БЕЛОРУССКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ТРУДЫ
10-го МЕЖДУНАРОДНОГО НАУЧНОГО СЕМИНАРА АМАДЕ-2021

PROCEEDINGS
OF THE 10th INTERNATIONAL SCIENTIFIC SEMINAR AMADE-2021

Analytical Methods of Analysis and Differential Equations

AMADE

Minsk September 13–17, 2021 Belarus

УДК 517
ББК 22.161+22.162
А 64

Редактор:
С. В. Рогозин

А 64 Труды 10-го международного научного семинара АМАДЕ-2021, 13–17 сентября 2021 г., Минск, Беларусь, БГУ. — Минск: ИВЦ Минфина, 2022. – 144 с.

ISBN 978-985-880-238-7.

В настоящем сборнике представлены труды 10-го международного научного семинара “Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений” (АМАДЕ-2021). Семинар был организован и проведен Белорусским государственным университетом и Институтом математики НАН Беларуси.

Proceedings of the 10th International Scientific Workshop AMADE-2021, September 13–17, 2021, Minsk, Belarus, BSU. — Minsk: ICC Minfina, 2022. – 144 p.

The proceedings of the 10th International Scientific Workshop “Analytical Methods of Analysis and Differential Equations” (AMADE-2021) are presented in this book. The conference was organized and held by the Belarusian State University and Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus.

УДК 517
ББК 22.161+22.162

ISBN 978-985-880-238-7

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В настоящем издании представлены избранные труды участников 10-го международного научного семинара “Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений” (АМАДЕ-2021). Международный научный семинар АМАДЕ-2021 был организован Белорусским государственным университетом совместно с Институтом математики НАН Беларуси и состоялся 13–17 сентября 2021 года в Минске на базе Олимпийского спортивного комплекса “Стайки”. Этот научный форум проходил в форме семинара (воркшопа) — участникам были предложены лекции ведущих специалистов в области математического анализа и дифференциальных уравнений и их приложений. Кроме того, в рамках семинара работали секции “Дифференциальные уравнения”, “Вещественный и комплексный анализ”, “Современные проблемы механики” и “Математические методы в экономических исследованиях”. Расширенные доклады как пленарных докладчиков, так и участников всех этих секций представлены в данном сборнике избранных трудов АМАДЕ-2021.

Следует также отметить мемориальные мероприятия, прошедшие во время АМАДЕ-2021. В первый день работы были организованы пленарные заседания, посвященные памяти профессора Стасиса Руткаускаса (1951–2018), постоянного участника конференций/семинаров АМАДЕ, ушедшего из жизни после АМАДЕ-2018. 15 сентября 2021 на механико-математическом факультете была открыта аудитория имени профессора Анатолия Александровича Килбаса (1948–2010), инициатора и бессменного организатора конференций АМАДЕ вплоть до 2009 г. В открытии аудитории А.А.Килбаса участвовали on-line его коллеги и друзья — С.Г. Самко (Фаро, Португалия) и О.И. Маричев (Шампейн, США).

Основные результаты, представленные в этом сборнике, связаны с решением задач, относящихся к следующим научным направлениям — обобщения аналитических функций; скалярные, матричные и нелинейные краевые задачи для аналитических функций и их приложения к задачам теории упругости; интегральные уравнения теории переноса излучения и стационарной теории теплопроводности; многомерые интегральные преобразования; приложения дробного исчисления к решению задач анаомальной диффузии; задачи управления потоками в сетях; граничные задачи для уравнений в частных производных; дифференциальные уравнения в частных производных со свойством Пенлеве; многомерные системы обыкновенных дифференциальных уравнений; математические модели в экономических исследованиях.

С.В. Рогозин
Редактор сборника трудов
10-го международного научного
семинара АМАДЕ-2021

УДК 519.63

МНОГОКОМПОНЕНТНЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ АНОМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ ДИФФУЗИИ

Н. Г. Абрашина-Жадаева[1], **И. А. Тимощенко**[2]

e-mail: [1]zhadaeva282@gmail.com, [2]timoshchenkoia@bsu.by

Обсуждается новый класс многокомпонентных численных методов для решения задач математической физики для описания процессов аномальной диффузии в многомерных областях. Алгоритмы основаны на многокомпомпонентном векторном расщеплении с аддитивной аппроксимацией оператора задачи, а аппроксимация дробной производной по времени базируется на различных дискретных дробных аналогах производных.

Ключевые слова: *Дробные частные производные; аддитивная аппроксимация; векторное расщепление; многокомпонентные схемы; численные методы; аномальная диффузия.*

MULTICOMPONENT METHODS FOR ANOMALOUS DIFFUSION PROCESSES

N. G. Abrashina-Zhadaeva[1], **I. A. Timoshchenko**[2]

e-mail: [1]zhadaeva282@gmail.com, [2]timochshenkoia@bsu.by

A new class of multicomponent numerical methods for anomalous diffusion problems in multidimensional domain is discussed. The algorithms are based on multicomponent vector splitting with additive approximation of the operator of the problem, and the approximation of the fractional time derivative is based on various discrete analogues of fractional derivatives.

Keywords: *fractional partial derivatives; additive approximation; vector splitting; multicomponent schemmes; numerical methods; anomalous diffusion.*

Mathematics Subject Classification (2020): Primary 35G16, Secondary 35R11, 65M55.

Последние годы большое внимание уделяется исследованиям алгоритмов сложных задач с аномально протекающими процессами (см. [1–4] и цитируемую там литературу). Поскольку такие задачи, как правило, связаны с производными дробного порядка, которые относятся к нелокальным интегро-дифференциальным операторам, то при численном моделировании требуется задействовать значительные вычислительные ресурсы [5–9]. Возможно это является сдерживающим механизмом использования дробно-дифференциальных моделей в практических целях.

В этой связи особый интерес представляют параллельные вычислительные системы, а для их использования — класс многокомпонентных разностных схем для построения методов декомпозиции области [10–12]. Ранее было показано, что такие алгоритмы как метод декомпозиции по подобластям и по физическим процессам, хорошо себя зарекомендовали при расчетах сложных задач с производными целых порядков [13, 14]. Возникающие при этом разностные схемы обладают существенно более высокой точностью по сравнению с методами покомпонентного расщепления и метода переменных направлений и позволяют проводить распараллеленные вычисления [12].

Данная работа затрагивает непосредственно вопросы, связанные с возможностью применения численных методов, основанных на расщеплении [17, 18] по подобластям для многомерных задач. Эти задачи описывают аномальный перенос, обусловленный эффектами памяти.

Предварительно на отрезке интегрирования $0 < t < T$ введем сеточную область $\omega_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots\}$ и обозначим через $y^j = y(t_j)$ — сеточную функцию. Будем использовать дискретный аналог дробной производной по времени. Полагая, что $u(t)$ обладает необходимой гладкостью запишем [8, 16]:

$$\partial_{0t_j}^{\gamma} u = \frac{\tau^{1-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \sum_{i=0}^{j} b_i \frac{u_{i+1}-u_i}{\tau} + O(\tau), \qquad b_i = (i+1)^{1-\gamma} - i^{1-\gamma}, \tag{1}$$

или

$$\partial_{0t_j}^{\gamma} u = \frac{\tau^{-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} [u_j + \sum_{i=1}^{j-1} b_i u_i - b_{j-1} u_0] + O(\tau^{2-\gamma}). \tag{2}$$

Выражение (1) приведем к виду

$$\partial_{0t_j}^{\gamma} u = \frac{\tau^{1-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} u_{t_j} + \frac{\tau^{1-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \sum_{i=1}^{j-1} b_i u_{t_i} + O(\tau).$$

Пусть дифференциальный оператор A представим в виде [17]:

$$A = \sum_{\alpha=1}^{p} A_{\alpha}, \tag{3}$$

где A_{α} — линейные положительные операторы в гильбертовом пространстве H с теми же областями определения и значений, что и для A, т. е. $\bigcap_{\alpha=1}^{p} D(A_{\alpha}) = D(A)$. Отметим, что A_{α} — это так называемые, компоненты исходного оператора A — "одномерные" операторы. Известно [17], что такое аддитивное представление (3) лежит в основе большинства экономичных методов.

Рассмотрим новые разностные схемы вида ($k = \overline{1,p}$):

$$\frac{y_k^{s+1} - y_k^s}{\tau^{\gamma}} + \sum_{\alpha=1}^{k} \tilde{A}_{\alpha} y_{\alpha}^{s+1} + \sum_{\alpha=k+1}^{p} \tilde{A}_{\alpha} y_{\alpha}^{s} = \varphi^*, \tag{4}$$

$$\frac{y_k^{s+1} - {y^s}_k}{\tau^{\gamma}} + \sigma(\tilde{A}_k y_k^{s+1} - \tilde{A}_k y_k)^s + \sum_{\alpha=1}^{p} \tilde{A}_{\alpha} y_{\alpha}^{s} = \varphi^*, \tag{5}$$

где

$$\widetilde{A}_{\gamma} = \Gamma(2-\gamma) A_{\gamma}, \qquad \varphi^* = \Gamma(2-\gamma)\widehat{f} - \tau^{1-\gamma} \sum_{l=0}^{s} b_l y_t^l.$$

Покажем как для этого класса задач на основе схем, учитывающих результаты [14], можно построить методы декомпозиции разделения области. Проиллюстрируем предлагаемые решения примерами.

Рассмотрим в ограниченной области G m-мерного евклидова пространства ($m = 1, \ldots, p$) с кусочно-гладкой границей ∂G первую начально-краевую задачу для дифференциального уравнения с дробной производной по времени вида:

$$\partial_{0t}^{\gamma} u + Lu(x,t) = f(x,t), \quad x \in G, \tag{6}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \overline{G},$$

$$u(x,t)\big|_{\partial G} = 0, \quad 0 \le t \le T,$$

где

$$a_0 \sum_{i=1}^{m} {\xi_i}^2 \le \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \le a_1 \sum_{i=1}^{m} \xi_i^2,$$

$$a_0, a_1 = \text{ const } > 0, \quad x \in \overline{G} = G \cup \partial G.$$

Не ограничивая общности положим $f = 0$ и пусть $L(u) = \sum\limits_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)$ — симметричный эллиптический оператор с кусочно-гладкими ограниченными коэффициентами, зависящими от $x = (x_1, \ldots, x_m)$.

Пусть область G представима как обьединение конечного числа подобластей $G = \bigcup\limits_{\alpha=1}^{p} G_\alpha$, при этом допускается возможность налегания некоторых подобластей друг на друга. Для простоты изложения рассмотрим регулярную прямоугольную пространственную сетку ω_h с шагом h. Пусть область $\overline{\omega}_h$ разбита на подобласти $\overline{\omega}_h^k$ $(k = \overline{1,p})$, γ_h^k — внутренняя граница области ω_h^k, т.е. граница раздела между подобластями (рис. 1). На сетке ω_h введем сеточную функцию y и разностный оператор L_h, который на минимальном сеточном шаблоне дает второй порядок точности, является консервативным и положительно-определенным.

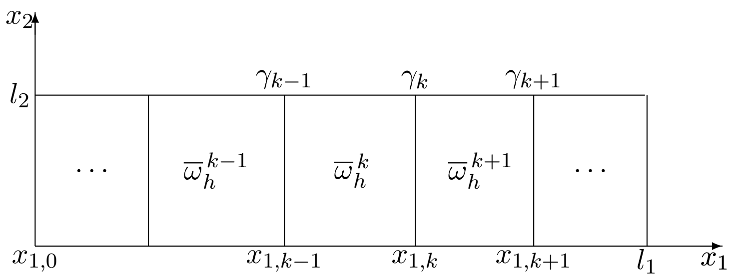

Рис. 1: Фрагмент разбиения расчетной области.

Рассмотрим на сетках $\overline{\omega}_h^k$ $(k = \overline{1,p})$ модификации схем многокомпонентного расщепления вида (4) и (5). Определим операторы A_α в уравнениях (4), (5). Еще раз отметим, что сеточная функция y_k определяется на сетке $x \in \overline{\omega}_h^k$ и для каждой сеточной области находятся свои y_k $(k = \overline{1,p})$. Уравнение (4) решается последовательно от области к области, а (5) может все y_k $(x \in \overline{\omega}_h^k)$ реализовывать одновременно во всей области, что весьма удобно для распараллеливания вычислений. Во внутренних узлах в k-х уравнениях (4), (5) $A_k = L_h$, т.е. выражение $L_h y_k$ полностью аппроксимирует Lu, а операторы $A_\alpha \equiv 0$ $(\alpha \neq k)$. При этом $\widetilde{A}_\alpha = \Gamma(2-\gamma)A_\alpha$.

На границе подобласти $\overline{\omega}_h^k$, т.е. $x \in \gamma_h^k$, оператор A выбирается из следующих условий: во-первых, таким образом, чтобы в $\overline{\omega}_h^k$ операторы A_k были неотрицательны, $[A_k y_k, y_k] \geq 0$, во-вторых, выражение $\sum\limits_{k=1}^{p} A_k y_k$ при $x \in \gamma_h^k$, $y_k = u$ $(k = \overline{1,p})$ равно $\sum\limits_{k=1}^{p} A_k u = L_h u$. В слагаемом $A_k y_k$ $(k \neq \alpha)$ при $x \in \gamma_h^k$ y_α не принадлежит области $\overline{\omega}_h^k$, а принадлежит одной из соседних подобластей. Таким образом, операторы A_α $(\alpha \neq k)$ связывают решение в подобласти $\overline{\omega}_h^k$ с соседними $\overline{\omega}_h^\alpha$ $(\alpha \neq k)$. Системы уравнений (4) и (5) аппроксимируют (6) с оператором L и обеспечивают алгоритмически разбиение задачи на подобласти.

Если подобласти пересекаются или имеют общую границу, то предлагаемый метод определяет несколько решений исходной задачи в точках контакта. Как и в [12–14] в такой ситуации в качестве решения можно либо брать любое из полученных решений, либо на нижнем слое можно заменить приближенное решение на среднее арифметическое решений из числа повторений в точке.

Пример 1. Рассмотрим задачу (6) в двумерной области и для упрощения выкладок положим, что уравнение однородное и не содержит смешанных производных, т. е. положим $k_{\alpha\beta}(x) = 0$, $\alpha \neq \beta$, $f = 0$. Разобьем область $\overline{D}$ на подобласти прямыми x_{1i} $(i = \overline{1,N})$, параллельными оси Ox_2, так, чтобы узлы сетки $x_{i_1} = i_1 h_1$ $(i_1 = \overline{0,N_1})$ лежали на соответствующих прямых. Тем самым сетка $\overline{\omega}$ разбивается на подобласти $\overline{\omega}_i$.

Разностная схема декомпозиции области в ω_k $(k = \overline{1,N})$ будет иметь вид

$$(\hat{y}^{(k)}-y^{(k)})/\tau^{\gamma}+\widetilde{A}\hat{y}^{(k)}+\tau^{1-\gamma}\sum_{l=2}^{s+1}b_l y_t^{(k)s-l+1}=0,\quad x\in\omega_k, \tag{7}$$

$$(\hat{y}^{(k)}-\tilde{y}^{k})/\tau^{\gamma}+\sigma\widetilde{A}_2(\hat{y}^{(k)}-y^{(k)})+$$

$$+\widetilde{A}_1 y^{(k-1)}+\widetilde{A}_2 y^{(k)}+\tau^{1-\gamma}\sum_{l=2}^{s+1}b_l y_t^{(k)s-l+1}=0,\quad \tilde{y}^{k}=0,5(y^{k-1}+y^{k}),\quad x\in\gamma_{k-1},$$

$$(\hat{y}^{(k)}-\tilde{y}^{k})/\tau^{\gamma}+\sigma\widetilde{A}_1(\hat{y}^{(k)}-y^{(k)})+$$

$$+\widetilde{A}_1 y^{(k)}+\widetilde{A}_2 y^{(k+1)}+\tau^{1-\gamma}\sum_{l=2}^{s+1}b_l y_t^{(k)s-l+1}=0,\quad \tilde{y}^{k}=0,5(y^{k+1}+y^{k}),\quad x\in\gamma_{k},$$

где

$$\widetilde{A}_1 y=\Gamma(2-\gamma)(-0.25\{(a_{22}y_{\overline{x}_2})_{x_2}+(a_{22}y_{x_2})_{\overline{x}_2}-h_1^{-1}(a_{11}+a_{11}^{(-1_1)})y_{\overline{x}_1}\}),$$

$$\widetilde{A}_2 y=\Gamma(2-\gamma)(-0.25\{(a_{22}y_{\overline{x}_2})_{x_2}+(a_{22}y_{x_2})_{\overline{x}_2}+h_1^{-1}(a_{11}+a_{11}^{(+1_1)})y_{x_1}\}).$$

Применяя методику [4], можно убедиться, что разностная схема (7) при достаточной гладкости искомого решения устойчива по начальным данным при условии неотрицательности A_i в норме $\|\cdot\|=\sqrt{(\cdot,\cdot)}$ для ее решения справедлива оценка $\|z^k\|=\|u^k-y^k\|\le M(\tau h^{-0,5}+ +h^2)$ где $M=const$. Если рассмотреть многокомпонентную схему (7) и по аналогии построить декомпозиционный метод, то справедлива:

Т е о р е м а. *При достаточно гладком решения исходной задачи алгоритм метода декомпозиции примера 1 (схема (7)) сходится и для его погрешности справедлива оценка*

$$\left(\sum_{i=1}^{N}\|z_t^{(i)}\|^2+\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{x\in\gamma_i}h_1h_2((\tilde{z}_t^{(i)})^2+(w_t^{(i)})^2)\right)^{1/2}\le C_1(h^{-1/2}\tau^{2-\gamma}+h^2),$$

где $C_1>0$ — ограниченная величина, не зависящая от h,τ. $z^{(i)}=u-y^{(i)}$, $w^{(i)}=y^{(i+1)}-y^{(i)}$, $\|y^{(i)}\|^2=\sum\limits_{x\in\omega_i}h_1h_2(y^{(i)})^2$.

Аналогичные результаты можно получить и для уравнений с оператором общего вида.

Пример 2. Рассмотрим задачу (6) с несамосопряженным эллиптическим оператором и неоднородной правой частью

$$\frac{\partial^{\beta}u}{\partial t^{\beta}}+L^{*}u=f(x,t),\quad x\in G,\quad t>0, \tag{8}$$

где

$$L^{*}u=-\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}k_{\alpha\alpha}(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+\sum_{\alpha=1}^{2}b_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+c(x)u,\quad c(x)\ge 0.$$

Будем считать среду несжимаемой, т.е. $\sum\limits_{\alpha=1}^{2}\dfrac{\partial b_\alpha}{\partial x_\alpha}=0$, $x\in G$. Используя это условие,оператор L^{*} можно выписать в дивергентной форме [13]:

$$L^{*}u=-\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}k_{\alpha\alpha}(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+0.5\sum_{\alpha=1}^{2}b_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+$$

$$+0.5\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(b_\alpha(x)u)+c(x)u.$$

Оператор L^* аппроксимируем обычным образом, используя для конвективных членов центральные разности, при этом

$$A^*y = Ay + c(x)y + 0.5\sum_{\alpha=1}^{2} b_\alpha(x)y_{\overset{\circ}{x}_\alpha} + 0.5\sum_{\alpha=1}^{2}(b_\alpha(x)y)_{\overset{\circ}{x}_\alpha}.$$

Алгоритм (7) для задачи с несамосопряженным оператором сохраняется, при этом оператор A следует заменить на A^*, операторы A_1, A_2 – на A_i^*, $i = 1, 2$, где

$$A_1^*y = (A_1y + 0.5cy + 0.25h_1^{-1}(b_1 + b_1^{(-1_1)})y^{(-1_1)}+$$
$$+0.25(b_2y_{\overset{\circ}{x}_2} + (b_2y)_{\overset{\circ}{x}_2})), \quad \tilde{A}_1 = \Gamma(2-\gamma)A_1^*,$$
$$A_2^*y = (A_2y + 0.5cy - 0.25h_1^{-1}(b_1 + b_1^{(+1_1)})y^{(+1_1)}+$$
$$+0.25(b_2y_{\overset{\circ}{x}_2} + (b_2y)_{\overset{\circ}{x}_2})) \quad \tilde{A}_2 = \Gamma(2-\gamma)A_2^*.$$

соответственно.

