

УДК 519.63

МНОГОКОМПОНЕНТНЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ АНОМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ ДИФФУЗИИ

Н. Г. Абрашина-Жадаева¹, И. А. Тимошенко²

e-mail: ¹zhadaeva282@gmail.com, ²timoshchenkoia@bsu.by

Обсуждается новый класс многокомпонентных численных методов для решения задач математической физики для описания процессов аномальной диффузии в многомерных областях. Алгоритмы основаны на многокомпонентном векторном расщеплении с аддитивной аппроксимацией оператора задачи, а аппроксимация дробной производной по времени базируется на различных дискретных дробных аналогах производных.

Ключевые слова: *Дробные частные производные; аддитивная аппроксимация; векторное расщепление; многокомпонентные схемы; численные методы; аномальная диффузия.*

MULTICOMPONENT METHODS FOR ANOMALOUS DIFFUSION PROCESSES

N. G. Abrashina-Zhadaeva¹, I. A. Timoshchenko²

e-mail: ¹zhadaeva282@gmail.com, ²timoshchenkoia@bsu.by

A new class of multicomponent numerical methods for anomalous diffusion problems in multidimensional domain is discussed. The algorithms are based on multicomponent vector splitting with additive approximation of the operator of the problem, and the approximation of the fractional time derivative is based on various discrete analogues of fractional derivatives.

Keywords: *fractional partial derivatives; additive approximation; vector splitting; multicomponent schemes; numerical methods; anomalous diffusion.*

Mathematics Subject Classification (2020): Primary 35G16, Secondary 35R11, 65M55.

Последние годы большое внимание уделяется исследованиям алгоритмов сложных задач с аномально протекающими процессами (см. [1–4] и цитируемую там литературу). Поскольку такие задачи, как правило, связаны с производными дробного порядка, которые относятся к нелокальным интегро-дифференциальным операторам, то при численном моделировании требуется задействовать значительные вычислительные ресурсы [5–9]. Возможно это является сдерживающим механизмом использования дробно-дифференциальных моделей в практических целях.

В этой связи особый интерес представляют параллельные вычислительные системы, а для их использования — класс многокомпонентных разностных схем для построения методов декомпозиции области [10–12]. Ранее было показано, что такие алгоритмы как метод декомпозиции по подобластям и по физическим процессам, хорошо себя зарекомендовали при расчетах сложных задач с производными целых порядков [13, 14]. Возникающие при этом разностные схемы обладают существенно более высокой точностью по сравнению с методами покомпонентного расщепления и метода переменных направлений и позволяют проводить распараллеленные вычисления [12].

Данная работа затрагивает непосредственно вопросы, связанные с возможностью применения численных методов, основанных на расщеплении [17, 18] по подобластям для многомерных задач. Эти задачи описывают аномальный перенос, обусловленный эффектами памяти.

Предварительно на отрезке интегрирования $0 < t < T$ введем сеточную область $\omega_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots\}$ и обозначим через $y^j = y(t_j)$ — сеточную функцию. Будем использовать

дискретный аналог дробной производной по времени. Полагая, что $u(t)$ обладает необходимой гладкостью запишем [8, 16]:

$$\partial_{0t_j}^\gamma u = \frac{\tau^{1-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \sum_{i=0}^j b_i \frac{u_{i+1} - u_i}{\tau} + O(\tau), \quad b_i = (i+1)^{1-\gamma} - i^{1-\gamma}, \quad (1)$$

или

$$\partial_{0t_j}^\gamma u = \frac{\tau^{-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} [u_j + \sum_{i=1}^{j-1} b_i u_i - b_{j-1} u_0] + O(\tau^{2-\gamma}). \quad (2)$$

Выражение (1) приведем к виду

$$\partial_{0t_j}^\gamma u = \frac{\tau^{1-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} u_{t_j} + \frac{\tau^{1-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \sum_{i=1}^{j-1} b_i u_{t_i} + O(\tau).$$

Пусть дифференциальный оператор A представим в виде [17]:

$$A = \sum_{\alpha=1}^p A_\alpha, \quad (3)$$

где A_α — линейные положительные операторы в гильбертовом пространстве H с теми же областями определения и значений, что и для A , т. е. $\bigcap_{\alpha=1}^p D(A_\alpha) = D(A)$. Отметим, что A_α — это так называемые, компоненты исходного оператора A — “одномерные” операторы. Известно [17], что такое аддитивное представление (3) лежит в основе большинства экономичных методов.

