}}{p_{2,9}} - \frac{f_{3,8}p_{3,5}}{p_{3,8}} - f_{8,5} - f_{9,5}, \\
 x_{\xi,3} + x_{4,3} &= \frac{f_{3,8}(p_{3,4} + p_{3,5} + p_{3,8})}{p_{3,8}} + p_{5,3} \left(-\frac{f_{5,8}}{p_{5,8}} - \frac{f_{5,9}}{p_{5,9}} \right) - f_{8,3}, \\
 -x_{4,3} - x_{4,6} - x_{4,7} + x_{7,4} &= -\frac{f_{3,8}p_{3,4}}{p_{3,8}} - \frac{f_{6,9}p_{6,4}}{p_{6,9}}, \\
 x_{\xi,7} + x_{4,7} - x_{7,4} - x_{7,6} &= -\frac{f_{6,9}p_{6,7}}{p_{6,9}}, \\
 x_{4,6} + x_{7,6} &= \frac{f_{6,9}(p_{6,4} + p_{6,7} + p_{6,9})}{p_{6,9}} - f_{9,6}, \\
 -x_{\xi,2} - x_{\xi,3} - x_{\xi,7} &= -f_{2,8} - f_{2,9} - f_{3,8} - f_{5,8} - f_{5,9} - f_{6,9} + f_{8,2} + f_{8,3} + \\
 &\quad + f_{8,5} + f_{9,2} + f_{9,5} + f_{9,6}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Положим неопорные потоки равными 0 и построим частное решение системы (8):

$$\begin{aligned}
& \tilde{x}_{4,6} \rightarrow 0, \tilde{x}_{4,7} \rightarrow 0, \tilde{x}_{7,4} \rightarrow 0, \\
& \tilde{x}_{1,2} \rightarrow f_{8,5} + f_{9,5} - p_{5,1} \left(-\frac{f_{5,8}}{p_{5,8}} - \frac{f_{5,9}}{p_{5,9}} \right) + \frac{f_{2,8}p_{2,1}}{p_{2,8}} + \frac{f_{2,8}p_{2,5}}{p_{2,8}} + \frac{f_{2,9}p_{2,1}}{p_{2,9}} + \\
& + \frac{f_{2,9}p_{2,5}}{p_{2,9}} + \frac{f_{3,8}p_{3,5}}{p_{3,8}} - \frac{f_{5,8}(p_{5,1} + p_{5,2} + p_{5,3} + p_{5,8})}{p_{5,8}} - \frac{f_{5,9}(p_{5,1} + p_{5,2} + p_{5,3} + p_{5,9})}{p_{5,9}}, \\
& \tilde{x}_{1,5} \rightarrow -f_{8,5} - f_{9,5} + \frac{f_{5,8}(p_{5,1} + p_{5,2} + p_{5,3} + p_{5,8})}{p_{5,8}} + \frac{f_{5,9}(p_{5,1} + p_{5,2} + p_{5,3} + p_{5,9})}{p_{5,9}} - \\
& - \frac{f_{2,8}p_{2,5}}{p_{2,8}} - \frac{f_{2,9}p_{2,5}}{p_{2,9}} - \frac{f_{3,8}p_{3,5}}{p_{3,8}}, \\
& \tilde{x}_{4,3} \rightarrow \frac{f_{3,8}p_{3,4}}{p_{3,8}} + \frac{f_{6,9}p_{6,4}}{p_{6,9}}, \\
& \tilde{x}_{7,6} \rightarrow \frac{f_{6,9}(p_{6,4} + p_{6,7} + p_{6,9})}{p_{6,9}} - f_{9,6}, \\
& \tilde{x}_{8,2} \rightarrow -f_{8,2} - f_{8,5} - f_{9,2} - f_{9,5} + \frac{f_{2,8}(p_{2,1} + p_{2,5} + p_{2,8})}{p_{2,8}} + \frac{f_{2,9}(p_{2,1} + p_{2,5} + p_{2,9})}{p_{2,9}} + \\
& + \frac{f_{5,8}(p_{5,1} + p_{5,2} + p_{5,3} + p_{5,8})}{p_{5,8}} + p_{5,1} \left(-\frac{f_{5,8}}{p_{5,8}} - \frac{f_{5,9}}{p_{5,9}} \right) + \\
& + \frac{f_{5,9}(p_{5,1} + p_{5,2} + p_{5,3} + p_{5,9})}{p_{5,9}} - \frac{f_{2,8}p_{2,1}}{p_{2,8}} - \frac{f_{2,8}p_{2,5}}{p_{2,8}} - \frac{f_{2,9}p_{2,1}}{p_{2,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,5}}{p_{2,9}} - \\
& - \frac{f_{3,8}p_{3,5}}{p_{3,8}} - \frac{f_{5,8}p_{5,2}}{p_{5,8}} - \frac{f_{5,9}p_{5,2}}{p_{5,9}}, \\
& \tilde{x}_{8,3} \rightarrow -f_{8,3} + \frac{f_{3,8}(p_{3,4} + p_{3,5} + p_{3,8})}{p_{3,8}} + p_{5,3} \left(-\frac{f_{5,8}}{p_{5,8}} - \frac{f_{5,9}}{p_{5,9}} \right) - \frac{f_{3,8}p_{3,4}}{p_{3,8}} - \frac{f_{6,9}p_{6,4}}{p_{6,9}}, \\
& \tilde{x}_{8,7} \rightarrow -f_{9,6} + \frac{f_{6,9}(p_{6,4} + p_{6,7} + p_{6,9})}{p_{6,9}} - \frac{f_{6,9}p_{6,7}}{p_{6,9}}
\end{aligned}$$