Отметим, что повышение размерности и наличие смешанных производных не вносит дополнительных трудностей в конструирование и исследование метода. При этом, если количество разбиений произвольно, но ограничено, то результаты теорем из [13] сохраняются. Если количество разбиений на подобласти по порядку совпадает с числом разбиений сетки по направлению x_1, т. е. $N \sim N_1$, то точность метода ухудшается и порядок точности становится равным $O(h^{-1}\tau^\gamma + h^2)$.

Пример 3. Рассмотрим разбиение на подобласти, количество которых практически совпадает с числом узлов сетки. При этом, как и в статье [14] для реализации алгоритма в каждой ячейке получим схему структурно в реализации близкую к явной.

Разобьем область ω на подобласти $\omega_{i_1i_2} = \{(x_{i_1}, x_{i_2}), (x_{i_1}, x_{i_2+1}), (x_{i_1+1}, x_{i_2+1}), (x_{i_1+1}, x_{i_2})\}$. В каждой из четырех точек подобласти определим четыре значения сеточной функции $y_{i_1i_2} = (y_{i_1i_2}^{(0)}, \dots, y_{i_1i_2}^{(3)})$ (соответствие компонент решения узлам области сетки показано на рис. 2). Так как в каждой из подобластей определены свои сеточные значения решения, то в каждой узловой точке сеточной области будут заданы четыре, вообще говоря, различных сеточных значения, соответствующие количеству прилегаемых к ней подобластей.

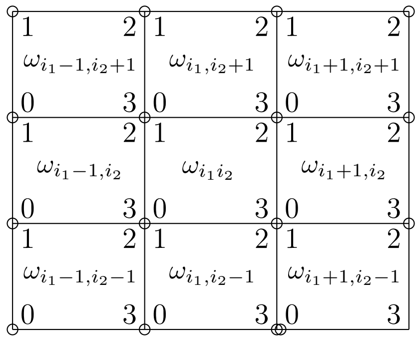

Рис. 2: Фрагмент сетки ω.

Так, $y_{i_1i_2}^{(0)}$, $y_{i_1,i_2-1}^{(1)}$, $y_{i_1-1,i_2-1}^{(2)}$, $y_{i_1-1,i_2}^{(3)}$ сеточные значения определенные в точке (x_{i_1}, x_{i_2}).

Рассмотрим случай, когда оператор A не содержит смешанных производных, $k_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$. Тогда на пятиточечном шаблоне разностный оператор, следуя [10], представим $Ay = -\sum\limits_{\alpha=1}^{2} A_\alpha y$, $A_\alpha y = (a_\alpha y_{\overline{x}_\alpha})_{x_\alpha}$, $\alpha = 1, 2$. Определим разностный оператор $A_{i_1i_2}$ при $x \in \omega_{i_1i_2}$

$$A_{i_1i_2}y_{i_1i_2} = (A_{i_1i_2}^{(0)}y_{i_1i_2}^{(0)}, \dots, A_{i_1i_2}^{(3)}y_{i_1i_2}^{(3)}), \quad A_{i_1i_2}^{(0)}y_{i_1i_2}^{(0)} = -0.5\sum_{\alpha=1}^{2} A_\alpha^+ y_{i_1i_2}^{(0)},$$

$$A^{(1)}_{i_1i_2}y^{(1)}_{i_1i_2} = -0.5(A_1^+ + A_2^-)y^{(1)}_{i_1i_2}, \quad A^{(2)}_{i_1i_2}y^{(2)}_{i_1i_2} = -0.5\sum_{\alpha=1}^{2} A_\alpha^- y^{(2)}_{i_1i_2},$$

$$A^{(3)}_{i_1i_2}y^{(3)}_{i_1i_2} = -0.5(A_1^- + A_2^+)y^{(3)}_{i_1i_2}, \quad A_\alpha^+ y = h_\alpha^{-1} a_\alpha y_{x_\alpha}, \quad A_\alpha^- y = -h_\alpha^{-1} a_\alpha^{(-1_\alpha)} y_{\overline{x}_\alpha}, \quad \alpha = 1,2.$$

На базе такого разбиения оператора можно построить ряд разностных алгоритмов. Один из них будет иметь вид

$$\frac{1}{\tau^\gamma}(\hat{y}^{(j)}_{i_1i_2} - \tilde{y}(j)_{i_1i_2} + 2\tilde{A}^{(j)}_{i_1i_2}(\hat{y}^{(j)}_{i_1i_2} - y^{(j)}_{i_1i_2}) + \tilde{R}^{(j)}_{i_1i_2}y_{i_1i_2} = 0, \quad j = \overline{0,3},$$

где

$$\tilde{y}^{(j)}_{i_1i_2} = (1/4)\sum_{j=0}^{3} y^{(j)}, \quad \tilde{R}^{(j)}_{i_1i_2} = \Gamma(2-\gamma)R^{(j)}_{i_1i_2} + R^{*(j)}_{i_1i_2},$$

$$R^{*(j)}_{i_1i_2} = \tau^{-\gamma}\sum_{l=1}^{s+1} b_l \tilde{y}^{(l)j+1-l}_{i_1i_2t},$$

$$R^{(0)}_{i_1i_2}y_{i_1i_2} = A^{(0)}_{i_1i_2}y^{(0)}_{i_1i_2} + A^{(1)}_{i_1,i_2-1}y^{(1)}_{i_1,i_2-1} + A^{(2)}_{i_1-1,i_2-1}y^{(2)}_{i_1-1,i_2-1} + A^{(3)}_{i_1-1,i_2}y^{(3)}_{i_1-1,i_2},$$

$$R^{(1)}_{i_1i_2}y_{i_1i_2} = A^{(1)}_{i_1i_2}y^{(1)}_{i_1i_2} + A^{(2)}_{i_1-1,i_2}y^{(2)}_{i_1-1,i_2} + A^{(3)}_{i_1-1,i_2+1}y^{(3)}_{i_1-1,i_2+1} + A^{(0)}_{i_1,i_2+1}y^{(0)}_{i_1,i_2+1},$$

$$R^{(2)}_{i_1i_2}y_{i_1i_2} = A^{(2)}_{i_1i_2}y^{(2)}_{i_1i_2} + A^{(3)}_{i_1,i_2+1}y^{(3)}_{i_1,i_2+1} + A^{(0)}_{i_1+1,i_2+1}y^{(0)}_{i_1+1,i_2+1} + A^{(1)}_{i_1+1,i_2}y^{(1)}_{i_1+1,i_2},$$

$$R^{(3)}_{i_1i_2}y_{i_1i_2} = A^{(3)}_{i_1i_2}y^{(3)}_{i_1i_2} + A^{(0)}_{i_1+1,i_2}y^{(0)}_{i_1+1,i_2} + A^{(1)}_{i_1+1,i_2-1}y^{(1)}_{i_1+1,i_2-1} + A^{(2)}_{i_1,i_2-1}y^{(2)}_{i_1,i_2-1},$$

$$\begin{aligned}
\tilde{y}^{(0)}_{i_1i_2} &= 0.25(y^{(0)}_{i_1i_2} + y^{(1)}_{i_1,i_2-1} + y^{(2)}_{i_1-1,i_2-1} + y^{(3)}_{i_1-1,i_2}),\\
\tilde{y}^{(1)}_{i_1i_2} &= 0.25(y^{(1)}_{i_1i_2} + y^{(0)}_{i_1,i_2+1} + y^{(3)}_{i_1-1,i_2+1} + y^{(2)}_{i_1-1,i_2}),\\
\tilde{y}^{(2)}_{i_1i_2} &= 0.25(y^{(2)}_{i_1i_2} + y^{(3)}_{i_1,i_2+1} + y^{(0)}_{i_1+1,i_2+1} + y^{(1)}_{i_1+1,i_2}),\\
\tilde{y}^{(3)}_{i_1i_2} &= 0.25(y^{(3)}_{i_1i_2} + y^{(0)}_{i_1+1,i_2} + y^{(1)}_{i_1+1,i_2-1} + y^{(2)}_{i_1,i_2-1}).
\end{aligned}$$

В подобласти $\omega_{i_1i_2}$ данным алгоритмом определяются только четыре неизвестных значения, которые легко вычисляются явным образом. Поэтому можно говорить [13], что в данном примере предложен алгоритм реализуемый по явной схеме. Нетрудно показать, что оператор $A_{i_1i_2}$ самосопряжен и положительно определен, так как

$$(A_{i_1i_2}y_{i_1i_2}, y_{i_1i_2}) = \sum_{\alpha=1}^{2} a_\alpha (y_{x_\alpha})^2\Big|_{x=x_{i_1i_2}} + \sum_{\alpha=1}^{2} a_\alpha^{(-1_\alpha)}(y_{\overline{x}_\alpha})^2\Big|_{x=x_{i_1+1,i_2+1}}.$$

Применяя методику из [14] несложно убедиться, что соответствующие теоремы об устойчивости и сходимости справедливы и для данного алгоритма.

Заключение. В данной работе предлагаются новые многокомпонентные алгоритмы расщепления для многомерных дифференциальных уравнений с дробными производными по времени. Алгоритмы основаны на многокомпомпонентном расщеплении с аддитивной аппроксимацией пространственного оператора задачи и расщепления по подобластям, а аппроксимация дробной производной по времени базируется на различных дискретных аналогах дробных производных. Это, несомненно, позволит применять на практике эти методы при решении сложных инженерно-практических задач для многомерных дифференциальных уравнений, описывающих аномальные процессы диффузии. Алгоритмы позволяют построить параллельные программы решения задачи с использованием принципа разделения данных [15]. Численный эксперимент подтвердил хорошую работу алгоритмов.

Литература

1. *Тарасов В.Е. Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка.* М.-Ижевск, 2011.

2. *Podlubny I. Fractional differential equations.* Academic Press, New York, 1999.

3. *Metzler R., Klafter J.* The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. *J. Phys. Rep.* V. 339 (2000), 1–77.

4. *Абрашина–Жадаева, Н.Г., Тимощенко И.А.* Дробно-дифференциальная модель описания электродиффузионного процесса и разностные методы ее реализации.. *Сеточные методы для краевых задач и приложения: материалы Десятой Международной конференции. Казань: Казанский университет.* (2014), 29–35.

5. *Абрашина–Жадаева Н.Г., Тимощенко И.А.* Конечно-разностные методы для уравнения диффузии с производными дробных порядков в многомерной области. *Дифференц. уравнения.* Т. 49, № 7 (2013), 819–825.

6. *Meerschaert M., Tadjeran C.* Finite difference approximations for two-sided space-fractional partial differential equations. *Applied Numerical Mathematics.* V. 56, №1 (2006), 80–90.

7. *Таукенова Ф.И., Шхануков М.Х.* Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка. *ЖВМ и МФ.* Т. 46, № 10 (2006) 1871–1881.

8. *Шханукова М.М., Шхануков-Лафишев М.Х.* Локально-одномерные разностные схемы для уравнений диффузии дробного порядка. *ЖВМ и МФ.* Т. 48, № 10 (2008) 1878–1887.

9. *Алиханов А.А.* Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка. *Дифференц. уравнения.* Т. 46, №5 (2010) 660–666.

10. *Абрашин В.Н., Жадаева Н.Г. . Дифференц. уравнения и их приложения.* Вильнюс (1988) вып. 43, 22–30.

11. *Абрашин В.Н.* Об одном варианте метода переменных направлений решения многомерных задач математической физики. I. *Дифференц. уравнения.* Т. 26, №2 (1990) 314–323.

12. *Жадаева Н.Г.* Многокомпонентный метод переменных направлений решения мномерных задач для эллиптических уравнений со смешанными производными. *Дифференц. уравнения.* Т. 34, №7 (1998) 948–957.

13. *Абрашина–Жадаева Н.Г.* Многокомпонентные векторные схемы расщепления для задач математической физики.. *Автореферат на соискание ученой степени доктора физико-математических наук.* 2008, Казань.

14. *Жадаева Н.Г., Самарская Е.А.* Метод декомпозиции области решения сеточных параболических задач. *Дифференц. уравнения.* Т. 35, №2 (1999) 225-231.

15. *Борисенко А.Б., Карпушкин С.В., Глебов А.О.* Параллельный алгоритм решения трехмерного нестационарного уравнения теплопроводности с использованием явной разностной схемы. *Вестник Тамбовскокого гос. тех. универ.* Т. 16, №3 (2010) 573–577.

16. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их применения.* Минск, Наука и техника, 1987.

17. *Самарский А.А. Теория разностных схем.* М., Наука, 1989.

18. *Белоцерковский О.М., Гущин В.А., Щенников В.В.* Метод расщепления в применении к решению задач динамики вязкой несжимаемой жидкости. *ЖВМ и МФ.* Т. 15, № 1 (1975) 197–207.

19. *Марчук Г.И. Методы вычислительной математики.* М., Наука, 1989.

20. *Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики.* Новосибирск: Наука, 1967.

УДК 517.537

ТЕОРЕМЫ О ГЛОБАЛЬНОМ ДИФФЕОМОРФИЗМЕ И О НЕЯВНОМ ОТОБРАЖЕНИИ ДЛЯ p-ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

В. В. Довгодилин

e-mail: footballer4@mail.ru

В статье рассмотрены некоторые свойства p-голоморфных функций. В частности, приведены аналог теоремы Ролля и теорема о глобальном диффеорморфизме для p-голоморфных функций. Изучены некоторые свойства отображений с помощью данных функций. Доказана теорема о неявной функции p-комплексного переменного.

Ключевые слова: *дуальные числа; кольцо p-комплексных чисел; делители нуля; p-голоморфность; диффеоморфизм; p-голоморфные отображения; теорема о неявной функции.*

A GLOBAL DIFFEOMORPHISM THEOREM AND AN IMPLICIT MAPPING THEOREM FOR p-HOLOMORPHIC FUNCTIONS

V. V. Dovgodilin

e-mail: footballer4@mail.ru

In the article some properties of p-holomorphic functions are discussed. In particular, an analogue of Rolle's theorem and a global diffeormorphism theorem for p-holomorphic functions are given. Some properties of mappings using these functions are studied. An implicit function theorem for a p-complex variable is proved.

Keywords: *dual numbers; ring of p-complex numbers; zero divisors; p-holomorphy; diffeomorphism; p-holomorphic mappings; implicit function theorem.*

Mathematics Subject Classification (2020): Primary 30G35, Secondary 30G99.

Введение

Теория p-комплексных (дуальных) чисел и функций p-комплексного переменного в математической литературе освещена недостаточно. Некоторые имеющиеся результаты приведены в [1–4]. Дуальные числа находят применение в различных областях математики и физики, поэтому актуальным является дальнейшее изучение свойств p-комплексных функций. В статье приведены аналог теоремы Ролля и теорема о глобальном диффеорморфизме для p-голоморфных функций. Рассмотрены отображения прямоугольников. Доказана теорема о неявной функции p-комплексного переменного.

1. Теорема о глобальном диффеоморфизме

Пусть $\mathbb{C}_p$ — кольцо p-комплексных чисел вида $a + jb$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $j^2 = 0$, $j \neq 0$. В кольце $\mathbb{C}_p$ имеются делители нуля вида jc и только они. Топология на $\mathbb{C}_p$ порождается следующей нормой: $\|z\| = \|x + jy\| = \max\{|x|, |y|\}$. Эту норму будем называть параболической. Более подробно с p-комплексными числами можно ознакомиться в работах [1] и [2]. Пусть $D \subset \mathbb{C}_p$ — область.

Рассмотрим p-комплексную в области D функцию $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$, где функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы в области $D^* = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : z = x + jy \in D\}$.

Определение 1.1. Функция $f(z) = u(x,y)+jv(x,y)$ называется p-голоморфной в точке $z\in \in\mathbb{C}_p$, если в некоторой ее окрестности функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы и выполнены условия

$$\begin{cases} u'_x(x,y) = v'_y(x,y) \\ u'_y(x,y) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Обозначим через $H_p(D)$ множество функций, p-голоморфных во всех точках множества $D \subset \mathbb{C}_p$.

Определение 1.2. Множество $D(f)\subset\mathbb{C}_p$ называется естественным множеством p-голоморфности функции f, если $f \in H_p(D(f))$ и для любого $D' \supset D(f)$ из того, что $f \in H_p(D')$ вытекает $D' = = D(f)$.

Из (1) вытекает (см. [3]), что если функции $f \in H_p(D)$, то она представима в виде

$$f(z) = u(x) + j(yu'(x) + \phi(x)), \tag{2}$$

где функция $\phi(x)$ дифференцируема, а $u(x)$ дважды дифференцируема.

Имеет место также представление

$$f(z) = f(x) + jyf'(x). \tag{3}$$

Доказательства приведенных, а также некоторых других свойств p-голоморфных функций даны в работе [3].

В классическом комплексном анализе теорема Ролля не имеет места. Для p-голоморфных функций справедлив следующий её аналог.

Теорема 1.1. *Пусть $f \in H_p(G)$ где $G \subset \mathbb{C}_p$ — область, $f(z_1) = f(z_2)$, где $z_1, z_2 \in G$. Тогда $f'(z)$ обращается в делитель нуля на некотором вертикальном интервале $\gamma \subset G$.*

Доказательство. Пусть $z_1 = a_1 + jb_1$, $z_2 = a_2 + jb_2$, Из равенства $f(z_1) = f(z_2)$ и (2) следует $u(a_1) = u(a_2)$. Пусть $a_1 < a_2$, тогда в силу теоремы Ролля найдется $\xi \in (a_1, a_2)$ такое, что $u'(\xi) = 0$. В силу (3) $f'(\xi+jy) = j(yu''(\xi)+\phi'(\xi))$ для любых $y\in\mathbb{R}$ таких, что $z = \xi+jy\in G$. Если $a_1 = a_2$, то верно равенство

$$u(a_1) + j(b_1u'(a_1) + \phi(a_1)) = u(a_2) + j(b_2u'(a_2) + \phi(a_2))$$

откуда вытекает $u'(a_1) = 0$. Тогда $f'(a_1 + jy) = j(yu''(a_1) + \phi'(a_1))$ для любых $y \in \mathbb{R}$ таких, что $z = a_1 + jy \in G$. Что и требовалось доказать.

Теорема 1.2. *Пусть $f \in H_p(G)$ где $G \subset \mathbb{C}_p$ — область, $u'(x) \neq 0$ для любых $y \in \mathbb{R}$ таких, что $z = x + jy \in G$. Тогда f диффеоморфно отображает область G на область $E = f(G)$, при этом для производной обратной функции верно равенство*

$$\{f^{-1}\}'(w) = \frac{1}{f'(z)}, \tag{4}$$

где $w = f(z)$.

Доказательство. Из принципа сохранения области для p-голоморфных функций [3, теорема 8] следует, что $E = f(G)$ — область. Однолистность отображения $f : G \to E$ вытекает из теоремы 1.1, p-дифференцируемость обратной функции $f^{-1} : E \to G$ и формула (4) вытекают из теоремы о локальной обратимости для p-голоморфных функций [3, теорема 7]. Теорема доказана.

2. Отображение простейших прямоугольников

Определение 2.1. Простейшим назовём множество вида

$$G = \{z \in \mathbb{C}_p : a \leq x \leq b; h(x) \leq y \leq g(x)\},$$

где $h(x), g(x) \in C^1[a, b]$. Простейшей областью назовём внутренность простейшего множества.

Определение 2.2. Простейшим прямоугольником назовём простейшее множество вида

$$G = \{z \in \mathbb{C}_p : a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\}.$$

Его внутренность назовём простейшей прямоугольной областью.