Рассмотрим новые разностные схемы вида $(k = \overline{1, p})$:

$$\frac{y_k^{s+1} - y_k^s}{\tau^\gamma} + \sum_{\alpha=1}^k \tilde{A}_\alpha y_\alpha^{s+1} + \sum_{\alpha=k+1}^p \tilde{A}_\alpha y_\alpha^s = \varphi^*, \quad (4)$$

$$\frac{y_k^{s+1} - y_k^s}{\tau^\gamma} + \sigma(\tilde{A}_k y_k^{s+1} - \tilde{A}_k y_k^s) + \sum_{\alpha=1}^p \tilde{A}_\alpha y_\alpha^s = \varphi^*, \quad (5)$$

где

$$\tilde{A}_\gamma = \Gamma(2-\gamma) A_\gamma, \quad \varphi^* = \Gamma(2-\gamma) \hat{f} - \tau^{1-\gamma} \sum_{l=0}^s b_l y_t^l.$$

Покажем как для этого класса задач на основе схем, учитывающих результаты [14], можно построить методы декомпозиции разделения области. Проиллюстрируем предлагаемые решения примерами.

Рассмотрим в ограниченной области G m -мерного евклидова пространства $(m = 1, \dots, p)$ с кусочно-гладкой границей ∂G первую начально-краевую задачу для дифференциального уравнения с дробной производной по времени вида:

$$\partial_{0t}^\gamma u + Lu(x, t) = f(x, t), \quad x \in G, \quad (6)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G},$$

$$u(x, t)|_{\partial G} = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

где

$$a_0 \sum_{i=1}^m \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq a_1 \sum_{i=1}^m \xi_i^2,$$

$$a_0, a_1 = \text{const} > 0, \quad x \in \overline{G} = G \cup \partial G.$$

Не ограничивая общности положим $f = 0$ и пусть $L(u) = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)$ — симметричный эллиптический оператор с кусочно-гладкими ограниченными коэффициентами, зависящими от $x = (x_1, \dots, x_m)$.

Пусть область G представима как объединение конечного числа подобластей $G = \bigcup_{\alpha=1}^p G_\alpha$, при этом допускается возможность налегания некоторых подобластей друг на друга. Для простоты изложения рассмотрим регулярную прямоугольную пространственную сетку ω_h с шагом h . Пусть область $\bar{\omega}_h$ разбита на подобласти $\bar{\omega}_h^k$ ($k = \overline{1, p}$), γ_h^k — внутренняя граница области ω_h^k , т.е. граница раздела между подобластями (рис. 1). На сетке ω_h введем сеточную функцию y и разностный оператор L_h , который на минимальном сеточном шаблоне дает второй порядок точности, является консервативным и положительно-определенным.

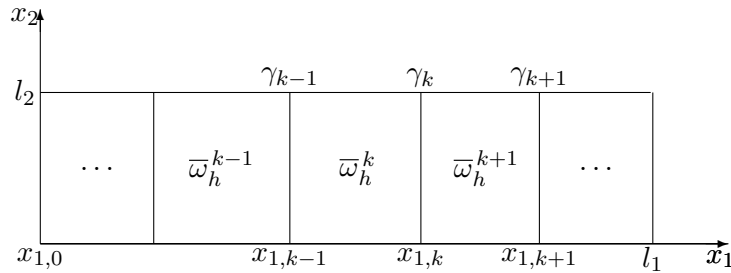


Рис. 1: Фрагмент разбиения расчетной области.

Рассмотрим на сетках $\bar{\omega}_h^k$ ($k = \overline{1, p}$) модификации схем многокомпонентного расщепления вида (4) и (5). Определим операторы A_α в уравнениях (4), (5). Еще раз отметим, что сеточная функция y_k определяется на сетке $x \in \bar{\omega}_h^k$ и для каждой сеточной области находятся свои y_k ($k = \overline{1, p}$). Уравнение (4) решается последовательно от области к области, а (5) может все y_k ($x \in \bar{\omega}_h^k$) реализовывать одновременно во всей области, что весьма удобно для распараллеливания вычислений. Во внутренних узлах в k -х уравнениях (4), (5) $A_k = L_h$, т.е. выражение $L_h y_k$ полностью аппроксимирует Lu , а операторы $A_\alpha \equiv 0$ ($\alpha \neq k$). При этом $A_\alpha = \Gamma(2 - \gamma)A_\alpha$.