Построим характеристические векторы $\delta_{ij}(\tau, \rho)$ (см. таблицу 5).

Таблица 5. Характеристические векторы

(τ, ρ)	$\delta_{1,2}$	$\delta_{1,5}$	$\delta_{4,3}$	$\delta_{4,7}$	$\delta_{7,4}$	$\delta_{7,6}$	$\delta_{4,6}$	$\delta_{\xi,2}$	$\delta_{\xi,3}$	$\delta_{\xi,7}$
(4,7)	0	0	-1	1	0	0	0	0	1	-1
(7,4)	0	0	1	0	1	0	0	0	-1	1
(4,6)	0	0	-1	0	0	-1	1	0	1	-1

Построим общее решение однородной системы уравнений баланса (8). В силу слишком большого размера оно не приводится. Система дополнительных уравнений имеет вид:

$$x_{1,2} - \frac{p_{1,5}x_{1,5}}{p_{1,2}} = 0, \quad x_{4,3} - \frac{p_{4,7}x_{4,7}}{p_{4,3}} = 0, \quad x_{4,3} - \frac{p_{4,6}x_{4,6}}{p_{4,3}} = 0, \quad x_{7,4} - \frac{p_{7,6}x_{7,6}}{p_{7,4}} = 0 \quad (9)$$

и запишем матрицу Λ системы (9):

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{p_{4,7}}{p_{4,3}} - 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -\frac{p_{4,6}}{p_{4,3}} - 1 \\ 0 & 1 & \frac{p_{7,6}}{p_{7,4}} \end{pmatrix}.$$

$rank(\Lambda) = 3$. Т.к. небазисных дуг 3, а $q = 4$, то система переопределена, выберем $\hat{U}_W = \hat{U}_{-T}$, тогда $\hat{U}_{-T} \setminus \hat{U}_W = \emptyset$. Таким образом нужно выбрать три линейно независимых уравнения, т.к.