Теорема 2.1. *Пусть функция $f(z) = u(x) + j(yu'(x) + \phi(x))$ p-голоморфна в простейшей прямоугольной области*

$$G = \{z \in \mathbb{C}_p : a < x < b; c < y < d\},$$

$\overline{G} \subset D(f)$ *и* $u'(x) > 0$ *для любых x таких, что $z = x + jy \in D$. Тогда f диффеоморфно отображает G на простейшую область*

$$E = f(G) = \{w = u + jv \in \mathbb{C}_p |\, u(a) < u < u(b),\, cu'(x) + \phi(x) < v < du'(x) + \phi(x)\},$$

с сохранением ориентации границы.

Доказательство. Из принципа сохранения области для p-голоморфных функций [3, теорема 8] при условии $u'(x) > 0$ следует, что образом области G будет область $E = f(G)$, при этом $u(a) < u(b)$. Из представления (3) вытекает, что E — простейшая область указанного в формулировке теоремы вида. Ориентация границы сохраняется. Утверждение о диффеоморфности отображения $f : G \to E$ вытекает из теоремы 1.2, что и завершает доказательство.

Замечание 2.1. В случае $u'(x) < 0$ область G отображается на простейшую область

$$E = \{w = u + jv \in \mathbb{C}_p |\, u(b) < u < u(a),\, du'(x) + \phi(x) < v < cu'(x) + \phi(x)\},$$

при этом ориентация границы области E изменяется на противоположную.

Следующая теорема в некотором смысле является обратной к теореме 2.1.

Теорема 2.2. *Пусть $G = \{z \in \mathbb{C}_p |\, a < x < b,\, -g(x) < y < g(x)\}$ – простейшая область и функция $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\int_a^x \frac{dt}{g(t)} - \int_x^b \frac{dt}{g(t)}\right)$ определена на (a, b). Тогда p-голоморфная функция $f(z) = f(x) + jyf'(x)$ отображает G на простейшую прямоугольную область*

$$E = f(G) = \{w = u + jv \in \mathbb{C}_p | -\frac{1}{2}\int_a^b \frac{dt}{g(t)} < u < \frac{1}{2}\int_a^b \frac{dt}{g(t)},\, -1 < v < 1\}.$$

Доказательство. Заметим, что $f'(x) = \dfrac{1}{g(x)} > 0$ для всех $x \in (a, b)$. Тогда, в силу представления $f(z) = f(x) + jyf'(x)$ и принципа сохранения области отсюда следует доказываемое утверждение.

Замечание 2.2. Случай, когда $G = \{z \in \mathbb{C}_p |\, a < x < b,\, h(x) < y < g(x)\}$ сводится к рассмотренному в теореме 2.2 с помощью p-голоморфного отображения

$$w = x + j\left(y - \frac{h(x) + g(x)}{2}\right).$$

При этом $a < u = x < b$, $\dfrac{h(x) - g(x)}{2} < v < \dfrac{g(x) - h(x)}{2}$.

3. Теорема о неявном отображении

Определение 3.1. Говорят, что функция $f : E \subset \mathbb{C}_p \to \mathbb{C}_p$, $w = f(z)$ задана на E неявно уравнением $q(z,w) = 0$, если для любого $z \in E : q(z, f(z)) = 0$.

Пусть $D^* = \{(x,y,u,v) \in \mathbb{R}^4 \,|\, (z,w) \in D\}$. Функция $q(z,w) = A(x,y,u,v) + jB(x,y,u,v)$. Поставим q в соответсвие отображение $Q = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} : D^* \to \mathbb{R}^2$. Обозначим $Q'_w = \begin{bmatrix} A'_u & A'_v \\ B'_u & B'_v \end{bmatrix}$, $J = \begin{vmatrix} A'_u & A'_v \\ B'_u & B'_v \end{vmatrix}$, $Q'_z = \begin{bmatrix} A'_x & A'_y \\ B'_x & B'_y \end{bmatrix}$.

Уравнение $q(z,w) = 0$ равносильно системе $\begin{cases} A(x,y,u,v) = 0 \\ B(x,y,u,v) = 0. \end{cases}$

Теорема 3.1. *Пусть Q дважды дифференцируемо в D^* и $A'_u = B'_v$, $A'_v = 0$, $A'_x = B'_y$, $A'_y = 0$. Если точка $(z_0, w_0) \in D \subset \mathbb{C}_p^2$ такая, что $q(z_0, w_0) = 0$ и $\det[Q'_w(z_0, w_0)] \neq 0$, тогда найдется окрестность E точки z_0 и единственная p-голоморфная функция $f : E \subset \mathbb{C}_p \to \mathbb{C}_p$ такая, что $w_0 = f(z_0)$, и $q(z, f(z)) \equiv 0$, причем*

$$f'(z) = -\frac{A'_x A'_u}{J} + j\frac{A'_x B'_u - A'_u B'_x}{J}.$$

Доказательство. В условиях теоремы

$$Q'_w = \begin{bmatrix} A'_u & 0 \\ B'_u & A'_u \end{bmatrix}, \; J = \begin{vmatrix} A'_u & 0 \\ B'_u & A'_u \end{vmatrix} = (A'_u)^2 \neq 0, \; Q'_z = \begin{bmatrix} A'_x & 0 \\ B'_x & A'_x \end{bmatrix}.$$

В силу теоремы о неявном отображении для вещественных функций (формулировку и доказательство которой, можно найти в [5, теорема 16.5 стр. 89]), найдется окрестность E^* точки (z_0, w_0) и единственное отображение $F = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} : E^* \to \mathbb{R}^2$, что $F(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$, $q(x, y, F(x,y)) = 0$.

Это отображение дважды дифференцируемо и

$$F'(x,y) = -\left[Q'_w(x,y,u,v)\right]^{-1} \cdot Q'_z(x,y,u,v).$$

В окрестности E^* определитель $J \neq 0$ и для соответствующих матриц имеем

$$\left[Q'_w\right]^{-1} = \frac{1}{J}\begin{bmatrix} A'_u & 0 \\ -B'_u & A'_u \end{bmatrix},$$

$$F'(x,y) = \begin{bmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{bmatrix} = \frac{1}{J}\begin{bmatrix} A'_u & 0 \\ -B'_u & A'_u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A'_x & 0 \\ B'_x & A'_x \end{bmatrix}.$$

Из этого следует, что $u'_x = v'_y = \dfrac{1}{J}[-A'_x A'_u]$, $u'_y = 0$, $v'_x = \dfrac{1}{J}[A'_x B'_u - A'_u B'_x]$.

Поставим в соответствие отображению F функцию

$$f(z) = u(x,y) + jv(x,y).$$

В силу равенств $u'_x = v'_y$, $u'_y = 0$ функция f является p-голоморфной в окрестности $E = \{z = x + jy \in \mathbb{C}_p | (x,y) \in E^*\}$. Тогда

$$f'(z) = u_x + jv_x = -\frac{A'_x A'_u}{J} + j\frac{A'_x B'_u - A'_u B'_x}{J}.$$

Теорема доказана.

Литература

1. *Яглом И.М. Комплексные числа и их применение в геометрии.* Изд. 2-ое, стереотипное. М.: Эдиториал УРСС, 2004.

2. *Довгодилин В.В.* Сходимость на множестве p-комплексных чисел и свойства p-комплексных степенных рядов. *Весці БДПУ. Серыя 3. №4.* (2020), 32–39.

3. *Васильев И.Л., Довгодилин В.В.* О некоторых свойствах p-голоморфных и p-аналитических функций. *Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук, Т. 57, №2.* (2021), 176–184.

4. *Васильев И.Л., Довгодилин В.В.* Интегралы от p-комплексных функций и их свойства. *Весці БДПУ. Серыя 3. №2.* (2021), 31–36.

5. *Зверович Э.И. Вещественный и комплексный анализ. В 6 частях. Ч. 3. Дифференциальное исчисление векторного аргумента.* Минск: Вышэйшая школа. (2008).

УДК 519.865+338.1

АНАЛИЗ КОНКУРЕНТОСПОСОБНОСТИ ПРЕДПРИЯТИЙ НЕФТЯНОЙ ОТРАСЛИ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

М. В. Дубатовская[1], Е. С. Череватова[2]

e-mail: [1]dubatovska@bsu.by, [2]katerina.ch2021@gmail.com

В работе приведен обзор критериев и методов оценки конкурентоспособности предприятий. На основе динамического подхода проведен анализ конкурентоспособности предприятий нефтяной отрасли Республики Беларусь.

Ключевые слова: *конкуренция; конкурентоспособность; динамический метод; нефтяная отрасль Республики Беларусь.*

COMPETITIVENESS ANALYSIS OF BELARUSIAN OIL INDUSTRY ENTERPRISES

M. V. Dubatovskaya[1], E. S. Cherevatova[2]

e-mail: [1]dubatovska@bsu.by, [2]katerina.ch2021@gmail.com

A survey of the criteria and methods for assessing the competitiveness of enterprises is given. An analysis of the competitiveness of the oil industry enterprises of the Republic of Belarus is carried out on the basis of the dynamic approach.

Keywords: *competition; competitiveness; dynamic method; oil industry of the Republic of Belarus.*

Mathematics Subject Classification (2020): Primary 91B62, Secondary 91B55.

1. Обзор методов и критериев оценки конкурентоспособности предприятия

Конкурентоспособность любого предприятия является важным аспектом в рыночном успехе как производителя, так и конкретного товара. В свою очередь, решение проблемы конкурентоспособности — это сложная задача в деятельности любой компании, которая требует согласованной работы всех ее подразделений. Для того, чтобы целенаправленно воздействовать на повышение конкурентоспособности, необходимо иметь четкое представление о факторах, определяющих ее. Конкурентоспособность как экономическая категория, обусловленная особенностями рыночной экономики, проявляется в процессе конкурентной борьбы между участниками рынка [1].

В последние десятилетия в условиях глобализации экономики наблюдается усиление конкурентной борьбы во всем мире. Так, отечественным предприятиям приходится выдерживать серьезную конкуренцию и на внешнем, и на внутреннем рынке. В связи с этим возникает проблема оценки и повышения конкурентоспособности белорусских производителей.

На сегодняшний день в научной литературе существует много различных трактовок понятий “конкуренция” и “конкурентоспособность”. Несмотря на большое количество научных работ, посвященных этой проблематике, нет единого строго сформулированного определения этих понятий. Становится очевидной связь конкурентоспособности с рынком капитала, поскольку усиливается конкурентная борьба за инвестиции. В определении также следовало бы учитывать концепцию управления знаниями, поскольку на современном этапе именно знания и компетенции людей играют решающую роль в конкурентной борьбе, что ведет к переходу экономики в инновационную стадию [1, 2].

Определим основные факторы, оказывающие существенное влияние на конкурентоспособность. Предприятие любой сферы деятельности и масштаба функционирует под воздействием внешней и внутренней маркетинговой среды, которая оказывает влияние на его способности устанавливать и поддерживать эффективные связи с рынком. Таким образом, факторы конкурентоспособности подразделяются на внешние, проявление которых в малой степени зависит самого предприятия, и внутренние, почти целиком определяемые его руководством.

К **факторам внешней среды** могут быть отнесены: конкурентоспособность отрасли, региона и страны, в которой находится предприятие; организация входных материальных, финансовых и информационных потоков предприятия; факторы, определяющие конкурентный рынок (состояние и структура рынка, ёмкость рынка, требования потребителя к продукции, условия предложения товаров на рынке, уровень развития конкуренции).

К **факторам внутренней среды** относятся составляющие элементы экономического потенциала предприятия, который определяется совокупностью его ресурсов и эффективностью их использования, в частности, структура предприятия, технологии, уровень квалификации персонала, качество менеджмента, инвестиционная привлекательность и др. Недостаточное внимание к какому-либо из факторов может привести к нежелательным экономическим последствиям, а также проигрышу в конкурентной борьбе.

Существует целый ряд экономико-математических методов оценки конкурентоспособности предприятий (см., например, [3–5]). Можно выделить, в частности, индексные, матричные и стоимостные. К индексным методам относится анализ *простой суммы единичных показателей.* Для каждого из анализируемых предприятий рассчитывается комплексный показатель конкурентоспособности, представляющий собой сумму значений 6-10 ключевых факторов, существенных для исследуемой отрасли. На основе найденных показателей производится ранжирование. В качестве суммируемых значений могут быть выбраны относительные величины – отношения значений факторов к максимальным их значениям, соответствующим показателям предприятия-лидера или некоторого идеального предприятия. Также используют различные варианты *метода средних значений*, к которому относится вычисление и анализ следующих показателей.

Среднее взвешенное арифметическое. При расчете комплексного показателя единичные показатели (значения факторов) учитываются с некоторыми нормированными весовыми коэффициентами (их сумма равна единице). В литературе предлагается также модификация этого метода, когда набор факторов определен и весовые коэффициенты предложены на базе экспертных оценок.

Среднее арифметическое по видам продукции. Комплексный показатель конкурентоспособности вычисляется как среднее арифметическое показателей конкурентоспособности по видам продукции. В свою очередь эти показатели находят как среднее арифметическое коэффициентов охвата рыночной доли, предпродажной подготовки, изменения объема продаж, уровня цен, использования связей с общественностью и т.п.

Среднее взвешенное геометрическое. Расчет комплексного показателя конкурентоспособности производится на основе единичных показателей, в качестве которых предлагается использовать долю рынка и темпы ее изменения, а весовые коэффициенты рассчитывать исходя из влияния внешних и внутренних факторов на единичные показатели.

Недостатком индексных методов является субъективный выбор учитываемых факторов, а также подбор весовых коэффициентов.

Матричные методы позволяют провести конкурентный анализ деятельности предприятий без четкого количественного выражения результатов оценки. К таким методам можно отнести SWOT-анализ, построение конкурентной карты рынка и матрицы Бостонской консалтинговой группы, отражающих рыночную долю и ее динамику, матрицы Ансоффа и Литтла (ADL), матрицы компании GeneralElectric и McKinsey, учитывающие взаимосвязь привлекательности рынка и относительных преимуществ на нем. Разработаны также стоимостные методы, реализующие расчет интегрального показателя конкурентоспособности как показателя стоимости бизнеса.

Применяются также следующие методы:

Оценка на базе 4P. Основана на сравнительном анализе 4 факторов: продукт, цена, продвижение на рынке и каналы сбыта. “4P” – заглавные буквы названий этих факторов на английском языке.

Рейтинговая оценка. Предполагает создание иерархии предприятий на основе сравнения их достижений в финансовой и других областях.

Метод равновесия фирм и отрасли. Метод базируется на теории равновесия фирмы и отрасли Альфреда Маршалла и теории факторов производства. Под равновесием понимается такое состояние, когда у производителя не существует стимулов для изменения объемов производства (изменения своей доли на рынке). Критерием конкурентоспособности в рамках данной модели служит наличие у производителя таких факторов производства, которые могут быть использованы с лучшей, чем у конкурентов, производительностью.

Оценка, основанная на исследовании внутренней среды предприятия. Вначале определяют внутренние факторы и выявляют их влияние на эффективность осуществляемой деятельности. Далее определяются сильные и слабые стороны в каждой области. Анализ начинается с рассмотрения финансового состояния компании. Данный метод помогает определить, соответствует ли наличие финансов и платежеспособности предприятия его тактике развития.

Методика позиционирования сильных и слабых сторон потенциала конкурентоспособности предприятия. В соответствии с этой методикой составляется таблица, в которой по вертикали указывают характеристики, которые сравниваются (цена, качество, сбыт и т.д.), также их значимость и количественные значения. По горизонтали же указывают характеристики конкурентов (их сравнение). Оценка получается путем перемножения количественного значения характеристики на ее значимость, важность.

Оценка конкурентоспособности, основанная на теории эффективной конкуренции. Здесь наиболее конкурентоспособными являются те фирмы, где лучше и эффективнее работают все подразделения. Оценка эффективности работы подразделений предполагает оценку эффективности использования ими ресурсов предприятий. В основе метода лежит оценка четырех групповых показателей конкурентоспособности. В первую группу входят показатели, характеризующие эффективность управления производственным процессом. Вторая группа включает показатели, отражающие эффективность управления оборотными средствами. В третью входят показатели, позволяющие получить представление об эффективности управления сбытом и продвижением товара на рынке средствами рекламы и стимулирования. И четвертая группа — показатели конкурентоспособности товара: качество товара и его цена.

Динамический метод. Оценка конкурентоспособности, построенная на основе анализа конкурентного потенциала предприятия, должна быть дополнена маркетинговыми исследованиями факторов внешней среды предприятия, которые были перечислены ранее. Проведенная таким образом оценка конкурентоспособности предприятия позволит выбрать и обосновать конкурентную стратегию функционирования и развития предприятия.

Преимущества данного метода состоят в следующем:

– охватывает ключевые характеристики деятельности предприятия и исключает дублирование оценочных параметров;

– имеет в своей основе четко выраженную математическую взаимосвязь между установленными оценочными параметрами, что позволяет выявлять и анализировать зависимость оцениваемого показателя конкурентоспособности от исходных параметров в динамике;

– является универсальным методом, то есть позволяет оценивать конкурентоспособность отдельных предприятий (групп предприятий) с учетом целей анализа и наличия исходных данных.

С помощью данного подхода ниже будет оценена конкурентоспособность РУП «Белоруснефть».

2. Характеристика нефтяной отрасли Республики Беларусь и РУП "Белоруснефть"

Химическая и нефтехимическая промышленность является одной из наиболее крупных отраслей промышленного комплекса Республики Беларусь. Её отраслевая структура характеризуется большим разнообразием. Республика Беларусь не относится к числу ведущих нефтедобывающих стран, тем не менее, часть потребностей внутреннего рынка покрывается за счет собственных ресурсов нефтяного сырья.

В силу отсутствия достаточных запасов углеводородного сырья на территории Республики Беларусь, функционирование нефтеперерабатывающих заводов обеспечивается за счет импортных поставок нефти (в основном из Российской Федерации).

На сегодняшний день в Беларуси функционируют 12 крупных сетей АЗС, которые конкурируют за территории и доверие клиентов. Наиболее известными сетями АЗС в Республике Беларусь являются сеть автозаправочных станций "А-100" (на рынке с 1994 г.), ГПО "Белоруснефть" (692 объекта, на рынке с 1997 г.), СООО "Юнайтед Компани" (11 объектов, на рынке с 1992 г.), ИООО "РН Запад" (39 объектов), ИООО "Газпромнефть-Белнефтепродукт" (47 объектов), ИООО "Лукойл Белоруссия" (83 объекта, на рынке с 1992 г.), СООО "НефтеХим-Трейдинг" (11 объектов, нарынке моторного топлива с 2009 г.), ИООО "Татбелнефтепродукт" (18 объектов, на рынке с 2010 г.).

Особенности конкуренции среди АЗС в Республике Беларусь таковы, что при регулируемых государством ценах на топливо, сети вынуждены постоянно развивать и совершенствовать свой уровень сервиса, как для розничных клиентов, так и для корпоративных. Одним из аспектов такой конкуренции можно считать подбор кадров, а также их обучение и построение эффективной продвинутой команды.

Основной объем нефти в Беларусь идет из России. Хотя в отдельные годы в Беларусь поставлялась нефть из Азербайджана (в 2011 году), Венесуэлы (в 2010–2012 гг.) и Казахстана (в 2016–2017 гг.). Но все они суммарно поставили в Беларусь лишь несколько процентов от общего объема импорта нефти за последние 10 лет.

3. Анализ конкурентоспособности предприятий нефтяной отрасли Беларуси

Рассмотрим самую большую сеть автозаправок в Беларуси — "Белоруснефть". Данное предприятие создано с целью осуществления хозяйственной деятельности, направленной на получение прибыли для удовлетворения социальных и экономических интересов работников предприятия и интересов учредителя предприятия, усиления государственного сектора на рынке нефтепродуктов Республики Беларусь, координации усилий по строительству автомобильных и газозаправочных станций, обеспечения нефтепродуктами организаций всех форм собственности. На сегодняшний день сеть осуществляет следующие основные виды деятельности:

– оптовая и розничная торговля всеми видами нефтепродуктов;
– приобретение, хранение, учет и реализация нефтепродуктов;
– прием, хранение, учет и реализация отработанных нефтепродуктов;
– услуги по техническому обслуживанию автотранспорта;
– оказание лабораторных услуг;
– ведение розничной торговли, торгово-производственной деятельности.