На границе подобласти $\bar{\omega}_h^k$, т.е. $x \in \gamma_h^k$, оператор A выбирается из следующих условий: во-первых, таким образом, чтобы в $\bar{\omega}_h^k$ операторы A_k были неотрицательны, $[A_k y_k, y_k] \geq 0$, во-вторых, выражение $\sum_{k=1}^p A_k y_k$ при $x \in \gamma_h^k$, $y_k = u$ ($k = \overline{1, p}$) равно $\sum_{k=1}^p A_k u = L_h u$. В слагаемом $A_k y_k$ ($k \neq \alpha$) при $x \in \gamma_h^k$ y_α не принадлежит области $\bar{\omega}_h^k$, а принадлежит одной из соседних подобластей. Таким образом, операторы A_α ($\alpha \neq k$) связывают решение в подобласти $\bar{\omega}_h^k$ с соседними $\bar{\omega}_h^\alpha$ ($\alpha \neq k$). Системы уравнений (4) и (5) аппроксимируют (6) с оператором L и обеспечивают алгоритмически разбиение задачи на подобласти.

Если подобласти пересекаются или имеют общую границу, то предлагаемый метод определяет несколько решений исходной задачи в точках контакта. Как и в [12–14] в такой ситуации в качестве решения можно либо брать любое из полученных решений, либо на нижнем слое можно заменить приближенное решение на среднее арифметическое решений из числа повторений в точке.

Пример 1. Рассмотрим задачу (6) в двумерной области и для упрощения выкладок положим, что уравнение однородное и не содержит смешанных производных, т.е. положим $k_{\alpha\beta}(x) = 0$, $\alpha \neq \beta$, $f = 0$. Разобьем область $\bar{D}$ на подобласти прямыми x_{1i} ($i = \overline{1, N}$), параллельными оси Ox_2 , так, чтобы узлы сетки $x_{i1} = i_1 h_1$ ($i_1 = \overline{0, N_1}$) лежали на соответствующих прямых. Тем самым сетка $\bar{\omega}$ разбивается на подобласти $\bar{\omega}_i$.

Разностная схема декомпозиции области в ω_k ($k = \overline{1, N}$) будет иметь вид

$$\begin{aligned}
& (\hat{y}^{(k)} - y^{(k)})/\tau^\gamma + \tilde{A}\hat{y}^{(k)} + \tau^{1-\gamma} \sum_{l=2}^{s+1} b_l y_t^{(k)s-l+1} = 0, \quad x \in \omega_k, \\
& (\hat{y}^{(k)} - \tilde{y}^k)/\tau^\gamma + \sigma \tilde{A}_2(\hat{y}^{(k)} - y^{(k)}) + \\
& + \tilde{A}_1 y^{(k-1)} + \tilde{A}_2 y^{(k)} + \tau^{1-\gamma} \sum_{l=2}^{s+1} b_l y_t^{(k)s-l+1} = 0, \quad \tilde{y}^k = 0, 5(y^{k-1} + y^k), \quad x \in \gamma_{k-1}, \\
& (\hat{y}^{(k)} - \tilde{y}^k)/\tau^\gamma + \sigma \tilde{A}_1(\hat{y}^{(k)} - y^{(k)}) + \\
& + \tilde{A}_1 y^{(k)} + \tilde{A}_2 y^{(k+1)} + \tau^{1-\gamma} \sum_{l=2}^{s+1} b_l y_t^{(k)s-l+1} = 0, \quad \tilde{y}^k = 0, 5(y^{k+1} + y^k), \quad x \in \gamma_k,
\end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_1 y &= \Gamma(2-\gamma)(-0.25\{(a_{22}y_{\bar{x}_2})_{x_2} + (a_{22}y_{x_2})_{\bar{x}_2} - h_1^{-1}(a_{11} + a_{11}^{(-1)})y_{\bar{x}_1}\}), \\
\tilde{A}_2 y &= \Gamma(2-\gamma)(-0.25\{(a_{22}y_{\bar{x}_2})_{x_2} + (a_{22}y_{x_2})_{\bar{x}_2} + h_1^{-1}(a_{11} + a_{11}^{(+1)})y_{x_1}\}).
\end{aligned}$$