четвертое линейно зависимо от них и должно выполняться при условии, что коэффициенты p_{ij} и значения f_{ij} заданы корректно. Выберем уравнения с номерами 2, 3, 4 и соответствующую им подматрицу

$$\Lambda_W = \begin{pmatrix} -\frac{p_{4,7}}{p_{4,3}} - 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -\frac{p_{4,6}}{p_{4,3}} - 1 \\ 0 & 1 & \frac{p_{7,6}}{p_{7,4}} \end{pmatrix}$$

тогда

$$\det(\Lambda_W) = \frac{p_{4,3} \left(-p_{4,6} - \frac{p_{4,7}(p_{7,4} + p_{7,6})}{p_{7,4}} \right) - p_{4,6}p_{4,7}}{p_{4,3}^2}.$$

Т.к. $p_{ij} > 0$, то в выражении $\det(\Lambda_W)$ все слагаемые строго отрицательны, тогда $\det(\Lambda_W) \neq 0 \Rightarrow$ матрица Λ_W — невырожденная.

Общее решение систем (8), (9) может быть получено по описанным выше правилам, однако в данном примере оно будет опущено в силу того, что оно занимает слишком много места.

5. Оптимальное решение задачи оценки потока на ненаблюдаемой части сети

Рассмотрим случай $|M| = 1$ и установим сенсор в узел 5. В силу особенностей реализации алгоритма перенумеруем узлы в графе G так, чтобы обозреваемые узлы имели максимальные номера, т.е. изменим номер узла 5 на 9, а узла 9 на 5 и получим орграф $G' = (I', U')$, $I' = I$, $U' = \{(1, 2), (2, 1), (1, 9), (9, 1), (2, 8), (8, 2), (3, 4), (4, 3), (3, 8), (8, 3), (4, 7), (7, 4), (8, 9), (9, 8), (7, 6), (6, 7), (2, 9), (9, 2), (6, 4), (4, 6), (5, 6), (6, 5), (5, 9), (9, 5), (5, 2), (2, 5), (3, 9), (9, 3)\}$ (см. рисунок 7). В результате множество обозреваемых узлов состоит из узла 9, $M' = \{9\}$.

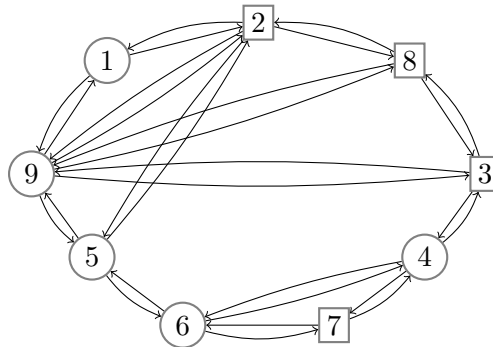


Рис. 7: Орграф $G' = (I', U')$

Удалим узлы $i \in M'$ из орграфа G' и дуги, исходящие и входящие в узел 9 (см. рисунок 8). Согласно [2], построим разрез $CC(M') = \{(1, 9), (9, 1), (8, 9), (9, 8), (2, 9), (9, 2), (5, 9), (9, 5), (3, 9), (9, 3)\}$, найдем $I(CC(M')) = \{1, 2, 3, 5, 8, 9\}$, построим $M^+ = I(CC(M')) \setminus M = \{1, 2, 3, 5, 8\}$, сформируем множества $M^* = M \cup M^+ = \{1, 2, 3, 5, 8, 9\}$ и $\tilde{I}' = I' \setminus M^* = \{4, 6, 7\}$.