Производимое в Республике Беларусь и реализуемое на предприятии топливо соответствует требованиям Европейских стандартов, а также требованиям технического регламента таможенного союза ТР ТС 013/2011 "О требованиях к автомобильному и авиационному бензину, дизельному и судовому топливу, топливу для реактивных двигателей и мазуту", который устанавливает на территории Таможенного союза обязательные для применения и исполнения требования с целью обеспечения защиты жизни и здоровья человека, имущества, охраны окружающей среды, предупреждения действий, вводящих в заблуждение потребителей относительно его назначения, безопасности и энергетической эффективности.

Высокое качество реализуемых нефтепродуктов гарантировано обеспечением постоянного контроля на всех этапах реализации.

Сбытовая сеть реализации нефтепродуктов и масел производственного объединения "Белоруснефть" крупнейшая в республике. В составе объединения девять предприятий по нефтепродуктообеспечению, расположенных во всех областях республики и в г. Минске.

Основными конкурентами РУП "Белоруснефть-Минскоблнефтепродукт" на оптовом рынке нефтепродуктов являются ИООО "Газпромнефть-Белнефтепродукт", ИООО "РН-Запад", ОДО "Астотрейдинг". Охарактеризуем кратко каждого конкурента. ИООО "Газпромнефть-Белнефтепродукт" – одно из крупнейших предприятий Республики Беларусь по нефтепродуктообеспечению, созданное в 2009 году. Является дочерним сбытовым предприятием ПАО "Газпромнефть". На сегодняшний день сеть АЗС насчитывает 45 станций, расположенных по всей Республике Беларусь. Сеть АЗС "Газпромнефть" реализует топливо, контроль качества которого осуществляется на всех этапах его транспортировки, хранения и продажи. Основным видом деятельности предприятия является реализация нефтепродуктов экологического класса К5, соответствующими требованиям технического регламента таможенного союза, через сеть АЗС "Газпромнефть" [9].

Иностранное общество с ограниченной ответственностью "РН-Запад" было образовано в 2003 году в Республике Беларусь и является дочерним обществом российской вертикально интегрированной нефтегазовой компании ПАО "НК "Роснефть". Основной целью ИООО "РН-Запад" в Республике Беларусь является поставка качественных нефтепродуктов на рынок страны при условии работы с максимальной коммерческой эффективностью и ориентации на долгосрочную перспективу. Организационная структура и регламент бизнес-процессов Общества полностью стандартизированы в соответствие с системой менеджмента качества ПАО "НК "Роснефть". Реализует топливо посредством собственных АЗС под названием "Славнефть". К настоящему времени география покрытия свыше 40 автозаправочных станций "Славнефть" охватила десятки крупных и средних населенных пунктов Беларуси. И это далеко не окончательные показатели в деятельности компании. Воспользоваться любой из актуальных возможностей можно в любой из точек "Славнефть" в Минске — в столице их пока восемь [10].

А-100 является первой в Беларуси сеть АЗС с белорусским капиталом. Название компании А-100 возникло в 1994 году. Уже тогда целью компании была продажа высокооктанового и экологически безопасного топлива "А-100". Отсюда и возникло название сети АЗС. Основные преимущества и достоинства автоматической АЗС:

– отсутствие оператора сокращает время заправки. Водителю нужно вставить в бак своего автомобиля топливораздаточный кран, а затем произвести оплату через платежный терминал самообслуживания (ПТС). Доступные способы платежа: при помощи электронной карточки Berlio, наличными, пластиковой банковской картой.

– минимальная занимаемая площадь позволяет размещать автоматическую АЗС в стесненных условиях современных городов [11].

Для оценки конкурентоспособности применим динамический подход. В рамках такого подхода конкурентоспособность предприятия есть обобщающая характеристика деятельности хозяйствующего субъекта, отражающая уровень эффективности использования экономических ресурсов относительно эффективности использования экономических ресурсов конкурентами. Анализ проводим на основе данных [6–7].

Майкл Юджин Портер [1] выделил два источника конкурентоспособности предприятия: операционную эффективность и стратегическое позиционирование.

Операционная эффективность подразумевает выполнение схожих видов деятельности лучше, чем это делают конкуренты, обеспечивая получение прибыли в процессе реализации прибавочной стоимости. Это означает, что основным результатом и критерием операционной эффективности является прибыль предприятия. В то же время сопоставление непосредственно объемов прибыли обусловливает большую конкурентоспособность крупных предприятий и невозможность сопоставления предприятий с различными масштабами деятельности. Следовательно, далее будет сопоставлять не суммы прибыли, а "прибыльность" хозяйственной деятельности, то есть рентабельность производства (или продаж).

Стратегическое позиционирование означает осуществление видов деятельности, обеспечивающих уникальную природу создаваемой потребительной стоимости, и заключается в создании уникальной и выгодной позиции, основанной на сочетании видов деятельности, отличных от видов деятельности конкурентов [1].

Для оценки конкурентоспособности предприятия применяются показатели, вычисленные по формулам (см., например, [8]):

$$K = K_r \cdot K_I,$$

где K — конкурентоспособность исследуемого предприятия;
K_r — коэффициент операционной эффективности;
K_I — коэффициент стратегического позиционирования.
Коэффициент операционной эффективности

$$K_r = \frac{r}{R},$$

r — операционная эффективность рассматриваемого предприятия;
R — операционная эффективность по выборке.
Операционная эффективность рассматриваемого предприятия

$$r = \frac{B}{Z},$$

B — выручка от реализации продукции предприятия;
Z — затраты на производство и реализацию продукции предприятия.
Операционная эффективность по выборке

$$R = \frac{B^S}{Z^S},$$

B^S — выручка от реализации продукции по выборке;
Z^S — затраты на производство и реализацию продукции по выборке.
Коэффициент стратегического позиционирования

$$K_I = \left(\frac{I}{I^S}\right)^{1/2},$$

I — индекс изменения объемов выручки рассматриваемого предприятия;
I^S — индекс изменения объемов выручки по выборке.
Индексы изменения объемов выручки

$$I = \frac{B}{B_0}, \quad I^S = \frac{B^S}{B_0^S},$$

B_0 — объем выручки от реализации продукции предприятия в предшествующем периоде,
B_0^S — объем выручки от реализации продукции по выборке в предшествующем периоде.

Результаты вычислений показателей для предприятий-конкурентов приведены ниже в таблице 1.

Таблица 1. Коэффициент конкурентоспособности 2010-2020 гг.

	Белоруснефть-Минскоблнефтепродукт	Газпромнефть-Белнефтепродукт	А-100	Роснефть
2010	0,517	0,607	0,442	0,367
2011	1,488	0,424	0,449	0,395
2012	0,977	0,286	0,876	0,626
2013	0,646	0,411	0,609	0,472
2014	0,750	0,381	0,552	0,474
2015	0,685	0,396	0,522	0,498
2016	0,465	0,532	0,513	0,414
2017	0,418	0,568	0,547	0,438
2018	0,334	0,823	0,170	0,347
2019	1,014	0,269	0,277	0,768
2020	0,699	0,368	0,454	0,478

Коэффициент конкурентоспособности РУП “Белоруснефть-Минскоблнефтепродукт” до 2017 года был выше, чем у конкурентов. По итогам 2018 года наибольшей конкурентоспособность обладал ИООО “Газпромнефть-Белнефтепродукт”. Далее в 2019 РУП “Белоруснефть-Минскоблнефтепродукт” показал наилучший результат. Показатель составил 1,014, что в более чем в три раза больше, чем у других компаний. Однако в 2020 году показатель снизился до 0,699, но он выше, чем у других АЗС. Таким образом, всем упомянутым в исследовании предприятиям необходимо предпринимать меры для улучшения конкурентоспособности.

На основании результатов анализа приобретает актуальность разработка мер по поддержанию конкурентоспособности на достигнутом уровне и дальнейшему ее повышению.

4. Некоторые предложения по повышению и укреплению конкурентоспособности РУП “Белоруснефть”

На основе проведенного анализа конкурентоспособности РУП “Белоруснефть-Минскоблнефтепродукт” по сравнению с ИООО “Газпромнефть-Белнефтепродукт” и ОДО “Астотрейдинг” можно заключить, что предприятие является конкурентоспособным и показывает положительную динамику.

На основе расчета коэффициентов, характеризующих финансовое состояние предприятия, можно сделать вывод, что предприятие является эффективным, однако, необходимо предпринимать шаги для увеличения рентабельности из-за возможного снижения показателей. Также было выявлено, что “Белоруснефть-Минскоблнефтепродукт” является платежеспособным и финансово устойчивым.

Для улучшения финансовых результатов указанного предприятия, с нашей точки зрения, необходимо:

– снизить затраты, включаемые в себестоимость продукции, товаров, работ, услуг при увеличении выручки от реализации;

– увеличить перечень продуктов переработки нефти и газа с последующим увеличением выручки от реализации;

– использовать дополнительные источники финансирования.

Для успешной конкурентной борьбы предприятиям необходимо обновлять технологии и технологическое оборудование, изучать внутренний и внешний рынок и вести маркетинговые исследования, выявлять свои возможности, а также слабые стороны и уязвимые места конкурентов, оказывать управляющее воздействие на собственную конкурентоспособность и определять ее основные направления.

Реализация необходимых мероприятий поможет повысить конкурентоспособность на рынке, а также финансовую устойчивость предприятия в целом.

Работа выполнена при поддержке Государственной программы научных исследований "Конвергенция-2025"(проект 1.7.01.4).

Литература

1. *Портер М. Конкуренция.* М.: Вильямс, 2018.

2. *Садовская Т.Г., Дроговоз П.А., Дадонов В.А., Мельников В.И.* Применение математических методов и моделей в управлении организационно-экономическими факторами конкурентоспособности промышленного предприятия. *Аудит и финансовый анализ.* №3 (2009), 364–379.

3. *Васенкова Е.И., Гафурова А.А.* Сравнительный анализ методов оценки конкурентоспособности компании.. *Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: материалы 8-го международного семинара 14-19 сентября 2015 г., Минск, Беларусь: ИМ НАН Беларуси.* (2015), 21.

4. *Воронов, Д. С. Конкурентоспособность предприятия: оценка, анализ, пути повышения.* Екатеринбург: Изд-во УГТУ-УПИ, 2001.

5. *Карминский, А.М., Пересецкий, А.А., Петров, А.Е. Рейтинги в экономике: методология и практика.* М.: Финансы и статистика, 2005.

6. *Структура объема промышленного производства Республики Беларусь в 2020 году* [Электронный ресурс].. *Режим доступа: www.belstat.gov.by.* Дата доступа: 21.11.2021.

7. *Статистические сборники "Промышленность Республики Беларусь".* Белстат, 2015-2021.

8. *Воронов Д.С.* Оценка конкурентоспособности множества предприятий. *Вестник УрФУ. Серия: Экономика и управление.* №2 (2015), 24–40.

9. *ИООО "Газпромнефть-Белнефтепродукт"* [Электронный ресурс].. *Режим доступа: http://azs.gazprom-neft.by.* Дата доступа: 17.03.2022.

10. *ИООО "РН-Запад"* [Электронный ресурс].. *Режим доступа: https://www.rn-west.by/nasha-set.* Дата доступа: 17.03.2022.

11. *ОДО "Астотрейдинг"* [Электронный ресурс].. *Режим доступа: https://azs.a-100.by/company/about-A100/0.* Дата доступа: 17.03.2022.

УДК 536.2:539.3

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ В ТЕПЛОВОМ ПОЛЕ ПРОФИЛИРОВАННОГО КОЛЬЦЕВОГО ПОЛЯРНО-ОРТОТРОПНОГО ДИСКА С УЧЕТОМ ТЕПЛООБМЕНА С ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДОЙ, ПОЛУЧЕННОЕ МЕТОДОМ ЛИУВИЛЛЯ

В. В. Королевич

e-mail: v.korolevich@mail.ru

Профлированные анизотропные диски используются в различных конструкциях машиностроения и авиастроения. Они часто могут вращаться в интенсивных тепловых полях, как, например, в турбинах. Возникающие температурные напряжения в таких дисках существенно влияют на их прочность. Для расчета температурных напряжений в них сначала необходимо знать распределение температуры в анизотропных дисках. В статье приведен вывод интегрального уравнения стационарной задачи теплопроводности методом Лиувилля. Решение полученного интегрального уравнения в общем случае дается методом последовательных приближений.

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение; интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода; метод Лиувилля; полярно-ортотропный диск; температура.*

THE INTEGRAL EQUATION OF THE STATIONARY HEAT CONDUCTION PROBLEM OBTAINED BY LIOUVILLE'S METHOD FOR A PROFILED ANNULAR POLAR-ORTHOTROPIC DISK ROTATING IN A THERMAL FIELD TAKING INTO ACCOUNT HEAT EXCHANGE WITH THE ENVIRONMENT.

U. V. Karalevich

e-mail: v.korolevich@mail.ru

Profiled anisotropic disks are used in various machine-building and aircraft designs. They can often rotate in intense thermal fields as, for example, in turbines. The resulting temperature stresses in such disks significantly affect their strength. You need to know first the temperature distribution in anisotropic disks to calculate the temperature stresses in them. The derivation of the integral equation of stationary heat conduction by the Liouville method is given in this paper. In the general case the solution of the resulting integral equation is given by the method of successive approximations.

Keywords: *differential equation; integral equation of Volterra of the 2 nd kind; Liouville's method; polar-orthotropic disk; temperature.*

Mathematics Subject Classification (2020): Primary 35F10, 45D05, Secondary 74A15.

1. Введение

При расчете напряженно-деформированного состояния вращающегося профилированного анизотропного диска в тепловом поле важно знать распределение температуры $T(r)$ в нем.

Возникающие в диске температурные напряжения могут существенно влиять на его прочность. В работе [1] было получено обыкновенное дифференциальное уравнение 2-го порядка для функции температуры $\Theta_0(r) = T(r) - T_0$, где T_0 — температура окружающей среды:

$$\frac{d^2\Theta_0}{dr^2} + \left(\frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{r}\right)\frac{d\Theta_0}{dr} - \frac{2H}{\lambda_r h(r)}\sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{dh}{dr}\right)^2} \cdot \Theta_0(r) = 0, \quad (1)$$

где λ_r — радиальный коэффициент теплопроводности композитного материала диска; H — коэффициент теплоотдачи поверхности диска; $h(r)$ — толщина диска, зависящая от текущего радиуса r.

Теплообмен профилированного полярно-ортотропного кольцевого диска с окружающей средой происходит через оба основания диска, а через боковую поверхность пренебрегается. Внутренних источников тепла в диске не имеется.

Пусть на внутреннем контуре анизотропного диска радиуса r_0 поддерживается постоянная температура T_1, а на внешнем контуре радиуса R — температура T_2. Причем $T_0 < T_1 < T_2 < T_{\text{ПЛ}}$, где $T_{\text{ПЛ}}$ — температура плавления материала диска. Тогда граничные условия примут вид:

$$\Theta_0(r_0) = T_1 - T_0, \quad \Theta_0(R) = T_2 - T_0. \quad (2)$$

В работе [1] решение дифференциального уравнения (1) сводилось к решению соответствующего линейного интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода для второй производной функции температуры $\frac{d^2\Theta_0}{dr^2} = \eta_0(r)$:

$$\eta_0(r) = \lambda \int_{r_0}^{r} K_0(r,s)\,\eta_0(s)ds + f_0(r), \quad (3)$$

где λ =-1 — числовой параметр; $K_0(r,s) = \left[\left(\frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{r}\right) - \frac{2H}{\lambda_r}\sqrt{\frac{1}{h^2(r)} + \frac{1}{4}\left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)^2}(r-s)\right]$ — ядро интегрального уравнения; $f_0(r) = \frac{\partial K_0(r,s)}{\partial s}\Theta_0(r_0) - K_0(r,r_0)\dot{\Theta}_0(r_0)$ — свободный член интегрального уравнения.

Для нахождения искомой функции температуры $\Theta_0(r)$ приходиться дважды интегрировать решение $\eta_0(r)$ интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода. Операция интегрирования функции $\eta_0(r)$ может представлять определенные трудности при нахождении аналитического решения для функции температуры $\Theta_0(r)$. Поэтому для практических расчетов температур во вращающихся в тепловых полях анизотропных дисков желательно иметь интегральное уравнение непосредственно для самой функции температуры $\Theta_0(r)$.

2. Интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода стационарной задачи теплопроводности, полученное методом Лиувилля

Метод Лиувилля позволяет получить интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода для функции температуры $\Theta_0(r)$[2].

Запишем уравнение (1) в следующем виде:

$$\frac{d^2\Theta_0}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Theta_0}{dr} + \frac{2H}{\lambda_r h_0}\cdot\frac{1}{r^2}\Theta_0(r) = -\frac{h'(r)}{h(r)}\frac{d\Theta_0}{dr} + \frac{2H}{\lambda_r h_0}\left[\frac{1}{r^2} + h_0\sqrt{\frac{1}{h^2(r)} + \frac{1}{4}\left(\frac{h'(r)}{h(r)}\right)^2}\right]\Theta_0(r). \quad (4)$$

Введем новую переменную $t = \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$, $t \in \left[0, \ln\left(\frac{R}{r_0}\right)\right]$ и перепишем уравнение (3) в этой переменной:

$$\frac{d^2\Theta_0}{dt^2} + \frac{2H}{\lambda_r h_0}\cdot\Theta_0(t) = -\frac{h'(t)}{h(t)}\frac{d\Theta_0}{dt} + \frac{2H}{\lambda_r h_0}\left[1 + h_0\sqrt{\frac{r_0^4}{h^2(t)}e^{4t} + \frac{1}{4}\left(\frac{h'(t)}{h(t)}\right)^2 r_0^2 e^{2t}}\right]\cdot\Theta_0(t), \quad (5)$$

или

$$\frac{d^2\Theta_0}{dt^2}+\frac{2H}{\lambda_r h_0}\cdot\Theta_0\left(t\right)=g\left(t\right),\tag{6}$$

где $g\left(t\right)=-\frac{h'(t)}{h(t)}\frac{d\Theta_0}{dt}+\frac{2H}{\lambda_r h_0}\left[1+h_0\sqrt{\frac{r_0^4}{h^2(t)}e^{4t}+\frac{1}{4}\left(\frac{h'(t)}{h(t)}\right)^2 r_0^2e^{2t}}\right]\cdot\Theta_0\left(t\right).$

Однородное дифференциальное уравнение для функции $\Theta_0^*\left(t\right)$ имеет вид:

$$\frac{d^2\Theta_0^*}{dt^2}+\frac{2H}{\lambda_r h_0}\Theta_0^*\left(t\right)=0.\tag{7}$$

Его решение выражается в тригонометрических функциях:

$$\Theta_0^*\left(t\right)=C_1\cos\Omega t+C_2\sin\Omega t,\tag{8}$$

где $\Omega=\sqrt{\frac{2H}{\lambda_r h_0}}$, C_1, C_2 — постоянные интегрирования.