Применяя методику [4], можно убедиться, что разностная схема (7) при достаточной гладкости искомого решения устойчива по начальным данным при условии неотрицательности A_i в норме $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot, \cdot)}$ для ее решения справедлива оценка $\|z^k\| = \|u^k - y^k\| \leq M(\tau h^{-0,5} + h^2)$ где $M = \text{const}$. Если рассмотреть многокомпонентную схему (7) и по аналогии построить декомпозиционный метод, то справедлива:

Теорема. При достаточно гладком решении исходной задачи алгоритм метода декомпозиции примера 1 (схема (7)) сходится и для его погрешности справедлива оценка

$$\left(\sum_{i=1}^N \|z_t^{(i)}\|^2 + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{x \in \gamma_i} h_1 h_2 ((\tilde{z}_t^{(i)})^2 + (w_t^{(i)})^2) \right)^{1/2} \leq C_1(h^{-1/2}\tau^{2-\gamma} + h^2),$$

где $C_1 > 0$ — ограниченная величина, не зависящая от h, τ . $z^{(i)} = u - y^{(i)}$, $w^{(i)} = y^{(i+1)} - y^{(i)}$, $\|y^{(i)}\|^2 = \sum_{x \in \omega_i} h_1 h_2 (y^{(i)})^2$.

Аналогичные результаты можно получить и для уравнений с оператором общего вида.

Пример 2. Рассмотрим задачу (6) с несамосопряженным эллиптическим оператором и неоднородной правой частью

$$\frac{\partial^\beta u}{\partial t^\beta} + L^* u = f(x, t), \quad x \in G, \quad t > 0, \tag{8}$$

где

$$L^* u = - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} k_{\alpha\alpha}(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \sum_{\alpha=1}^2 b_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + c(x)u, \quad c(x) \geq 0.$$

Будем считать среду несжимаемой, т.е. $\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial b_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0$, $x \in G$. Используя это условие, оператор L^* можно выписать в дивергентной форме [13]:

$$\begin{aligned}
L^* u &= - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} k_{\alpha\alpha}(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + 0.5 \sum_{\alpha=1}^2 b_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \\
&+ 0.5 \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (b_\alpha(x)u) + c(x)u.
\end{aligned}$$

Оператор L^* аппроксимируем обычным образом, используя для конвективных членов центральные разности, при этом

$$A^*y = Ay + c(x)y + 0.5 \sum_{\alpha=1}^2 b_{\alpha}(x)y_{x_{\alpha}}^{\circ} + 0.5 \sum_{\alpha=1}^2 (b_{\alpha}(x)y)_{x_{\alpha}}^{\circ}.$$

Алгоритм (7) для задачи с несамосопряженным оператором сохраняется, при этом оператор A следует заменить на A^* , операторы A_1, A_2 – на A_i^* , $i = 1, 2$, где

$$\begin{aligned} A_1^*y &= (A_1y + 0.5cy + 0.25h_1^{-1}(b_1 + b_1^{(-1_1)})y^{(-1_1)} + \\ &\quad + 0.25(b_2y_{x_2}^{\circ} + (b_2y)_{x_2}^{\circ})), \quad \tilde{A}_1 = \Gamma(2 - \gamma)A_1^*, \\ A_2^*y &= (A_2y + 0.5cy - 0.25h_1^{-1}(b_1 + b_1^{(+1_1)})y^{(+1_1)} + \\ &\quad + 0.25(b_2y_{x_2}^{\circ} + (b_2y)_{x_2}^{\circ})) \quad \tilde{A}_2 = \Gamma(2 - \gamma)A_2^*. \end{aligned}$$

соответственно.

Отметим, что повышение размерности и наличие смешанных производных не вносит дополнительных трудностей в конструирование и исследование метода. При этом, если количество разбиений произвольно, но ограничено, то результаты теорем из [13] сохраняются. Если количество разбиений на подобласти по порядку совпадает с числом разбиений сетки по направлению x_1 , т.е. $N \sim N_1$, то точность метода ухудшается и порядок точности становится равным $O(h^{-1}\tau^{\gamma} + h^2)$.