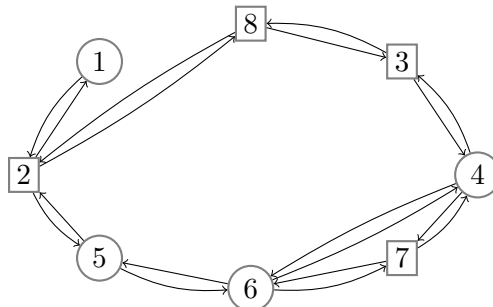
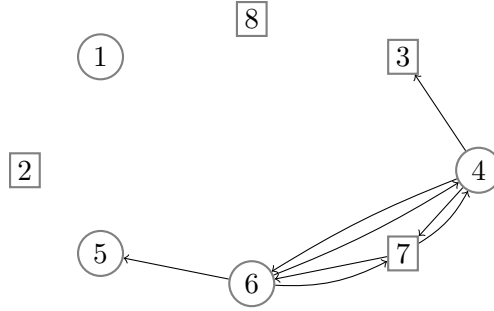
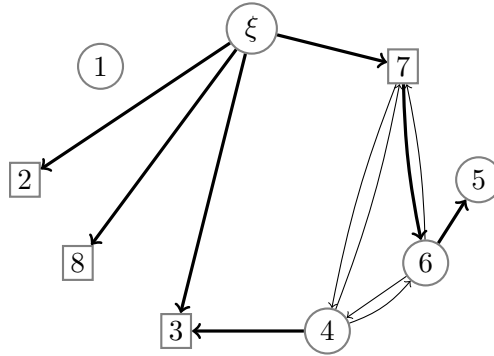


Рис. 8: Орграф после удаления обозреваемых узлов и дуг, входящих и исходящих из узла 9

Удалим дуги, исходящие из узлов $i \in M^+$, т.к. поток на них известен и получим оргграф $\bar{G} = (\bar{I}, \bar{U})$, $\bar{I} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $\bar{U} = \{(4, 3), (4, 7), (7, 4), (7, 6), (6, 7), (6, 4), (4, 6), (6, 5)\}$ (см. рисунок 9) [2].

Рис. 9: Оргграф $\bar{G}$

Дополним оргграф $\bar{G} = (\bar{I}, \bar{U})$ узлом ξ и дугами $(\xi, 2), (\xi, 3), (\xi, 7), (\xi, 8)$, получим оргграф $\hat{G} = (\hat{I}, \hat{U})$, $\hat{I} = \bar{I} \cup \{\xi\}$, $\hat{U} = \bar{U} \cup \{(\xi, 2), (\xi, 3), (\xi, 7), (\xi, 8)\}$ и построим его опору T (на рисунке 10 опора полученного оргграфа отмечена жирными дугами).

Рис. 10: Оргграф $\hat{G}$ с помеченной опорой для системы (10)

Заметим, что узел 1 принадлежит отдельной компоненте связности. Это означает, что при условии корректности выходных данных выполняется условие

$$\frac{f_{2,9}p_{2,1}}{p_{2,9}} + f_{9,1} = f_{1,9} \left(\frac{p_{1,2}}{p_{1,9}} + 1 \right),$$

дуговые потоки, связанные с узлом 1, определены. Необходимо решить задачу оценки потока для второй компоненты связности. Для опоры оргграфа выберем узел ξ в качестве корня и построим корневые и вспомогательные структуры (см. таблицу 6).

Таблица 6. Корневые структуры для хранения T

i	2	3	4	5	6	7	8	ξ
$pred[i]$	ξ	ξ	3	6	7	ξ	ξ	0
$dir[i]$	1	1	-1	1	1	1	1	0
$depth[i]$	1	1	2	3	2	1	1	0
$d[i]$	8	4	7	ξ	5	6	3	2

Для оргграфа $\hat{G}$ вычислим $a_i, i \in \bar{I}$, запишем систему уравнений баланса:

$$\begin{aligned}
x_{\xi,2} &= \frac{f_{2,9}(p_{2,1} + p_{2,5} + p_{2,8} + p_{2,9})}{p_{2,9}} - \frac{f_{1,9}p_{1,2}}{p_{1,9}} - \frac{f_{5,9}p_{5,2}}{p_{5,9}} - \frac{f_{8,9}p_{8,2}}{p_{8,9}} - f_{9,2}, \\
x_{\xi,8} &= \frac{f_{8,9}(p_{8,2} + p_{8,3} + p_{8,9})}{p_{8,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,8}}{p_{2,9}} - \frac{f_{3,9}p_{3,8}}{p_{3,9}} - f_{9,8}, \\
x_{\xi,3} + x_{4,3} &= \frac{f_{3,9}(p_{3,4} + p_{3,8} + p_{3,9})}{p_{3,9}} - \frac{f_{8,9}p_{8,3}}{p_{8,9}} - f_{9,3}, \\
-x_{4,3} - x_{4,6} - x_{4,7} + x_{6,4} + x_{7,4} &= -\frac{f_{3,9}p_{3,4}}{p_{3,9}}, \\
x_{\xi,7} + x_{4,7} + x_{6,7} - x_{7,4} - x_{7,6} &= 0, \\
x_{4,6} - x_{6,4} - x_{6,5} - x_{6,7} + x_{7,6} &= -\frac{f_{5,9}p_{5,6}}{p_{5,9}}, \\
x_{6,5} &= \frac{f_{5,9}(p_{5,2} + p_{5,6} + p_{5,9})}{p_{5,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,5}}{p_{2,9}} - f_{9,5}, \\
-x_{\xi,2} - x_{\xi,3} - x_{\xi,7} - x_{\xi,8} &= -f_{1,9} - f_{2,9} - f_{3,9} - f_{5,9} - f_{8,9} + f_{9,1} + f_{9,2} + \\
&\quad + f_{9,3} + f_{9,5} + f_{9,8}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Положим неопорные потоки равными 0 и построим частное решение системы (10):

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_{4,6} &\rightarrow 0, \quad \tilde{x}_{4,7} \rightarrow 0, \quad \tilde{x}_{6,4} \rightarrow 0, \quad \tilde{x}_{6,7} \rightarrow 0, \quad \tilde{x}_{7,4} \rightarrow 0, \quad \tilde{x}_{4,3} \rightarrow \frac{f_{3,9}p_{3,4}}{p_{3,9}}, \\
\tilde{x}_{6,5} &\rightarrow \frac{f_{5,9}(p_{5,2} + p_{5,6} + p_{5,9})}{p_{5,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,5}}{p_{2,9}} - f_{9,5}, \\
\tilde{x}_{7,6} &\rightarrow \frac{f_{5,9}(p_{5,2} + p_{5,6} + p_{5,9})}{p_{5,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,5}}{p_{2,9}} - \frac{f_{5,9}p_{5,6}}{p_{5,9}} - f_{9,5}, \\
\tilde{x}_{9,2} &\rightarrow \frac{f_{2,9}(p_{2,1} + p_{2,5} + p_{2,8} + p_{2,9})}{p_{2,9}} - \frac{f_{1,9}p_{1,2}}{p_{1,9}} - \frac{f_{5,9}p_{5,2}}{p_{5,9}} - \frac{f_{8,9}p_{8,2}}{p_{8,9}} - f_{9,2}, \\
\tilde{x}_{9,3} &\rightarrow \frac{f_{3,9}(p_{3,4} + p_{3,8} + p_{3,9})}{p_{3,9}} - \frac{f_{3,9}p_{3,4}}{p_{3,9}} - \frac{f_{8,9}p_{8,3}}{p_{8,9}} - f_{9,3}, \\
\tilde{x}_{9,7} &\rightarrow \frac{f_{5,9}(p_{5,2} + p_{5,6} + p_{5,9})}{p_{5,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,5}}{p_{2,9}} - \frac{f_{5,9}p_{5,6}}{p_{5,9}} - f_{9,5}, \\
\tilde{x}_{9,8} &\rightarrow \frac{f_{8,9}(p_{8,2} + p_{8,3} + p_{8,9})}{p_{8,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,8}}{p_{2,9}} - \frac{f_{3,9}p_{3,8}}{p_{3,9}} - f_{9,8}.
\end{aligned}$$

Характеристические векторы $\delta_{ij}(\tau, \rho)$ приведены в таблице 7.