Решение дифференциального уравнения (5) найдем методом вариации постоянных [3, с. 144]:

$$\Theta_0\left(t\right)=C_1\left(t\right)\cos\Omega t+C_2\left(t\right)\sin\Omega t.\tag{9}$$

Подстановка выражения (9) для функции температуры $\Theta_0\left(t\right)$ в уравнение (6) приводит к следующей системе дифференциальных уравнений для функций $C_1(t), C_2(t)$:

$$\left\{\begin{array}{l} C_1'\left(t\right)\cos\Omega t+C_2'\left(t\right)\sin\Omega t=0,\\ -\Omega C_1'\left(t\right)\sin\Omega t+\Omega C_2'\left(t\right)\cos\Omega t=g\left(t\right).\end{array}\right.\tag{10}$$

Решим систему (10) методом Крамера:

$$\left\{\begin{array}{l} C_1'\left(t\right)=-\frac{1}{\Omega}g\left(t\right)\sin\Omega t,\\ C_2'\left(t\right)=\frac{1}{\Omega}g\left(t\right)\cos\Omega t.,\end{array}\right.\tag{11}$$

Проинтегрируем систему (11). В результате получим:

$$\left\{\begin{array}{l} C_1\left(t\right)=-\frac{1}{\Omega}\int\limits_0^t g\left(\tau\right)\sin\Omega\tau d\tau+C_1^*,\\ C_2\left(t\right)=\frac{1}{\Omega}\int\limits_0^t g\left(\tau\right)\cos\Omega\tau d\tau+C_2^*.\end{array}\right.\tag{12}$$

Подставим выражения (12) для $C_1\left(t\right), C_2\left(t\right)$ в формулу (9):

$$\Theta_0\left(t\right)=-\frac{1}{\Omega}\cos\Omega t\int\limits_0^t g\left(\tau\right)\sin\Omega\tau d\tau+\frac{1}{\Omega}\sin\Omega t\int\limits_0^t g\left(\tau\right)\cos\Omega\tau d\tau+C_1^*\cos\Omega t+C_2^*\sin\Omega t=$$

$$=\frac{1}{\Omega}\int\limits_0^t g\left(\tau\right)\left(\sin\Omega t\cdot\cos\Omega\tau-\cos\Omega t\cdot\sin\Omega\tau\right)\cdot d\tau+C_1^*\cos\Omega t+C_2^*\sin\Omega t\Rightarrow$$

$$\Theta_0\left(t\right)=\frac{1}{\Omega}\int\limits_0^t g\left(\tau\right)\sin\Omega\left(t-\tau\right)d\tau+C_1^*\cos\Omega t+C_2^*\sin\Omega t.\tag{13}$$

Вычисляя интеграл $\int\limits_0^t g\left(\tau\right)\sin\Omega\left(t-\tau\right)d\tau$ и проведя преобразования, получим окончательно линейное интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода для функции температуры $\Theta_0\left(t\right)$:

$$\Theta_0\left(t\right)=\tilde{\lambda}\int\limits_0^t K\left(t,\tau\right)\Theta_0\left(\tau\right)d\tau+f\left(t\right),\tag{14}$$

где $\tilde{\lambda} = \frac{1}{\Omega}$ - числовой параметр; $K(t,\tau) = \left\{ \left[\left(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)} \right)' + \Omega^2 \left(1 + h_0 \sqrt{\frac{r_0^4 e^{4\tau}}{h^2(\tau)} + \frac{1}{4} \left(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)} \right)^2 r_0^2 e^{2\tau}} \right) \right] \times \right.$ $\left. \times \sin\Omega(t-\tau) - \Omega(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)}) \cos\Omega(t-\tau) \right\}$ — ядро интегрального уравнения (14); $f(t) = C_1^* \cos\Omega t + C_2^{**} \sin\Omega t$ — свободный член интегрального уравнения (14); C_1^*, C_2^{**} — постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий (2).

3. Решение интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода стационарной задачи теплопроводности

Для решения линейного интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода для функции температуры $\Omega_0(t)$ (14) применим метод последовательных приближений [2]:

$$\Theta_0^{(m)}(t) = \tilde{\lambda} \int\limits_0^t K(t,\tau)\, \Theta_0^{(m-1)}(\tau)\, d\tau + f(t),$$

где индекс m означает номер итерации.

В качестве нулевого приближения положим: $\Theta_0^{(0)}(t) = 0$. В связи с наличием иррациональности в ядре интегрального уравнения вычисления последующих итераций следует проводить численными методами.

Если $f(t)$ непрерывна в $\left[0, \ln\left({}^{R}\!/_{r_0}\right)\right]$, а ядро $K(t,\tau)$ непрерывно при $0 \le t \le \ln\left({}^{R}\!/_{r_0}\right)$, $0 \le \tau \le t$, то последовательность $\left\{\Theta_0^{(m)}(t)\right\}$ сходится при $m \to \infty$ к решению $\Theta_0(t)$ линейного интегрального уравнения (13):

$$\Theta_0(t) = \lim_{m\to\infty} \Theta_0^{(m)}(t).$$

Постоянные интегрирования определяются из граничных условий на каждом шаге итерации.

4. Заключение

Приведенное интегральное уравнение (14) в форме Лиувилля является более удобными в практическом применении при решении стационарной задачи теплопроводности для вращающихся в тепловом поле профилированных анизотропных дисков, чем интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода (3). Решение интегрального уравнения (14) позволяют непосредственно находить искомую функцию температуры $\Theta_0(t)$. Данное уравнение можно решать, кроме метода последовательных приближений, также другими аналитическими и численными методами приведенными, например, в справочнике [4].

Литература

1. *Королевич В.В. Стационарные температурные поля в анизотропных пластинах переменной толщины с учетом теплообмена с внешней средой.* Журнал БГУ. Математика. Информатика. №2 (2018), 58–66.

2. *Краснов М.П., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Интегральные уравнения: задачи и примеры с подробными решениями.* М.: КомКнига (2007).

3. *Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1976.

4. *Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие.* Киев, 1986.

УДК 539.3

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ВРАЩАЮЩИХСЯ ПОЛЯРНО-ОРТОТРОПНЫХ КОЛЬЦЕВЫХ ДИСКОВ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ МЕТОДОМ ЛИУВИЛЛЯ

В. В. Королевич[1], Д.Г. Медведев[2]

e-mail: [1]v.korolevich@mail.ru, [2]medvedev@bsu.by

В статье представлен вывод методом Лиувилля интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода для плоской задачи теории упругости вращающихся анизотропных дисков переменной толщины. Решение полученного интегрального уравнения в общем случае дается методом последовательных приближений.

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение; интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода; метод Лиувилля; полярно-ортотропный диск; радиальное и тангенциальное напряжения; радиальное перемещение; функция напряжений.*

THE INTEGRAL EQUATIONS OF THE PLANE PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTICITY OBTAINED BY LIOUVILLE'S METHOD FOR ROTATING POLAR-ORTHOTROPIC ANNULAR DISKS OF VARIABLE THICKNESS

U. V. Karalevich[1], D.G. Medvedev[2]

e-mail: [1]v.korolevich@mail.ru, [2]medvedev@bsu.by

The paper presents the derivation by the Liouville's method of Volterra integral equations of the second kind for the plane problem of the theory of elasticity for rotating anisotropic disks of variable thickness. In the general case the solutions of these integral equations are obtained by the method of successive approximations.

Keywords: *differential equation; integral equation of Volterra of the 2nd kind; Liouville's method; polar-orthotropic disk; radial and tangential stresses; radial displacement; function of stresses.*

Mathematics Subject Classification (2020): Primary 35F10,45D05 Secondary 74A15.

1. Введение

На Международной конференции «Аналитические методы анализа и дифференциальные уравнения (AMADE-2009)» в 2009 году докладывались исследования по применению линейных интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода к решению плоской задачи теории упругости для вращающихся полярно-ортотропных кольцевых дисков переменной толщины $h(r)$ [1, 2].

Для 1-й основной задачи теории упругости функция напряжений $\psi(r)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению 2-го порядка:

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{h'(r)}{h(r)}\right)\frac{d\psi}{dr} + \frac{1}{r}\left(\nu_{\theta r}\frac{h'(r)}{h(r)} - \frac{k^2}{r}\right)\psi(r) = -(3+\nu_{\theta r})\,h(r)\,\rho\omega_0^2 r, \qquad (1)$$

где $k^2 = \frac{E_\theta}{E_r}$; E_r, E_θ — модули Юнга в радиальном и тангенциальном направлениях соответственно; $\nu_{\theta r}$ — коэффициент Пуассона; ρ — плотность материала диска; ω_0 — угловая скорость вращения диска.

Радиальная $\sigma_r(r)$ и тангенциальная $\sigma_\theta(r)$ компоненты напряжений связаны с функцией напряжений $\psi(r)$ соотношениями [3]:

$$\sigma_r(r) = \frac{\psi(r)}{rh(r)}, \quad \sigma_\theta(r) = \frac{1}{h(r)}\frac{d\psi}{dr} + \rho\omega_0^2 r^2. \tag{2}$$

Из закона Гука для полярно-ортотропного тела найдем выражение для радиального перемещения $u(r)$ через функцию напряжений $\psi(r)$ [4]

$$u(r) = \frac{r}{E_\theta}\left(\sigma_\theta(r) - \nu_{\theta r}\sigma_r(r)\right) = \frac{r}{E_\theta h(r)}\left(\frac{d\psi}{dr} - \frac{\nu_{\theta r}}{r}\psi(r) + h(r)\rho\omega_0^2 r^2\right). \tag{3}$$

Граничные условия имеют вид:

$$\sigma_r(r_0) = -p_0, \quad \sigma_r(R) = p_1, \tag{4}$$

где r_0 — внутренний, а R — внешний радиусы диска соответственно; p_0- контактное давление на внутреннем контуре диска при его посадке с натягом на вал; p_1 — равномерно распределенная постоянная нагрузка на внешнем контуре.

В работах [1–2] решение дифференциального уравнения (1) сводилось к решению соответствующего линейного интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода для второй производной функции напряжений $\frac{d^2\psi}{dr^2} = \phi^{(1)}(r)$:

$$\phi^{(1)}(r) = \lambda\int\limits_{r_0}^{r} K_1(r,s)\,\phi^{(1)}(s)\,ds + f_1(r), \tag{5}$$

где числовой параметр $\lambda = -1$; $K_1(r,s) = \left[\left(-\frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\left(\nu_{\theta r}\frac{h'(r)}{h(r)} - \frac{k^2}{r}\right)(r-s)\right]$ — ядро интегрального уравнения (5); $f_1(r)$ — свободный член интегрального уравнения (2), имеющий вид:

$$f_1(r) = \frac{\partial K_1(r,s)}{\partial s}r_0 h(r_0)\,\sigma_r(r_0) - K_1(r,r_0)\,h(r_0)\,\sigma_\theta(r_0) + \left[K_1(r,r_0)\,r_0^2 h(r_0) - (3+\nu_{\theta r})\,rh(r)\right]\rho\omega_0^2.$$

Получив решение $\phi^{(1)}(r)$ интегрального уравнения (5), для нахождения функции напряжений $\psi(r)$ потребуется дважды интегрировать функцию $\phi^{(1)}(r)$. Операция интегрирования функции $\phi^{(1)}(r)$ может представлять определенные трудности при нахождении аналитического решения для функции напряжений $\psi(r)$. Поэтому для практических расчетов напряженно-деформированного состояния вращающихся анизотропных дисков желательно иметь интегральное уравнение непосредственно для самой функции напряжений $\psi(r)$.

2. Интегральные уравнения Вольтерра 2-го рода плоской задачи теории упругости, полученное методом Лиувилля

Предложеный в 1837 году Ж. Лиувиллем метод, сводящий решение дифференциального уравнения 2-го порядка вида [5]

$$y'' + \left[\lambda^2 - \nu(t)\right]y(t) = 0$$

к линейному интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода для искомой функции $y(t)$:

$$y(t) = \frac{1}{\lambda}\int\limits_{a}^{t}\nu(s)\sin\lambda(t-s)\,y(s)\,ds + C_1\cos\lambda t + C_2\sin\lambda t,$$

где C_1, C_2 — постоянные, определяемые из начальных условий: $y(a) = y_0$ и $y'(a) = y_0'$, может быть успешно применен в решении плоской задачи теории упругости для вращающихся анизотропных дисков.

Введем переменную $x = \frac{r}{r_0}$. Дифференциальное уравнение (1) запишется в виде:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \left(\frac{h'(x)}{h(x)} - \frac{1}{x}\right)\frac{d\psi}{dx} + \left(\nu_{\theta r}\frac{h'(x)}{h(x)} - \frac{k^2}{x}\right)\frac{1}{x}\psi(x) = -(3+\nu_{\theta r})\,h(x)\,\rho\omega_0^2 r_0^3 \cdot x. \tag{6}$$

Введем новую переменную $t = \ln x$, $x = e^t$, $t \in \left[0, \ln\left(\frac{R}{r_0}\right)\right]$. Преобразуем дифференциальное уравнение (6) к виду:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} - \frac{h'(t)}{h(t)}\frac{d\psi}{dt} + \left(\nu_{\theta r}\frac{h'(t)}{h(t)} - k^2\right)\psi(t) = -(3+\nu_{\theta r})\,h(t)\,\rho\omega_0^2 r_0^3 e^{3t}. \tag{7}$$

Запишем дифференциальное уравнение (7) так:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} - k^2\psi(t) = \frac{h'(t)}{h(t)}\frac{d\psi}{dt} - \nu_{\theta r}\frac{h'(t)}{h(t)}\psi(t) - (3+\nu_{\theta r})\,\rho\omega_0^2 r_0^3 \cdot h(t)\,e^{3t}, \tag{8}$$

или в виде:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} - k^2\psi(t) = f_1(t), \tag{9}$$

где $f_1(t) = \frac{h'(t)}{h(t)}\frac{d\psi}{dt} - \nu_{\theta r}\frac{h'(t)}{h(t)}\psi(t) - (3+\nu_{\theta r})\,\rho\omega_0^2 r_0^3 \cdot h(t)\,e^{3t}$.

Однородное дифференциальное уравнение для функции $\psi_0(t)$ есть:

$$\frac{d^2\psi_o}{dt^2} - k^2\psi_o(t) = 0. \tag{10}$$

Его решение выражается в гиперболических функциях:

$$\psi_o(t) = C_1 chkt + C_2 shkt, \tag{11}$$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования.

Решение дифференциального уравнения (8) найдем методом вариации постоянных [6, с. 144]:

$$\psi(t) = C_1(t)\,chkt + C_2(t)\,shkt. \tag{12}$$

Подстановка выражения (12) для функции напряжений $\psi(t)$ в уравнение (9) приводит к следующей системе дифференциальных уравнений для функций $C_1(t), C_2(t)$:

$$\begin{cases} C_1'(t)\,chkt + C_2'(t)\,shkt = 0, \\ kC_1'(t)\,shkt + kC_2'(t)\,chkt = f_1(t). \end{cases} \tag{13}$$

Решим систему (13) методом Крамера:

$$\begin{cases} C_1'(t) = -\frac{1}{k}f_1(t)\,shkt, \\ C_2'(t) = \frac{1}{k}f_1(t)\,chkt. \end{cases} \tag{14}$$

Проинтегрируем систему (14). В результате получим:

$$\begin{cases} C_1(t) = -\frac{1}{k}\int\limits_0^t f_1(\tau) shk\tau d\tau + C_1^*, \\ C_2(t) = \frac{1}{k}\int\limits_0^t f_1(\tau) chk\tau d\tau + C_2^*. \end{cases} \tag{15}$$

Подставим выражения (15) для $C_1(t), C_2(t)$ в формулу (12):

$$\psi(t) = -\frac{1}{k} chkt \int_0^t f_1(\tau) shk\tau d\tau + \frac{1}{k} shkt \int_0^t f_1(\tau) chk\tau d\tau + C_1^* chkt + C_2^* shkt =$$

$$= \frac{1}{k} \int_0^t f_1(\tau) \left[shkt \cdot chk\tau - chkt \cdot shk\tau \right] d\tau + C_1^* chkt + C_2^* shkt \quad \Rightarrow$$

$$\psi(t) = \frac{1}{k} \int_0^t f_1(\tau) \, shk(t-\tau) \, d\tau + C_1^* chkt + C_2^* shkt. \tag{16}$$

Вычисляя интеграл $\int\limits_0^t f_1(\tau) shk(t-\tau) \, d\tau$ и проведя преобразования, получим окончательно линейное интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода для функции напряжений $\psi(t)$:

$$\psi(t) = \lambda_1 \int_0^t K_1(t,\tau) \, \psi(\tau) \, d\tau + f_1^*(t), \tag{17}$$

где $\lambda_1 = \frac{1}{k}$ — числовой параметр;

$K_1(t,\tau) = \left\{ \left[\left(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)} \right)' + \nu_{\theta r} \left(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)} \right) \right] shk(t-\tau) - k \left(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)} \right) chk(t-\tau) \right\}$ — ядро интегрального уравнения (17); $f_1^*(t) = C_1^* chkt + C_2^* shkt - \frac{(3+\nu_{\theta r})}{k} \rho \omega_0^2 r_0^3 \int\limits_0^t h(\tau) e^{3\tau} shk(t-\tau) \, d\tau$ — свободный член интегрального уравнения (17).

Вторая основная задача теории упругости для вращающегося полярно-ортотропного кольцевого диска переменной толщины $h(r)$ сводится к нахождению решения дифференциального уравнения 2-го порядка для радиального перемещения $u(r)$:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \left(\frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{r} \right) \frac{du}{dr} + \left(\nu_{\theta r} \frac{h'(r)}{h(r)} - \frac{k^2}{r} \right) \frac{1}{r} u(r) = -\frac{\left(k^2 - \nu_{\theta r}^2\right)}{E_\theta} \rho \omega_0^2 r \tag{18}$$

с граничными условиями $u(r_9) = U_0, \quad u(R) = U_1,$ (19)
где U_0, U_1 — постоянные смещения на внутреннем и внешнем контурах диска.

Введя безразмерную переменную $x = \frac{r}{r_9}$, запишем уравнение (18) в виде:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \left(\frac{h'(x)}{h(x)} + \frac{1}{x} \right) \frac{du}{dx} + \left(\nu_{\theta r} \frac{h'(x)}{h(x)} - \frac{k^2}{x} \right) \frac{1}{x} u(x) = -\frac{\left(k^2 - \nu_{\theta r}^2\right)}{E_\theta} \rho \omega_0^2 r_0^3 \cdot x. \tag{20}$$

В новой переменной $t = \ln x, \quad x = e^t$ дифференциальное уравнение (20) запишется так:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{h'(t)}{h(t)} \frac{du}{dt} + \left(\nu_{\theta r} \frac{h'(t)}{h(t)} - k^2 \right) u(t) = -\frac{\left(k^2 - \nu_{\theta r}^2\right)}{E_\theta} \rho \omega_0^2 r_0^3 \cdot e^{3t} \tag{21}$$

или

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - k^2 u(t) = f_2(t), \tag{22}$$

где $f_2(t) = -\frac{h'(t)}{h(t)} \frac{du}{dt} - \nu_{\theta r} \frac{h'(t)}{h(t)} u(t) - \frac{\left(k^2 - \nu_{\theta r}^2\right)}{E_\theta} \rho \omega_0^2 r_0^3 \cdot e^{3t}$.

Применяя метод Лиувилля для дифференциального уравнения (22), сведем его к линейному интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода:

$$u(t) = \frac{1}{k} \int_0^t f_2(\tau) \, shk(t-\tau) \, d\tau + C_1^{**} chkt + C_2^{**} shkt. \tag{23}$$

Вычисляя интеграл $\int\limits_0^t f_2(\tau) shk(t-\tau)\,d\tau$ и проведя преобразования, получим окончательно линейное интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода для радиального перемещения $u(t)$:

$$u(t) = \lambda_2 \int\limits_0^t K_2(t,\tau)\, u(\tau)\, d\tau + f_2^*(t)\,, \tag{24}$$

где $\lambda_2 = \frac{1}{k}$ — числовой параметр;

$K_2(t,\tau) = \left\{ \left[\left(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)} \right)' - \nu_{\theta r} \left(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)} \right) \right] \cdot sh\left(k(t-\tau)\right) - k \left(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)} \right) \cdot ch\left(k(t-\tau)\right) \right\}$ – ядро интегрального уравнения (24); $f_2^*(t) = C_3 \cdot ch(kt) + C_4 \cdot sh(kt) + \frac{(k^2-\nu_{\theta r}^2)}{(k^2-9)} \frac{\rho\omega_0^2 r_0^3}{E_\theta} e^{3t}$ — свободный член интегрального уравнения (24).