Пример 3. Рассмотрим разбиение на подобласти, количество которых практически совпадает с числом узлов сетки. При этом, как и в статье [14] для реализации алгоритма в каждой ячейке получим схему структурно в реализации близкую к явной.

Разобьем область ω на подобласти $\omega_{i_1i_2} = \{(x_{i_1}, x_{i_2}), (x_{i_1}, x_{i_2+1}), (x_{i_1+1}, x_{i_2+1}), (x_{i_1+1}, x_{i_2})\}$. В каждой из четырех точек подобласти определим четыре значения сеточной функции $y_{i_1i_2} = (y_{i_1i_2}^{(0)}, \dots, y_{i_1i_2}^{(3)})$ (соответствие компонент решения узлам области сетки показано на рис. 2). Так как в каждой из подобластей определены свои сеточные значения решения, то в каждой узловой точке сеточной области будут заданы четыре, вообще говоря, различных сеточных значения, соответствующие количеству прилегаемых к ней подобластей.

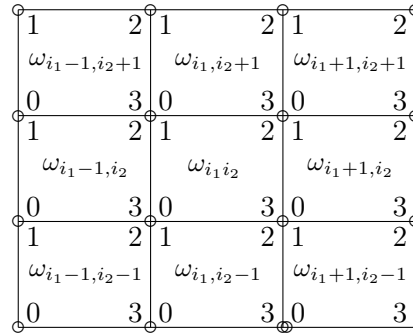


Рис. 2: Фрагмент сетки ω .

Так, $y_{i_1i_2}^{(0)}, y_{i_1,i_2-1}^{(1)}, y_{i_1-1,i_2-1}^{(2)}, y_{i_1-1,i_2}^{(3)}$ сеточные значения определенные в точке (x_{i_1}, x_{i_2}) .

Рассмотрим случай, когда оператор A не содержит смешанных производных, $k_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$. Тогда на пятиточечном шаблоне разностный оператор, следуя [10], представим $Ay = - \sum_{\alpha=1}^2 A_{\alpha}y$, $A_{\alpha}y = (a_{\alpha}y_{\bar{x}_{\alpha}})_{x_{\alpha}}$, $\alpha = 1, 2$. Определим разностный оператор $A_{i_1i_2}$ при $x \in \omega_{i_1i_2}$

$$A_{i_1i_2}y_{i_1i_2} = (A_{i_1i_2}^{(0)}y_{i_1i_2}^{(0)}, \dots, A_{i_1i_2}^{(3)}y_{i_1i_2}^{(3)}), \quad A_{i_1i_2}^{(0)}y_{i_1i_2}^{(0)} = -0.5 \sum_{\alpha=1}^2 A_{\alpha}^{+}y_{i_1i_2}^{(0)},$$

$$A_{i_1 i_2}^{(1)} y_{i_1 i_2}^{(1)} = -0.5(A_1^+ + A_2^-) y_{i_1 i_2}^{(1)}, \quad A_{i_1 i_2}^{(2)} y_{i_1 i_2}^{(2)} = -0.5 \sum_{\alpha=1}^2 A_{\alpha}^{-} y_{i_1 i_2}^{(2)},$$

$$A_{i_1 i_2}^{(3)} y_{i_1 i_2}^{(3)} = -0.5(A_1^- + A_2^+) y_{i_1 i_2}^{(3)}, \quad A_{\alpha}^+ y = h_{\alpha}^{-1} a_{\alpha} y_{x_{\alpha}}, \quad A_{\alpha}^- y = -h_{\alpha}^{-1} a_{\alpha}^{(-1_{\alpha})} y_{\bar{x}_{\alpha}}, \quad \alpha = 1, 2.$$

На базе такого разбиения оператора можно построить ряд разностных алгоритмов. Один из них будет иметь вид

$$\frac{1}{\tau^{\gamma}} (\hat{y}_{i_1 i_2}^{(j)} - \tilde{y}^{(j)}_{i_1 i_2} + 2\tilde{A}_{i_1 i_2}^{(j)} (\hat{y}_{i_1 i_2}^{(j)} - y_{i_1 i_2}^{(j)}) + \tilde{R}_{i_1 i_2}^{(j)} y_{i_1 i_2} = 0, \quad j = \overline{0, 3},$$