Таблица 7. Характеристические векторы

	$\delta_{4,3}$	$\delta_{4,7}$	$\delta_{7,4}$	$\delta_{7,6}$	$\delta_{6,7}$	$\delta_{6,4}$	$\delta_{4,6}$	$\delta_{6,5}$	$\delta_{\xi,2}$	$\delta_{\xi,3}$	$\delta_{\xi,7}$	$\delta_{\xi,8}$
(4,7)	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0
(7,4)	1	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	1	0
(6,7)	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
(6,4)	1	0	0	1	0	1	0	0	0	-1	1	0
(4,6)	-1	0	0	-1	0	0	1	0	0	1	-1	0

Общее решение однородной системы, порожденной из системы (10), в силу слишком большого размера не приводится. Система дополнительных уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned}
x_{4,3} - \frac{p_{4,7}x_{4,7}}{p_{4,3}} &= 0, \quad x_{4,3} - \frac{p_{4,6}x_{4,6}}{p_{4,3}} = 0, \\
x_{6,7} - \frac{p_{6,4}x_{6,4}}{p_{6,7}} &= 0, \quad x_{6,7} - \frac{p_{6,5}x_{6,5}}{p_{6,7}} = 0, \\
x_{7,4} - \frac{p_{7,6}x_{7,6}}{p_{7,4}} &= 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Матрица Λ системы (11) имеет вид:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\frac{p_{4,7}}{p_{4,3}} - 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -\frac{p_{4,6}}{p_{4,3}} - 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{p_{6,4}}{p_{6,7}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{p_{7,6}}{p_{7,4}} & -\frac{p_{7,6}}{p_{7,4}} & \frac{p_{7,6}}{p_{7,4}} \end{pmatrix}.$$

Так как $\text{rank}(\Lambda) = 5$ и число неопорных дуг равно 5, то система имеет единственное решение. Соответственно выберем $\hat{U}_W = \hat{U}_{-T}$, тогда $\hat{U}_{-T} \setminus \hat{U}_W = \emptyset$. Таким образом $\Lambda_W = \Lambda$. Вычислим определитель матрицы Λ_W

$$\det(\Lambda_W) = -\frac{p_{6,4}(p_{4,6}p_{4,7}p_{7,4} + p_{4,3}(p_{4,6}p_{7,4} + p_{4,7}(p_{7,4} + p_{7,6})))}{p_{4,3}^2 p_{6,7} p_{7,4}}.$$

Т.к. $p_{ij} > 0$, то в выражении $\det(\Lambda_W)$ все слагаемые строго положительны, следовательно, $\det(\Lambda_W) \neq 0$, матрица Λ_W — невырожденная. Общее решение систем (10), (11) может быть получено по описанным выше правилам. Таким образом показано, что оптимальное решение задачи расположения сенсоров для графа G , изображенного на рисунке 1, достигается при одном обзоре узла $M = \{5\}$.

В таблице 8 представлены численные результаты построения оптимального решения с использованием матричного метода [4] и методов декомпозиции.

Таблица 8. Численные результаты

$ I $	$ U $	$ I^* $	t_1, c	t_2, c	t_1/t_2
50	100	8	4.88453	0.603545	8.028
75	300	16	117.496	0.605637	193.888
100	300	20	121.02	0.386653	312.713
200	800	48	2215.2	2.97976	743.416
1000	4000	64	5391.43	66.3283	81.284
5000	20000	120	8945.6	181.6341	49.251

Численные результаты решения задачи оценки потоков на ненаблюдаемой части двуправленной сети показали практическую применимость методов декомпозиции.

Литература

1. Bianco L., Confessore G., Reverberi P. A network based model for traffic sensor location with implication in O/D matrix estimates. *Transportation Science*. No. 35 (2001), 50–60.
2. Pilipchuk L. A. *Sparse Linear Systems and Their Applications*. Minsk: BSU, 2013.
3. Пилипчук, Л.А., Пилипчук А.С., Полячок Е.Н., Фаразет А.И. Идентификация сенсорной конфигурации и управление потоками. *Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика*. No. 2 (2018), 67–76.
4. Bianco L., Confessore G., Gentili M. Combinatorial aspects of the sensor location problem. *Annals of Operation Research*. No. 144 (2006), 201–234.