Постоянные интегрирования C_3, C_4 определяются из граничных условий (19).

Используя закон Гука для полярно-ортотропного тела, получим выражения для компонент напряжений $\sigma_r(r), \sigma_\theta(r)$ через радиальное перемещение $u(r)$ [4]:

$$\sigma_r(r) = \frac{E_\theta}{\left(k^2 - \nu_{\theta r}^2\right)} \left(\frac{du}{dr} + \frac{\nu_{\theta r}}{r} u(r) \right), \quad \sigma_\theta(r) = \frac{E_\theta}{\left(k^2 - \nu_{\theta r}^2\right)} \left(\nu_{\theta r} \frac{du}{dr} + \frac{k^2}{r} u(r) \right). \tag{25}$$

Смешанная задача теории упругости для вращающегося полярно-ортотропного кольцевого диска переменной толщины $h(r)$ при граничных условиях, например,

$$u(r_0) = U_0, \quad \sigma_r(R) = p_1, \tag{26}$$

решается как 2-я основная задача теории упругости для радиального перемещения $u(r)$. Постоянные интегрирования будут определяться из граничных условий (26).

3. Решения интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода плоской задачи теории упругости для вращающегося полярно-ортотропного кольцевого диска переменной толщины

Для решения линейных интегральных уравнений (17) и (24) применим метод последовательных приближений [5]:

$$y_m^{(i)}(t) = \lambda_i \int\limits_0^t K_i(t,\tau)\, y_{m-1}^{(i)}(\tau)\, d\tau + f_i(t)\,, \quad \left(i = \overline{1,2}\right) \quad , \tag{27}$$

где $y_m^{(1)}(t) = \psi_m(t)\,,\, y_m^{(2)}(t) = u_m(t)\,$, индекс m означает номер итерации.

В качестве нулевого приближения примем: $y_0^{(i)}(t) = 0$.

Если $f_i(t)$ непрерывны в $\left[0, \ln\left({}^{R}\!/\!{}_{r_0}\right)\right]$, а ядра $K_i(t,\tau)$ непрерывны при $0 \le t \le \ln\left({}^{R}\!/\!{}_{r_0}\right)$, $0 \le$ $\le \tau \le t$, то последовательность $\left\{y_m^{(i)}(t)\right\}$ сходится при $m \to \infty$ к решениям $y^{(i)}(t)$ интегральных уравнений (17) и (24):

$$y^{(i)}(t) = \lim_{m\to\infty} y_m^{(i)}(t)\,.$$

Постоянные интегрирования определяются из граничных условий на каждом шаге итерации.

4. Заключение

Приведенные интегральные уравнения (17) и (24) в форме Лиувилля являются более удобными в практическом применении при решении плоской задачи теории упругости для вращающихся профилированных анизотропных дисков, чем интегральные уравнения Вольтерра 2-го рода (5). Решения интегральных уравнений (17) и (24) позволяют непосредственно находить искомые функции напряжений $\psi(t)$ и радиального перемещения $u(t)$. Данные уравнения можно решать, кроме метода последовательных приближений, также другими аналитическими и численными методами приведенными, например, в справочнике [7].

Литература

1. *Королевич В.В. Интегральные уравнения Вольтерра 2-го рода плоской задачи теории упругости для вращающихся полярно-ортотропных композитных дисков переменной толщины.* Материалы Международной конференции «Аналитические методы анализа и дифференциальные. уравнения (AMADE-2009)», 14-19 сентября 2009 г., Минск. С. 90.

2. *Королевич В.В., Медведев Д.Г. Интегральные уравнения Вольтерра 2-го рода плоской задачи теории упругости для вращающихся полярно-ортотропных дисков переменной толщины.* Вестник Бел. гос. ун-та. Сер.1. Физ. Мат. Информ. №1 (2010), 160–162.

3. *Бурмистров Е.Ф., Маслов Н.М. Напряжения в ортотропных вращающихся дисках переменной толщины. Сб. Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел. Под ред. Е.Ф. Бурмистрова и А.С. Космодамианского.* Вып. 5. Изд.-во Саратовского университета, (1970), 80–86.

4. *Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки.* М.: Физматгиз, 1959.

5. *Краснов М.П., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Интегральные уравнения: задачи и примеры с подробными решениями.* М.: КомКнига (2007).

6. *Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1976.

7. *Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие.* Киев: Наукова думка, 1986.

УДК 517.925+517.957

О СВОЙСТВЕ ПЕНЛЕВЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ШЕСТОГО ПОРЯДКА

Е. Е. Кулеш[1], **И. П. Мартынов**[2], **В. М. Пецевич**[3]

e-mail: [1]kulesh@grsu.by, [2]martynov@grsu.by, [3]pecevich@mail.ru

В данной работе исследуется одно дифференциальное уравнение в частных производных шестого порядка на наличие свойства Пенлеве. Это свойство стало широко используемым критерием полной интегрируемости дифференциальных уравнений в частных производных, которые точно разрешимы методом обратной задачи рассеяния или линеаризацией через преобразование переменных. Свойство Пенлеве служит основой классификации и приведения к каноническому виду нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных подобно тому, как это свойство позволяет классифицировать обыкновенные дифференциальные уравнения. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных выше третьего порядка по свой свойству Пенлеве еще далека от своего завершения. Это связано с тем, что известные методы исследования дают в основном лишь необходимые условия.

Для доказательства достаточности наличия свойства Пенлеве можно, например, свести исследуемое уравнение подходящей заменой к уравнению, наличие свойства Пенлеве для которого уже установлено. Поэтому особый интерес представляют методы, позволяющие строить уравнения, априори имеющие свойство Пенлеве. Во введении приводится известное в литературе определение свойства Пенлеве для дифференциального уравнения в частных производных, а также описание основного метода исследования — метода резонансов.

В основной части исследована резонансная структура исследуемого уравнения, проверено выполнение необходимых условий наличия свойства Пенлеве. Для достижения поставленной цели решены задачи построения рядов, представляющих решение дифференциального уравнения в частных производных шестого порядка, содержащих шесть произвольных функций. Найдены слагаемые меньшего веса, при наличии которых для уравнения будет выполнено необходимое условие наличия свойства Пенлеве. Найдена подстановка, линеаризующая полученное уравнение. Построены рациональные относительно функции решения по отрицательным резонансам.

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение в частных производных; свойство Пенлеве; метод резонансов; резонансные коэффициенты; ряд; рациональное решение.*

ON THE PAINLEVE PROPERTY FOR A PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION OF THE SIXTH ORDER

E. E. Kulesh[1], **I. P. Martynov**[2], **V. M. Pecevich**[3]

e-mail: [1]kulesh@grsu.by, [2]martynov@grsu.by, [3]pecevich@mail.ru

It is considered the presence of the Painleve property for a partial differential equation of the sixth order. This property became a widely used criteria for the complete integrability of partial differetial equations, which are completely solvable by the method of the inverse scattering problem or by the linearization through a transform of variables. The Painleve property is the basis of classification and reduction of nonlinear partial differential equations to canonical form, like this property allows to classify ordinary differential equations. Classification of partial differential equations of the order greater than three with Painleve property is still far from completeness. This is due to the fact that the known methods of research give generally only necessary conditions for the existence of the Painleve propertiy.

To prove sufficiency, one can try, for example, to reduce the investigated equation is a suitable substitute to the equation, the presence of Painleve properties for which you have already installed. Therefore, of particular interest get methods that allow to build the equations, a priori having the Painleve property. In the introduction it is given the definition of the Painleve property for partial differential equation known in the literature and describing the main method of research — method of the resonances.

In the main part, it is investigated resonant structure, proven the fulfillment of the necessary conditions for the presence of the Painleve properties of the studied equations. To achieve this goal it is solved the problem of constructing of the series representing of the solution to the partial differential equation of the sixth order, containing six arbitrary functions. Terms of the smallest weight are found, under which the equation satisfies the necessary condition for the existence of the Painleve properties. Suitable substitution is found, which reduces the considered equation to the linear equation. Solutions which are rational with respect to a function and related to negative resonance are constructed.

Keywords: *partial differential equation; Painleve property; method resonance; resonance coefficients; series; rational solution.*

Mathematics Subject Classification (2020): Primary 35G20, Secondary 34M55, 34A25.

1. Введение

Дифференциальные уравнения в частных производных описывают многие физические явления и процессы, такие как задачи о нелинейных волнах, описание волновых процессов, возникающих при стекании тонкого слоя жидкости по наклонной плоскости, процессы турбулентности, волны дрейфа в плазме, проблемы взаимодействия волн большой амплитуды, возникающие в физике плазмы, нелинейной оптике, физике ферромагнетиков и в других разделах физики. Решение современных физических задач требует как можно более точно передать физическую природу исследуемого объекта, что непременно ведет к усложнению математической модели и увеличению порядка входящих в нее уравнений.

Решения обыкновенных дифференциальных уравнений могут содержать особые точки различного характера. В работах Пенлеве и его учеников были получены важные результаты по проблеме отсутствия в решениях обыкновенных дифференциальных уравнений подвижных критических особых точек. Это свойство дифференциальных уравнений называют теперь свойством Пенлеве.

В последние десятилетия внимание многих математиков привлекают задачи выделения уравнений и систем со свойством Пенлеве, изучения свойств их решений, построения специальных классов решений, преобразований Беклунда и т.д.

Широко используется гипотеза Абловица о том, что все редукции к обыкновенным дифференциальным уравнениям полностью интегрируемых дифференциальных уравнений в частных производных обязательно обладают свойством Пенлеве (возможно после замены переменных). Однако эта гипотеза требует проверки на свойство Пенлеве всех редукций к ОДУ, что не всегда удобно. Вейсс, Табор и Карневале ввели понятие свойства Пенлеве для дифференциальных уравнений в частных производных и применили тест Пенлеве непосредственно для дифференциальных уравнений в частных производных без приведения их к ОДУ [1].

Определение 1.1. Дифференциальное уравнение в частных производных имеет *свойство Пенлеве*, если все подвижные особенности его общего решения, если они существуют, являются полярными [2].

В отличие от функции одной комплексной переменной, особенности функции многих комплексных переменных не могут быть изолированными. В случае двух комплексных переменных x, t особенности возникают вдоль аналитических многообразий Φ, заданных уравнением $\varphi(x, t) = 0$. Если особое многообразие Φ является полярным для решения дифференциального уравнения в частных производных, то в окрестности этого многообразия имеет место представление решения в виде ряда Лорана, содержащее конечное число слагаемых с отрицательными степенями, т.е. в виде ряда

$$w = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \varphi^{k-s}. \tag{1}$$

Для исследования дифференциального уравнения в частных производных n-го порядка на наличие свойства Пенлеве используется метод резонансов (его также называют тест Пенлеве или сингулярный анализ). В исследуемое уравнение подставляют ряд (1) где $u_0 = u_0(x,t) \neq 0$, $u_k = u_k(x,t)$ — аналитические функции в окрестности Φ, $s \in \mathbb{Z}$, $s \neq 0$. Если разложение (1) является локальным представлением общего решения, оно будет иметь n произвольных функций. Разложение (1) будет иметь определенные значения $k = r$, называемые резонансными числами (резонансами), при которых соответствующие $u_r(x,t)$ должны быть произвольными. Один резонанс всегда возникает при $k = -1$ и соответствует произвольности самой функции $\varphi(x,t)$, а позиции других резонансов определяются видом нелинейности исследуемого уравнения. Уравнение может иметь разные доминантные степени s в (1), каждая из которых будет иметь свою собственную резонансную структуру. Необходимо чтобы при каждом значении s резонансные функции оставались произвольными. Это необходимое условие будем называть *необходимым условием A*.

Проверка необходимого условия A часто связана с громоздкими вычислениями. Можно считать $\varphi(x,t) = x - \gamma(t)$, поскольку потеря общности не влияет на резонансную структуру уравнения. Теорема существования неявной функции утверждает, что вблизи поверхности Φ функция $\varphi(x,t)$ может быть представлена в виде $\varphi(x,t) = x - \gamma(t)$, где $\varphi(\gamma(t),t) = 0$ при условии, что $\varphi_x(x,t) \neq 0$ на поверхности Φ. Тогда $\varphi_x = 1$. Заменив x на $\gamma(t)$ в коэффициентах $u_k(x,t)$ и переразложив ряд (1), получим ряд по степеням φ с коэффициентами, зависящими только от t.

Необходимым условием B наличия свойства Пенлеве для дифференциального уравнения с частными производными n-го порядка будем называть произвольность функции φ и $n-1$ резонансных коэффициентов u_{r_i}, $i = \overline{1, n-1}$, ряда (1), представляющего решение дифференциального уравнения в частных производных где $\varphi_x = 1$, $u_k = u_k(t)$. Следует отметить, что, тем не менее, проверка необходимого условия A дает более полную информацию о свойствах решений уравнения, позволяет установить некоторые свойства решений, построить специальные решения, иерархии решений, преобразования Бэклунда и т. д.

Классификация дифференциальных уравнений в частных производных n-го порядка по свойству Пенлеве при $n \geq 3$ еще далека от своего завершения. Это связано с тем, что известные методы исследования дают в основном лишь необходимые условия наличия свойства Пенлеве. Для доказательства их достаточности можно, например, свести исследуемое уравнение подходящей заменой к уравнению, наличие свойства Пенлеве для которого уже установлено. Поэтому особый интерес представляют методы, позволяющие строить уравнения, имеющие свойство Пенлеве.

В работе [3] получены 7 обыкновенный дифференциальных уравнений пятого порядка со свойством Пенлеве. В рамках решения задачи классификации дифференциальных уравнений в частных производных шестого порядка по свойству Пенлеве будем строить на основе этих ОДУ дифференциальные уравнения в частных производных и исследовать их на наличие свойства Пенлеве. В работах [4, 5] исследованы два из них.

2. Резонансная структура уравнения

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\begin{gathered} y^{(5)} + 5yy^{(4)} + 15y'y''' + 10y^2y''' + 10y''^2 + 50yy'y'' + 10y^3y'' + \\ +15y'^3 + 30y^2y'^2 + 5y^4y' = 0. \end{gathered}$$

Построим на его основе дифференциальное уравнение в частных производных

$$
\begin{gathered}
(w_{xxxxx}+5ww_{xxxx}+15w_xw_{xxx}+10w^2w_{xxx}+10w_{xx}^2+50ww_xw_{xx}+10w^3w_{xx}+\\
+15w_x^3+30w^2w_x^2+5w^4w_x)_x=F,\\
F=A_1w_{xxxxx}+A_2w_{xxxxt}+A_3w_{xxxtt}+A_4w_{xxttt}+A_5w_{xtttt}+A_6w_{ttttt}+\\
+w(B_1w_{xxxx}+B_2w_{xxxt}+B_3w_{xxtt}+B_4w_{xttt}+B_5w_{tttt})+w^2(C_1w_{xxx}+\\
+C_2w_{xxt}+C_3w_{xtt}+C_4w_{ttt})+w_x(D_1w_{xxx}+D_2w_{xxt}+D_3w_{xtt}+D_4w_{ttt})+\\
+w_t(D_5w_{xxx}+D_6w_{xxt}+D_7w_{xtt}+D_8w_{ttt})+E_1w_{xx}^2+E_2w_{xt}^2+E_3w_{tt}^2+\\
+E_4w_{xx}w_{xt}+E_5w_{xx}w_{tt}+E_6w_{xt}w_{tt}+ww_x(G_1w_{xx}+G_2w_{xt}+G_3w_{tt})+\\
+ww_t(G_4w_{xx}+G_5w_{xt}+G_6w_{tt})+w^3(J_1w_{xx}+J_2w_{xt}+J_3w_{tt})+\\
+K_1w_x^3+K_2w_x^2w_t+K_3w_xw_t^2+K_4w_t^3+w^2(L_1w_x^2+L_2w_xw_t+L_3w_t^2)+\\
+w^4(M_1w_x+M_2w_t)+Nw^6+O_1w_{xxxx}+O_2w_{xxxt}+O_3w_{xxtt}+O_4w_{xttt}+O_5w_{tttt}+\\
+w(P_1w_{xxx}+P_2w_{xxt}+P_3w_{xtt}+P_4w_{ttt})+w_x(Q_1w_{xx}+Q_2w_{xt}+Q_3w_{tt})+\\
+w_t(R_1w_{xx}+R_2w_{xt}+R_3w_{tt})+w^2(S_1w_{xx}+S_2w_{xt}+S_3w_{tt})+\\
+w(T_1w_x^2+T_2w_xw_t+T_3w_t^2)+w^3(U_1w_x+U_2w_t)+U_3w^5+\\
+V_1w_{xxx}+V_2w_{xxt}+V_3w_{xtt}+V_4w_{ttt}+w(W_1w_{xx}+W_2w_{xt}+W_3w_{tt})+\\
+X_1w_x^2+X_2w_xw_t+X_3w_t^2+w^2(X_4w_x+X_5w_t)+X_6w^4+Y_1w_{xx}+Y_2w_{xt}+\\
+Y_3w_{tt}+Y_4w^3+w(Y_5w_x+Y_6w_t)+Z_1w_x+Z_2w_t+Z_3w^2+Z_4w+Z_5,
\end{gathered}
\tag{2}
$$

где $w=w(x,t)$, F содержит слагаемые меньшего веса с производными по x и t с аналитическими коэффициентами от x,t. Ставится задача исследовать уравнение (2) на наличие свойства Пенлеве и исследовать некоторые аналитические свойства его решений.

Теорема 2.1. *Для уравнения (2) при $F=0$ выполнено необходимое условие B наличия свойства Пенлеве.*

Доказательство. Применим метод резонансов. Будем искать решение уравнения (2) при $F=0$ в виде ряда

$$w=\sum_{k=0}^{\infty}u_k\varphi^{k-1}, \tag{3}$$

где $\varphi=\varphi(x,t), \varphi_x=1$, $u_k=u_k(t)$. Приравнивая коэффициенты при φ^{-7}, получим уравнение для определения u_0

$$u_0(u_0-1)(u_0-2)(u_0-3)(u_0-4)=0. \tag{4}$$

Приравнивая коэффициенты при φ^{r-7}, получим уравнение для определения резонансных чисел

$$
\begin{gathered}
(r-5)(r-6)(r^4+(5u_0-10)r^3+(10u_0^2-40u_0+35)r^2+(10u_0^3-60u_0^2+\\
+105u_0-50)r+5u_0^4-40u_0^3+105u_0^2-100u_0+24)=0.
\end{gathered}
\tag{5}
$$

Решая систему (4), (5), определим резонансную структуру уравнения (2) (u_0; r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6). Получим следующие наборы: $(1;-1,1,2,3,5,6)$, $(2;-1,-2,1,2,5,6)$, $(3;-1,-2,-3,1,5,6)$, $(4;-1,-2,-3,-4,5,6)$.

Приравнивая коэффициенты при φ^{-6},..., φ^{-4} получим условия:

$$u_1u_0(u_0-1)(u_0-2)(u_0-3)=0; \tag{6}$$

$$u_0(u_0-1)(u_0-2)(u_0u_2+2u_1^2-u_2)=0; \tag{7}$$

$$u_0(u_0-1)(u_0^2u3+4u_0u_1u_2+2u_1^3-u_0u_3-2u_1u_2+2u_3)=0. \tag{8}$$

При $u_0=1$ резонансные условия (6)–(8) выполнены. Значит резонансные коэффициенты u_1,u_2,u_3 являются произвольными. При $u_0=2$ резонансные условия (6), (7) выполнены. Значит резонансные коэффициенты u_1,u_2 являются произвольными. При $u_0=3$ резонансное условие (6) выполнено. Значит резонансный коэффициент u_1 является произвольным. Коэффициенты при φ^{-2} и φ^{-1} равны 0. Значит, резонансные условия, отвечающее произвольности u_5 и u_6 выполнены автоматически при любом u_0. Таким образом, для всех резонансных наборов резонансные коэффициенты ряда (3) и φ_t действительно являются произвольными функциями от t. Теорема доказана.