где

$$\tilde{y}_{i_1 i_2}^{(j)} = (1/4) \sum_{j=0}^3 y_{i_1 i_2}^{(j)}, \quad \tilde{R}_{i_1 i_2}^{(j)} = \Gamma(2 - \gamma) R_{i_1 i_2}^{(j)} + R_{i_1 i_2}^{*(j)},$$

$$R_{i_1 i_2}^{*(j)} = \tau^{-\gamma} \sum_{l=1}^{s+1} b_l \tilde{y}_{i_1 i_2}^{(l)j+1-l},$$

$$R_{i_1 i_2}^{(0)} y_{i_1 i_2} = A_{i_1 i_2}^{(0)} y_{i_1 i_2}^{(0)} + A_{i_1, i_2-1}^{(1)} y_{i_1, i_2-1}^{(1)} + A_{i_1-1, i_2-1}^{(2)} y_{i_1-1, i_2-1}^{(2)} + A_{i_1-1, i_2}^{(3)} y_{i_1-1, i_2}^{(3)},$$

$$R_{i_1 i_2}^{(1)} y_{i_1 i_2} = A_{i_1 i_2}^{(1)} y_{i_1 i_2}^{(1)} + A_{i_1-1, i_2}^{(2)} y_{i_1-1, i_2}^{(2)} + A_{i_1-1, i_2+1}^{(3)} y_{i_1-1, i_2+1}^{(3)} + A_{i_1, i_2+1}^{(0)} y_{i_1, i_2+1}^{(0)},$$

$$R_{i_1 i_2}^{(2)} y_{i_1 i_2} = A_{i_1 i_2}^{(2)} y_{i_1 i_2}^{(2)} + A_{i_1, i_2+1}^{(3)} y_{i_1, i_2+1}^{(3)} + A_{i_1+1, i_2+1}^{(0)} y_{i_1+1, i_2+1}^{(0)} + A_{i_1+1, i_2}^{(1)} y_{i_1+1, i_2}^{(1)},$$

$$R_{i_1 i_2}^{(3)} y_{i_1 i_2} = A_{i_1 i_2}^{(3)} y_{i_1 i_2}^{(3)} + A_{i_1+1, i_2}^{(0)} y_{i_1+1, i_2}^{(0)} + A_{i_1+1, i_2-1}^{(1)} y_{i_1+1, i_2-1}^{(1)} + A_{i_1, i_2-1}^{(2)} y_{i_1, i_2-1}^{(2)},$$

$$\tilde{y}_{i_1 i_2}^{(0)} = 0.25(y_{i_1 i_2}^{(0)} + y_{i_1, i_2-1}^{(1)} + y_{i_1-1, i_2-1}^{(2)} + y_{i_1-1, i_2}^{(3)}),$$

$$\tilde{y}_{i_1 i_2}^{(1)} = 0.25(y_{i_1 i_2}^{(1)} + y_{i_1, i_2+1}^{(0)} + y_{i_1-1, i_2+1}^{(3)} + y_{i_1-1, i_2}^{(2)}),$$

$$\tilde{y}_{i_1 i_2}^{(2)} = 0.25(y_{i_1 i_2}^{(2)} + y_{i_1, i_2+1}^{(3)} + y_{i_1+1, i_2+1}^{(0)} + y_{i_1+1, i_2}^{(1)}),$$

$$\tilde{y}_{i_1 i_2}^{(3)} = 0.25(y_{i_1 i_2}^{(3)} + y_{i_1+1, i_2}^{(0)} + y_{i_1+1, i_2-1}^{(1)} + y_{i_1, i_2-1}^{(2)}).$$

В подобласти $\omega_{i_1 i_2}$ данным алгоритмом определяются только четыре неизвестных значения, которые легко вычисляются явным образом. Поэтому можно говорить [13], что в данном примере предложен алгоритм реализуемый по явной схеме. Нетрудно показать, что оператор $A_{i_1 i_2}$ самосопряжен и положительно определен, так как

$$(A_{i_1 i_2} y_{i_1 i_2}, y_{i_1 i_2}) = \sum_{\alpha=1}^2 a_{\alpha} (y_{x_{\alpha}})^2 \Big|_{x=x_{i_1 i_2}} + \sum_{\alpha=1}^2 a_{\alpha}^{(-1_{\alpha})} (y_{\bar{x}_{\alpha}})^2 \Big|_{x=x_{i_1+1, i_2+1}}.$$

Применяя методику из [14] несложно убедиться, что соответствующие теоремы об устойчивости и сходимости справедливы и для данного алгоритма.