Далее подберем коэффициенты правой части уравнения (2) так, чтобы резонансные коэффициенты ряда (3) и функция φ_t оставались произвольными.

Теорема 2.2. *Если уравнение (2) имеет вид*

$$\begin{gathered} w_{xxxxxx} + 5ww_{xxxxx} + 20w_xw_{xxxx} + 10w^2w_{xxxx} + 35w_{xx}w_{xxx} + 70ww_xw_{xxx} + \\ +10w^3w_{xxx} + 90w^2w_xw_{xx} + 95w_x^2w_{xx} + 5w^4w_{xx} + 50ww_{xx}^2 + 60ww_x^3 + 20w^3w_x^2 = \\ = Aw_{xxxxx} + 4Aww_{xxxx} + Bw_{xxxx} + 14Aw_xw_{xxx} + 6Aw^2w_{xxx} + (2A_x + 3B)ww_{xxx} + \\ +Cw_{xxx} + 10Aw_{xx}^2 + (9B + 2A_x)w_xw_{xx} + 36Aww_xw_{xx} + 4Aw^3w_{xx} + \\ +(6A_x + 3B)w^2w_{xx} + (-2A_{xx} + 2B_x + 2C)ww_{xx} + Dw_{xx} + Ew_{xt} + \\ +12Aw_x^3 + (-6A_{xx} + 6B_x)w^2w_x + (6A_{xxx} - 5B_{xx} + 4C_x)ww_x + 8A_xw^3w_x + \\ +12Aw_x^2w^2 + (12A_x + 6B)ww_x^2 + (2C - 3A_{xx} + 2B_x)w_x^2 + \\ +(-5A_{xxxx} + 4B_{xxx} - 3C_{xx} + 2D_x)w_x + 2E_xw_t + A_{xx}w^4 + (-2A_{xxx} + B_{xx})w^3 + \\ +(3A_{xxxx} - 2B_{xxx} + C_{xx})w^2 + (-4A_{xxxxx} + 3B_{xxxx} - 2C_{xxx} + D_{xx})w + G, \end{gathered} \tag{9}$$

где $A, B, ..., G$ — аналитические функции от (x,t), $E_{xx} = 0$, то для него выполнено необходимое условие B наличия свойства Пенлеве.

Доказательство. Выполнив в уравнении (2) преобразование

$$w = f_xu(\xi, t), \quad \xi = f(x,t),$$

получим для u уравнение аналогичное (2) с новыми коэффициентами $\widetilde{A_1}, \widetilde{A_2}, ..., \widetilde{Z_5}$. При этом $\widetilde{A_1} = \frac{1}{f_x^2}(21f_{xx} - A_1f_x)$, $\widetilde{B_1} = \frac{1}{f_x^2}(95f_{xx} - B_1f_x)$. Функцию f выберем таким образом, чтобы выполнялось условие $f_{xx} = \frac{f_x}{11}(B_1 - 4A_1)$. Тогда получим $\widetilde{B_1} = 4\widetilde{A_1}$. Таким образом, в старых обозначениях можно рассматривать уравнение (2), считая $B_1 = 4A_1$.

Разложим каждый коэффициент правой части в ряд по степеням φ, например

$$A_1 = A_{10} + A_{11}\varphi + A_{12}\varphi^2 + A_{13}\varphi^3 + ..., \;\; A_{1k} = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k A_1}{\partial x^k}\bigg|_{\varphi=0}.$$

Подставляя ряд (3) в уравнение (2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях φ, найдем нерезонансные коэффициенты и резонансные условия. Подберем коэффициенты правой части так, чтобы все резонансные условия были выполнены. Первое резонансное условие, отвечающее произвольности u_1, имеет вид

$$120A_{60}\varphi_t^5 + g_1 = 0, \tag{10}$$

где g_1 не содержит слагаемых с φ_t^5. Так как функция φ_t должна быть произвольной, то для выполнения резонансного условия (10) необходимо требовать $A_{60} \equiv 0$. Так как $A_{60} = A_6|_{\varphi=0}$, где функция $\varphi = x + \gamma(t)$, а $\gamma(t)$ — произвольная, то $A_6 = 0$. Тогда первое резонансное условие примет вид

$$(24B_{50} + 4E_{30} + 6D_{80} - 120A_{50})\varphi_t^4 + g_2 = 0,$$

где g_2 не содержит слагаемых с φ_t^4. Чтобы функция φ_t была произвольной, необходимо требовать $24B_{50} + 4E_{30} + 6D_{80} - 120A_{50} = 0$, откуда найдем $E_3 = 30A_5 - 6B_5 - \frac{3}{2}D_8$.

Продолжая этот процесс и подбирая коэффициенты так, чтобы все резонансные условия были выполнены, с учетом обозначений

$$A_1 = A, O_1 = B, V_1 = C, Y_1 = D, Y_2 = E, Z_5 = G$$

приведем уравнение (2) к виду (9). Теорема доказана.

Замечание 2.1. В работе [6] приведен частный случай теоремы 2.2. когда коэффициенты уравнения (2) зависят только от t.

Теорема 2.3. *Для уравнения (9) выполнено необходимое условие A наличия свойства Пенлеве.*

Доказательство. Будем искать решение уравнения (9) в виде ряда (3), где $\varphi = \varphi(x,t)$, $\varphi_x \neq 1$, $u_k = u_k(x,t)$. В этом случае первый коэффициент $u_0 = k\varphi_x, k = \overline{1,4}$. Пусть $u_0 = \varphi_x$. Найдем нерезонансный коэффициент u_4. Первое резонансное условие, отвечающее произвольности u_1, имеет вид

$$\begin{gathered}
20\varphi_x^2 u_0(u_0-\varphi_x)(u_0-2\varphi_x)(u_0-3\varphi_x)u_1 + 4(60\varphi_x^5 u_0 - 11\varphi_x^4 u_0^2 + \\
+60\varphi_x^3 u_0^3 - \varphi_x^2 u_0^4)A_0 - (360\varphi_x^4 u_0 - 510\varphi_x^3 u_0^2 + 215\varphi_x^2 u_0^3 - 30\varphi_x u_0^4 + u_0^5)\varphi_{xx} - \\
-2(72\varphi_x^5 - 240\varphi_x^4 u_0 + 205\varphi_x^3 u_0^2 - 60\varphi_x^2 u_0^3 + 5\varphi_x u_0^4)u_{0x} = 0
\end{gathered}$$

и выполняется с учетом вида u_0. Аналогично убеждаемся, что выполнены резонансные условия, отвечающие произвольности u_2, u_3, u_5, u_6. Так же проверяем выполнение резонансных условий при $u_0 = k\varphi_x, k = \overline{2,4}$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.3. позволяет исследовать некоторые свойства решений уравнения (9).

Теорема 2.4. *Функция $w = \frac{\varphi_x}{\varphi}$, где φ удовлетворяет условию*

$$\begin{gathered}
\varphi_{xxxxx} = A\varphi_{xxxx} + (B-2A_x)\varphi_{xxx} + (C-2B_x+3A_{xx})\varphi_{xx} + \\
+(D-2C_x+3B_{xx}-4A_{xxx})\varphi_x + \varphi_t E,
\end{gathered} \tag{11}$$

является решением уравнения (9) при $G = 0$.

Доказательство. Введем ограничения на коэффициенты ряда (3) и функцию φ. Пусть $u_0 = \varphi_x$, $u_1 = u_2 = u_3 = u_5 = u_6 = 0$. При этом u_4 примет вид

$$\begin{gathered}
u_4 = \frac{1}{30\varphi_x^4}(-\varphi_{xxxxx} + A_0\varphi_{xxxx} + (B_0-2A_1)\varphi_{xxx} + (C_0-2B_1+6A_2)\varphi_{xx} + \\
+(D_0-2C_1+6B_2-24A_3)\varphi_x + \varphi_t E_0).
\end{gathered}$$

Функцию φ выберем таким образом, чтобы коэффициент u_4 также был равен нулю. Тогда φ должно удовлетворять (11). Таким образом, $u_k = 0, k = \overline{1,6}$. Можно убедиться, что при этом также получим $u_k = 0, k = 7, 8, ...$ Значит ряд (3) примет вид $w = \frac{\varphi_x}{\varphi}$. Теорема доказана.

Теорема 2.5. *Уравнение (9) приводится к линейному дифференциальному уравнению в частных производных*

$$\begin{gathered}
v_{xxxxx} = Av_{xxxx} + (B-2A_x)v_{xxx} + (C-2B_x+3A_{xx})v_{xx} + \\
+(D-2C_x+3B_{xx}-4A_{xxx})v_x + Ev_t + Hv, H_{xx} = G.
\end{gathered} \tag{12}$$

Доказательство. Выполнив в уравнении (9) замену $w = \frac{v_x}{v}$, где $v = v(x,t)$, приведем его к виду

$$\begin{gathered}
\frac{v_{xxxxxxx}}{v} - \frac{2v_{xxxxxx}v_x + v_{xxxxx}v_{xx}}{v^2} + \frac{2v_{xxxxx}v_x^2}{v^3} = A(\frac{v_{xxxxxx}}{v} - \\
-\frac{2v_{xxxxx}v_x + v_{xxxx}v_{xx}}{v^2} + \frac{2v_{xxxx}v_x^2}{v^3}) + B(\frac{v_{xxxxx}}{v} - \\
-\frac{2v_{xxxx}v_x + v_{xxx}v_{xx}}{v^2} + \frac{2v_{xxx}v_x^2}{v^3}) + A_x(\frac{2v_{xxxx}v_x + 2v_{xxx}v_{xx}}{v^2} - \frac{4v_{xxx}v_x^2}{v^3}) + \\
+C(\frac{v_{xxxx}}{v} - \frac{2v_{xxx}v_x + v_{xx}^2}{v^2} + \frac{2v_{xx}v_x^2}{v^3}) + D(\frac{v_{xxx}}{v} - \frac{3v_{xx}v_x}{v^2} + \frac{2v_x^3}{v^3}) + \\
+E(\frac{v_{xxt}}{v} - \frac{2v_{xt}v_x + v_{xx}v_t}{v^2} + \frac{2v_x^2 v_t}{v^3}) - A_{xx}(\frac{2v_{xxx}v_x + 3v_{xx}^2}{v^2} - \frac{6v_{xx}v_x^2}{v^3}) + \\
+A_{xxx}(\frac{6v_{xx}v_x}{v^2} - \frac{8v_x^3}{v^3}) + B_x(\frac{2v_{xxx}v_x + 2v_{xx}^2}{v^2} - \frac{4v_{xx}v_x^2}{v^3}) - \\
-B_{xx}(\frac{5v_{xx}v_x}{v^2} - \frac{6v_x^3}{v^3}) + C_x(\frac{4v_{xx}v_x}{v^2} - \frac{4v_x^3}{v^3}) - A_{xxxx}(\frac{5v_{xx}}{v} - \frac{8v_x^2}{v^2}) + \\
+B_{xxx}(\frac{4v_{xx}}{v} - \frac{6v_x^2}{v^2}) - C_{xx}(\frac{3v_{xx}}{v} + \frac{4v_x^2}{v^2}) + D_x(\frac{2v_{xx}}{v} - \frac{2v_x^2}{v^2}) + \\
+E_x(\frac{2v_{xt}}{v} - \frac{2v_x v_t}{v^2}) - A_{xxxxx}\frac{4v_x}{v} + B_{xxxx}\frac{3v_x}{v} - C_{xxx}\frac{2v_x}{v} + D_{xx}\frac{v_x}{v} + G.
\end{gathered} \tag{13}$$

Проинтегрировав уравнение (13) два раза по x и умножив на v, получим (12). Теорема доказана.

Построим рациональные относительно φ решения уравнения (9), отвечающие отрицательным резонансам.

Теорема 2.6. *Пусть* $\varphi = \varphi(x,t)$, $\varphi_x = 1$, $E_x = G = 0$, h, g, α_i, β_i, γ_i, $i = \overline{1,4}$ – *функции от* t.

1) Если $3A_{xx} - 2B_x + C = \alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1$, $2A_{xxx} - B_{xx} + D = \alpha_2 x + \beta_2$, *то функция* $w = \frac{2\varphi}{\varphi^2 - h}$, *где* $\varphi_t = \frac{\beta_1 - \beta_2}{E}$, h *удовлетворяет уравнению* $Eh_t + 2(3\alpha_1 - \alpha_2)h - 2\gamma_1 = 0$, *является решением уравнения (9), отвечающим* $u_0 = 2, r = -2$.

2) Если $2A_x - B = \alpha_1 x$, $A_{xx} - C = \alpha_2 x^2 + \beta_2$, $D = -\alpha_2 x + \beta_3$, *то функция* $w = \frac{3\varphi^2 - h}{\varphi(\varphi^2 - h)}$, *где* $\varphi_t = -\frac{\beta_3}{E}$, $h_t = \frac{6(\alpha_1 - \beta_2)}{E}$, *является решением уравнения (9), отвечающим* $u_0 = 3, r = -2$.

3) Если $2A_x - B = \alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1$, $A_{xx} - C = \alpha_2 x^2 + \beta_2 x + \beta_1$, $D = \alpha_3 x + \beta_3$, *то функция* $w = \frac{3\varphi^2}{\varphi^3 - h}$, *где* $\varphi_t = -\frac{\beta_3}{E}$, h *удовлетворяет уравнению* $Eh_t - 3(2\alpha_2 + \alpha_3)h + 6\gamma_1 = 0$, *является решением уравнения (9), отвечающим* $u_0 = 3, r = -3$.

4) Если $A = \alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1$, $B = \alpha_2 x^2 + \beta_2 x + \beta_1$, $C = \alpha_3 x^2 + \alpha_2 x + \gamma_3$, $D = -\alpha_3 x + \beta_4$, *то функция* $w = \frac{4\varphi(\varphi^2 - h)}{\varphi^4 - 2\varphi^2 h + 2h^2 - g}$, *где* $\varphi_t = -\frac{\alpha_2 + \beta_4}{E}$, $h_t = \frac{6\gamma_3}{E}$, g *удовлетворяет уравнению* $Eg_t + 8\alpha_3 g - 16\alpha_3 h^2 - 4(5\gamma_3 + 2\beta_2 - 6\alpha_1)h - 24\gamma_1 = 0$, *является решением уравнения (9), отвечающим* $u_0 = 4, r = -2$.

5) Если $A = \alpha_1 x^2 + \beta_1 x$, $B = \alpha_2 x^2 + \beta_2 x + \gamma_2$, $C = \alpha_3 x^2 + 2\alpha_2 x$, $D = \alpha_4$, *то функция* $w = \frac{4\varphi^3 - h}{\varphi(\varphi^3 - h)}$, *где* $\varphi_t = -\frac{2\alpha_2 + \alpha_4}{E}$, $h_t = \frac{24(\gamma_2 - \beta_1)}{E}$, *является решением уравнения (9), отвечающим* $u_0 = 4, r = -3$.

6) Если $A = \alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1$, $B = \alpha_2 x^2 + \beta_2 x + \beta_1$, $C = \alpha_3 x^2 + \beta_3 x$, $D = \alpha_4 x + \beta_4$, *то функция* $w = \frac{4\varphi^3}{\varphi^4 - h}$, *где* $e_t = -\frac{\beta_3 + \beta_4}{E}$, h *удовлетворяет уравнению* $Eh_t + 4(\alpha_3 - \alpha_4)h - 24\gamma_1 = 0$, *является решением уравнения (9), отвечающим* $u_0 = 4$, $r = -4$.

Доказательство. 1) Рассмотрим случай $u_0 = 2, r = -2$. Построим вначале рациональное решение обыкновенного дифференциального уравнения (2) при $F = 0$, где t — параметр. Согласно методике, описанной в [7] получим $w = \frac{2x}{x^2 - h}$, где $h = const$. Будем искать решение уравнения (9) в виде

$$w = \frac{2\varphi}{\varphi^2 - h}, \tag{14}$$

где $\varphi = \varphi(x,t), \varphi_x = 1, h = h(t)$. Подставляя (14) в (9) получим

$$\begin{gathered} -G\varphi^6 + (8A_{xxxxx} - 6B_{xxxx} + 4C_{xxx} - 2D_{xx})\varphi^5 + (4E_x\varphi_t + 3Gh - 22A_{xxxx} + \\ +16B_{xxx} - 10C_{xx} + 4D_x)\varphi^4 + ((4D_{xx} - 8C_{xxx} + 12B_{xxxx} - 16A_{xxxxx})h - \\ -4E\varphi_t - 4E_x h_t + 40A_{xxx} - 28B_{xx} + 16C_x - 4D)\varphi^3 + \\ +(-3Gh^2 + (12A_{xxxx} - 8B_{xxx} + 4C_{xx})h + 6Eh_t - 36A_{xx} + 24B_x - 12C)\varphi^2 + \\ +((8A_{xxxxx} - 6B_{xxxx} + 4C_{xxx} - 2D_{xx})h^2 + (-12E\varphi_t + 4E_x h_t + \\ +24A_{xxx} - 20B_{xx} + 16C_x - 12D)h)\varphi + Gh^3 + (-4E_x\varphi_t + \\ +10A_{xxxx} - 8B_{xxx} + 6C_{xx} - 4D_x)h^2 + (2Eh_t - 12A_{xx} + 8B_x - 4C)h = 0. \end{gathered} \tag{15}$$

Чтобы (15) выполнялось при всех φ, необходимо, чтобы все коэффициенты при одинаковых степенях φ равнялись нулю. Тогда $G = 0$, а также $4A_{xxxxx} - 3B_{xxxx} + 2C_{xxx} - D_{xx} = 0$. Интегрируя последнее равенство дважды по x, найдем

$$4A_{xxx} - 3B_{xx} + 2C_x - D + (\alpha_2 - 4\alpha_1)x - 2\beta_1 + \beta_2 = 0. \tag{16}$$

С учетом (16) перепишем (15) в виде

$$\begin{gathered} (4E_x\varphi_t - 6A_{xxxx} + 4B_{xxx} - 2C_{xx})\varphi^4 + (-4E\varphi_t - 4E_x h_t + 24A_{xxx} - 16B_{xx} + \\ +8C_x + 8\beta_1 - 4\beta_2)e^3 + ((12A_{xxxx} - 8B_{xxx} + 4C_{xx} + 48\alpha_1 - 12\alpha_2)h + \\ +6Eh_t - 36A_{xx} + 24B_x - 12C)\varphi^2 + (-12E\varphi_t + 4E_x h_t - 24A_{xxx} + 16B_{xx} - 8C_x + \\ +24\beta_1 - 12\beta_2)h\varphi + (-4E_x\varphi_t - 6A_{xxxx} + 4B_{xxx} - 2C_{xx} + 16\alpha_1 - 4\alpha_2)h^2 + \\ +(2Eh_t - 12A_{xx} + 8B_x - 4C)h = 0. \end{gathered} \tag{17}$$

Положив в (17) $3A_{xx} - 2B_x + C = \alpha_1 x^2 + \beta_1 x + \gamma_1$, $E_x = 0$, приведем его к виду

$$2(E\varphi_t - \beta_1 + \beta_2)\varphi^3 - 3(Eh_t + 2(3\alpha_1 - \alpha_2)h - 2\gamma_1)\varphi^2 + 6(E\varphi_t - \beta_1 + \beta_2)h\varphi - \\ -2(3\alpha_1 - \alpha_2)h^2 - (Eh_t - 2\gamma_1)h = 0.$$

Откуда при $\varphi_t = \frac{\beta_1 - \beta_2}{E}$ получим $(3\varphi^2 + h)(Eh_t + 2(3\alpha_1 - \alpha_2)h - 2\gamma_1) = 0$.