Заключение. В данной работе предлагаются новые многокомпонентные алгоритмы расщепления для многомерных дифференциальных уравнений с дробными производными по времени. Алгоритмы основаны на многокомпонентном расщеплении с аддитивной аппроксимацией пространственного оператора задачи и расщепления по подобластям, а аппроксимация дробной производной по времени базируется на различных дискретных аналогах дробных производных. Это, несомненно, позволит применять на практике эти методы при решении сложных инженерно-практических задач для многомерных дифференциальных уравнений, описывающих аномальные процессы диффузии. Алгоритмы позволяют построить параллельные программы решения задачи с использованием принципа разделения данных [15]. Численный эксперимент подтвердил хорошую работу алгоритмов.

Литература

1. Тарасов В.Е. *Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка*. М.-Ижевск, 2011.
2. Podlubny I. *Fractional differential equations*. Academic Press, New York, 1999.
3. Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. *J. Phys. Rep.* V. 339 (2000), 1–77.
4. Абрашина–Жадаева, Н.Г., Тимощенко И.А. Дробно-дифференциальная модель описания электродиффузионного процесса и разностные методы ее реализации. *Сеточные методы для краевых задач и приложения: материалы Десятой Международной конференции*. Казань: Казанский университет. (2014), 29–35.
5. Абрашина–Жадаева Н.Г., Тимощенко И.А. Конечно-разностные методы для уравнения диффузии с производными дробных порядков в многомерной области. *Дифференц. уравнения*. Т. 49, № 7 (2013), 819–825.
6. Meerschaert M., Tadjeran C. Finite difference approximations for two-sided space-fractional partial differential equations. *Applied Numerical Mathematics*. V. 56, №1 (2006), 80–90.
7. Таукенова Ф.И., Шхануков М.Х. Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка. *ЖВМ и МФ*. Т. 46, № 10 (2006) 1871–1881.
8. Шханукова М.М., Шхануков-Лафишев М.Х. Локально-одномерные разностные схемы для уравнений диффузии дробного порядка. *ЖВМ и МФ*. Т. 48, № 10 (2008) 1878–1887.
9. Алиханов А.А. Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка. *Дифференц. уравнения*. Т. 46, №5 (2010) 660–666.
10. Абрашин В.Н., Жадаева Н.Г. *Дифференц. уравнения и их приложения*. Вильнюс (1988) вып. 43, 22–30.
11. Абрашин В.Н. Об одном варианте метода переменных направлений решения многомерных задач математической физики. I. *Дифференц. уравнения*. Т. 26, №2 (1990) 314–323.
12. Жадаева Н.Г. Многокомпонентный метод переменных направлений решения многомерных задач для эллиптических уравнений со смешанными производными. *Дифференц. уравнения*. Т. 34, №7 (1998) 948–957.
13. Абрашина–Жадаева Н.Г. Многокомпонентные векторные схемы расщепления для задач математической физики. *Автореферат на соискание ученой степени доктора физико-математических наук*. 2008, Казань.
14. Жадаева Н.Г., Самарская Е.А. Метод декомпозиции области решения сеточных параболических задач. *Дифференц. уравнения*. Т. 35, №2 (1999) 225–231.
15. Борисенко А.Б., Карпушкин С.В., Глебов А.О. Параллельный алгоритм решения трехмерного нестационарного уравнения теплопроводности с использованием явной разностной схемы. *Вестник Тамбовского гос. тех. универ.* Т. 16, №3 (2010) 573–577.
16. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их применения*. Минск, Наука и техника, 1987.
17. Самарский А.А. *Теория разностных схем*. М., Наука, 1989.
18. Белоцерковский О.М., Гуцин В.А., Щенников В.В. Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости. *ЖВМ и МФ*. Т. 15, № 1 (1975) 197–207.
19. Марчук Г.И. *Методы вычислительной математики*. М., Наука, 1989.
20. Яненко Н.Н. *Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики*. Новосибирск: Наука, 1967.