Таким образом, при выполнении условий пункта 1) теоремы функция (14) удовлетворяет уравнению (9). Пункты 2)–6) доказываются аналогично. Теорема доказана.

Замечание 2.2. В работе [8] приведен частный случай теоремы 2.6. когда коэффициенты $A, B, ..., G$ уравнения (9) зависят только от t.

3. Заключение

В работе исследовано дифференциальное уравнение в частных производных шестого порядка на наличие свойства Пенлеве. Исследована резонансная структура уравнения, проверено выполнение необходимых условий А и В наличия свойства Пенлеве. Найдены слагаемые меньшего веса, при присутствии которых для уравнения будет выполнено необходимое условие наличия свойства Пенлеве. Для достижения поставленной цели решены задачи построения рядов, представляющих решение дифференциального уравнения в частных производных шестого порядка, содержащих шесть произвольных функций. Найдена подстановка, линеаризующая полученное уравнение. Построены рациональные относительно функции φ решения по отрицательным резонансам. Результаты работы могут быть использованы в аналитической теории дифференциальных уравнений при исследовании аналогичных вопросов.

Литература

1. *Weiss J., Tabor M., Carnevale G.* The Painleve property for partial differential equations. *Math. Phys.* Vol. 24, №3 (1983), 522–526.

2. *Cosgrove C.* Painleve classification of all semilinear partial differential equations of the second order. I. Hyperbolic equations in two independent variables. *Stud. Appl. Math.* Vol. 89 (1993), 1–61.

3. *Exton H.* On non-linear ordinary differential equations with fixed critical points. *Rendiconti di Matematica.* Vol. 4, №3 (1971), 385–448.

4. *Кулеш Е.Е., Мартынов И.П.* Об одном дифференциальном уравнении в частных производных шестого порядка *Весці НАН Беларусі. Сер. Фізіка-матэматычных навук.* No. 1 (2018) 7–19.

5. *Кулеш Е.Е., Мартынов И.П.* О свойствах решений одного дифференциального уравнения в частных производных шестого порядка. *Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка.* Т. 8, No. 2 (2018), 19–25.

6. *Кулеш Е.Е.* О свойстве Пенлеве для одного дифференциального уравнения в частных производных шестого порядка. *Еругинские чтения-2019. XIX Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям: материалы конференции, Могилёв, 14-17 мая 2019 г.: в 2 ч. Ч. 1. Минск: Ин-т математики НАН Беларуси.* (2019), 9–10.

7. *Здунек А.Г., Мартынов И.П., Пронько В.А.* О рациональных решениях дифференциальных уравнений. *Вестник ГрГУ. Сер.2.* No. 3 (2000), 33–39.

8. *Кулеш Е.Е., Пецевич В.М.* О рациональных решениях одного дифференциального уравнения в частных производных шестого порядка. *Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений (AMADE-2021): материалы 10-го междунар. семинара, Минск, 13-17 сент. 2021 г. / ред. С.В. Рогозин, Минск: Ин-т математики НАН Беларуси.* (2021), 48–49.

УДК 517.958

THE SMOOTHNESS CRITERION FOR THE CLASSICAL SOLUTION TO INHOMOGENEOUS MODEL TELEGRAPH EQUATION WITH THE RATE $a(x,t)$ ON THE HALF-LINE

F. E. Lomovtsev

e-mail: lomovcev@bsu.by

The smoothness criterion is derived on the right-hand side f for an explicit solution F to

$$u_{tt}(x,t) - a^2(x,t)u_{xx}(x,t) - a^{-1}(x,t)a_t(x,t)u_t(x,t) - a(x,t)a_x(x,t)u_x(x,t) = f(x,t) \quad (1)$$

with the variable rate $a(x,t)$ in the first quarter of the plane $\dot{G}_\infty =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. The smoothness criterion consists of the necessary and sufficient smoothness requirements for the right-hand side f to this model telegraph equation. The necessary smoothness requirements on f are found as derivatives of F along two families of implicit characteristics of the given equation. Hence, by differentiation, we derive their sufficiency for twice continuous differentiability of F. The function F satisfies equation (1) pointwise, since it satisfies its canonical form pointwise. When f depends only on x or on t, then this smoothness criterion is equivalent to continuity f respectively, with respect to x or to t. For the equation, a general integral is constructed under a smoothness criterion of its right-hand side f.

Keywords: *implicit characteristics; smoothness criterion; general integral.*

Mathematics Subject Classification (2020): Primary 35L10, 35B65.

КРИТЕРИЙ ГЛАДКОСТИ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО МОДЕЛЬНОГО ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ СО СКОРОСТЬЮ $a(x,t)$ НА ПОЛУПРЯМОЙ

Ф. Е. Ломовцев

e-mail: lomovcev@bsu.by

Выведен критерий гладкости на правую часть f для явного решения F уравнения

$$u_{tt}(x,t) - a^2(x,t)u_{xx}(x,t) - a^{-1}(x,t)a_t(x,t)u_t(x,t) - a(x,t)a_x(x,t)u_x(x,t) = f(x,t) \quad (1)$$

с переменной скоростью $a(x,t)$ в первой четверти плоскости $\dot{G}_\infty =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. Критерий гладкости состоит из необходимых и достаточных требований гладкости на правую часть f этого модельного телеграфного уравнения. Необходимые требования гладкости на f найдены, как производные от F вдоль двух семейств неявных характеристик данного уравнения. Отсюда дифференцированием выводится их достаточность для дважды непрерывной дифференцируемости F. Функция F поточечно удовлетворяет уравнению (1), так как она поточечно удовлетворяет его каноническому виду. Когда f зависит только от x или t, тогда критерий гладкости равносилен непрерывности f соответственно по x или t. Для уравнения (1) построен общий интеграл с критерием гладкости его правой части f.

Ключевые слова: *неявные характеристики; критерий гладкости; общий интеграл.*

Introduction

In this paper, we derive a smoothness criterion (necessary and sufficient conditions) on the right-hand side to an inhomogeneous model telegraph equation with variable rate $a(x,t)$ in the first quarter of the plane for its explicit classical solution. Derivatives along two families of implicit characteristics of this equation from the investigated function of the form of a double integral over the characteristic triangle represent the necessary integral smoothness requirements on the continuous right-hand side of the equation. The sufficiency of all established necessary smoothness requirements for twice continuous differentiability of the function under study follows from the properties of solutions of a linear system of two equations with respect to its first partial derivatives with continuously differentiable right-hand sides. The sufficiency of all established necessary smoothness requirements on the right-hand side for the pointwise validity of the equation is obtained by substituting this function under study into the canonical form of an inhomogeneous model telegraph equation due to the non-degeneracy of the variables change. With the help of the obtained classical solution to the model telegraph equation with variable rate, its general integral in the first quarter of the plane is constructed. All proofs are essentially based on the inversion identities of implicit function characteristics of an equation and their implicit inverse functions from the article [1]. In this article, the classical solution was used to solve explicitly the first mixed problem to the model telegraph equation in the first quarter of the plane without continuing the original data. In it, the model telegraph equation is borrowed from Ph.D. thesis [2], where the first mixed problem was solved by the continuation method of the input data. In Ph.D. thesis [2], due to the special properties of the coefficients of the model telegraph equation on the half-strip of the plane, the first mixed problem is reduced to the upper half-plane by periodic continuations of the coefficients and the input data to the Cauchy problem and the d'Alembert formula on the set G_+, which are absent in [1].

1. Model telegraph equation with rate $a(x,t)$

In the first quarter of the plane $\dot{G}_\infty =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ it is searched for a classical solution $F = F(x,t)$ with minimal smoothness of the right-hand side $f = f(x,t)$ of the equation

$$u_{tt}(x,t) - a^2(x,t)u_{xx}(x,t) - a^{-1}(x,t)a_t(x,t)u_t(x,t) - a(x,t)a_x(x,t)u_x(x,t) = f(x,t) \tag{1.1}$$

where f is a given real function of variables x and t, coefficient $a(x,t) \geq a_0 > 0$, $(x,t) \in G_\infty =$ $= [0,+\infty[\times[0,+\infty[$, and $a \in C^2(G_\infty)$. We denote by the number of subscripts of functions the corresponding orders of their partial derivatives. Here $C^k(\Omega)$ is the set of k times continuously differentiable functions on the subset $\Omega \subset R^2$, $R =]-\infty,+\infty[$, and $C^0(\Omega) = C(\Omega)$.

It is well known that to the equation (1.1) corresponds the two characteristic equations

$$dx = (-1)^i a(x,t)dt,\ i = 1,\ 2, \tag{1.2}$$

which have common integrals $g_i(x,t) = C_i,\ C_i \in R,\ i = 1,\ 2$. If the coefficient a is strictly positive, i.e. $a(x,t) \geq a_0 > 0$, $(x,t) \in G_\infty$), then the variable t on the characteristics $g_1(x,t) = C_1,\ C_1 \in R$, strictly decreases and on the characteristics $g_2(x,t) = C_2,\ C_2 \in R$, it strictly increases with the growth of x. Therefore, implicit characteristic functions

$$y_i = g_i(x,t) = C_i,\ x \geq 0,\ t \geq 0, \quad i = 1,\ 2, \tag{1.3}$$

have strictly monotonic inverse functions $x = h_i\{y_i,t\}, t \geq 0$, $t = h^{(i)}[x,y_i], x \geq 0$, $i = 1,\ 2$. By the definition of inverse mappings, the following inversion identities from [1] are true:

$$g_i(h_i\{y_i,\ t\},\ t) = y_i,\ \forall\ y_i,\ h_i\{g_i(x,\ t),\ t\} = x,\ x \geq 0,\ i = 1,\ 2, \tag{1.4}$$

$$g_i(x,\ h^{(i)}[x,y_i]) = y_i,\ \forall\ y_i,\ h^{(i)}[x,\ g_i(x,t)] = t,\ t \geq 0,\ i = 1,\ 2, \tag{1.5}$$

$$h_i\{y_i,\ h^{(i)}[x,y_i]\} = x,\ x \geq 0,\ dh^{(i)}[h_i\{y_i,\ t\},y_i] = t,\ t \geq 0,\ i = 1,\ 2. \tag{1.6}$$

On the right-hand sides of identities (1.4)–(1.6), mutually inverse functions and variables that repeat twice on the left-hand sides are excluded, even if only one of the possible value of these variables repeats twice on the left-hand sides of these identities. If the coefficient satisfies the inequality $a(x,t) \ge a_0 > 0$, $(x,t) \in G_\infty$), $a \in C^2(G_\infty)$, then the functions g_i, h_i, $h^{(i)}$ belong to C^2 with respect to x, t, y_i, $i = 1, 2$ [1].

In case $a(x,t) = a = const > 0$ they have the forms $g_1(x,t) = x + at$, $g_2(x,t) = x - at$, $h_1\{y_1,t\} = y_1 - at$, $h_2\{y_2,t\} = y_2 + at$, $h^{(1)}[x,y_1] = (y_1 - x)/a$, $h^{(2)}[x,y_2] = (x - y_2)/a$ in the article [3].

Definition 1.1. The function $u = u(x,t)$ is called a classical solution to an equation (1.1) on the set G_∞, if $u \in C^2(G_\infty)$ and satisfies this equation at each point $(x,t) \in \dot{G}_\infty$.

First, if there exists at least one classical solution $u \in C^2(G_\infty)$ to the inhomogeneous equation (1.1) in G_∞, then its right-hand side must obviously be continuous $f \in C(G_\infty)$. Second, according to Definition 1.1, a particular solution F must be twice continuously differentiable $F \in C^2(G_\infty)$ and satisfies equation (1.1) pointwise on the set $\dot{G}_\infty$.

Let us find a particular classical solution to the inhomogeneous equation (1.1) in $\dot{G}_\infty$, a smoothness criterion (necessary and sufficient requirements) on f in G_∞ and its general integral in G_∞.

The characteristic $g_2(x,t) = g_2(0,0)$ divides the first quarter of the plane G_∞ into sets [1]:

$$G_- = \{(x,t) \in G_\infty : \quad g_2(x,t) > g_2(0,0)\}, \; G_+ = \{(x,t) \in G_\infty : \quad g_2(x,t) \le g_2(0,0)\}.$$

Just for the sake of simplicity, let the functions $\breve{a}$, $\breve{f}$ be the even extensions respectively of the functions a, f in x from G_∞ to all $x < 0$. As a result, we will not need these extensions due to the modulus of $|x|$ in these functions a, f.

Remark 1.1. An explicit formula for the classical solution of the first mixed problem for the model telegraph equation (1.1) in the first quarter of the plane $\dot{G}_\infty$ was derived in [1].

2. Smoothness criterion for a particular classical solution to an inhomogeneous model telegraph equation

Let us indicate the classical solution to equation (1.1) and its smoothness criterion on f in G_∞.

Theorem 2.1. [4] *Let the coefficient of (1.1) is strictly positive, i.e.* $a(x,t) \ge a_0 > 0$, $(x,t) \in G_\infty$), $a \in C^2(G_\infty)$. *The function*

$$F(x,t) = \frac{1}{2} \int\limits_0^t \int\limits_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}} \frac{f(|s|,\tau)}{a(|s|,\tau)} \, ds \, d\tau \tag{2.1}$$

is a classical solution to an inhomogeneous equation (1.1) in G_∞ *if and only if its right-hand side is continuous* $f \in C(G_\infty)$, *and*

$$H_i(x,t) \equiv \int\limits_0^t \frac{f(|h_i\{g_i(x,t),\tau\}|,\tau)}{a(|h_i\{g_i(x,t),\tau\}|,\tau)} \frac{\partial h_i\{g_i(x,t),\tau\}}{\partial g_i} \, d\tau \in C^1(G_\infty), \; i = 1, \; 2. \tag{2.2}$$

Proof. Necessity. If the function f is a classical solution to equation (1.1) on the set G_∞, then equation (1.1) implies the continuity of f on the set G_∞, i.e. $f \in C(G_\infty)$.

In equation (1.1) on G_∞ we make a non-degenerate change of independent variables [5]

$$\xi = g_1(x,t), \quad \eta = g_2(x,t), \tag{2.3}$$

where $g_i(x,t)$ are described in (1.3). Its Jacobian $J(x,t) = \xi_x \eta_t - \xi_t \eta_x \ne 0$ non-degenerate in G_∞, because $a(x,t) \ge a_0 > 0$ in G_∞.

Now, in order to identify additional necessary smoothness requirements (2.2) on the right-hand side of f to the continuity of $f \in C(G_\infty)$, we calculate the derivative of F from (2.1) along the characteristics $g_i(x,t) = C_i$ from (1.3), i.e. along the vectors $\vec{\sigma}_i = \{(g_i)_t, \; -(g_i)_x\}$, $i = 1, \; 2$. Gradients

$\overrightarrow{grad}\ \ g_i(x,t) = \{(g_i)_x,\ (g_i)_t\}$, $i = 1,\ 2$, are orthogonal to them, since $\left(\overrightarrow{grad}\ \ g_i(x,t),\ \vec{\sigma}_i\right) = (g_i)_x(g_i)_t - (g_i)_t(g_i)_x = 0$, $(x,t) \in G_\infty$, and are directed along the normals to these characteristics. By virtue of the second inversion identities (1.4), the first partial derivatives of the function F are

$$F_t = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \left[\frac{f(|h_1\{g_1(x,t),\tau\}|,\tau)}{a(|h_1\{g_1(x,t),\tau\}|,\tau)}\frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial t} - \frac{f(|h_2\{g_2(x,t),\tau\}|,\tau)}{a(|h_2\{g_2(x,t),\tau\}|,\tau)}\frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial t}\right] d\tau,$$

$$F_x = \frac{1}{2}\int\limits_0^t \left[\frac{f(|h_1\{g_1(x,t),\tau\}|,\tau)}{a(|h_1\{g_1(x,t),\tau\}|,\tau)}\frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial x} - \frac{f(|h_2\{g_2(x,t),\tau\}|,\tau)}{a(|h_2\{g_2(x,t),\tau\}|,\tau)}\frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial x}\right] d\tau.$$

The derivatives along the characteristics (1.3) of the twicely continuously differentiable function $F \in C^2(G_\infty)$ are the continuously differentiable functions:

$$(g_1)_t F_x - (g_1)_x F_t =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^t \frac{f(|h_2\{g_2(x,t),\tau\}|,\tau)}{a(|h_2\{g_2(x,t),\tau\}|,\tau)}\left[(g_1)_x\frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial t} - (g_1)_t\frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial x}\right] d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}J(x,t)\int\limits_0^t \frac{f(|h_2\{g_2(x,t),\tau\}|\,,\tau)}{a(|h_2\{g_2(x,t),\tau\}|\,,\tau)}\frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial g_2}\ \ d\tau \in C^1(G_\infty), \tag{2.4}$$

$$(g_2)_t F_x - (g_2)_x F_t =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^t \frac{f(|h_1\{g_1(x,t),\tau\}|\,,\tau)}{a(|h_1\{g_1(x,t),\tau\}|\,,\tau)}\left[(g_2)_t\frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial x} - (g_2)_x\frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial t}\right] d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}J(x,t)\ \int\limits_0^t \frac{f(|h_1\{g_1(x,t),\ \tau\}|\,,\ \tau)}{a(|h_1\{g_1(x,t),\ \tau\}|\,,\ \tau)}\ \frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\ \tau\}}{\partial g_1}\ \ d\tau \in C^1(G_\infty), \tag{2.5}$$

since for partial derivatives of functions $h_i = h_i\{g_i(x,t),\ \tau\}$ the folowing relations

$$(g_i)_x\frac{\partial h_i\{g_i(x,t),\ \tau\}}{\partial t} - (g_i)_t\frac{\partial h_i\{g_i(x,t),\ \tau\}}{\partial x} \ =$$

$$= (g_i)_x\frac{\partial h_i\{g_i(x,t),\ \tau\}}{\partial g_i}(g_i)_t - (g_i)_t\frac{\partial h_i\{g_i(x,t),\ \tau\}}{\partial g_i}(g_i)_x \equiv 0, \quad i = 1,\ 2,$$

$$(g_1)_x\frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\ \tau\}}{\partial t} - (g_1)_t\frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\ \tau\}}{\partial x} \ =$$

$$= [(g_1)_x(g_2)_t - (g_1)_t(g_2)_x\,]\frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\ \tau\}}{\partial g_2} = J(x,t)\frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\ \tau\}}{\partial g_2},$$

$$(g_2)_t\frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\ \tau\}}{\partial x} - (g_2)_x\frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\ \tau\}}{\partial t} \ =$$

$$= [(g_1)_x(g_2)_t - (g_1)_t(g_2)_x\,]\frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\ \tau\}}{\partial g_1} = J(x,t)\frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\ \tau\}}{\partial g_1}$$

are true. This implies the validity of the inclusions (2.2), since the Jacobian $J(x,t) \neq 0$ in G_∞ and $J \in C^1(G_\infty)$. The necessity of the continuity $f \in C(G_\infty)$ and the smoothness requirements (2.2) is proved.

Sufficiency of continuity $f \in C(G_\infty)$ and integral smoothness requirements (2.2) for twicely continuous differentiability of $F \in C^2(G_\infty)$ follows from the continuous differentiability in G_∞ of the first partial derivatives F_t and F_x of the function F. Since they are solutions of the linear equation system (2.4), (2.5) with continuously differentiable right-hand sides of this system due to the smoothness of (2.2) and the Jacobian $J \in C^1(G_\infty)$.

It remains to verify that function (2.1) satisfies equation (1.1) pointwise on G_∞. By virtue of the established twicely continuous differentiability of the function $F \in C^2(G_\infty)$, the latter is equivalent to the fact that after the change (2.3) the function F satisfies the corresponding canonical form of the equation (1.1) (see equation (2.13) below).

Equation (1.1) is reduced by non-degenerate change (2.3) to the form

$$[(\xi_t)^2 - a^2(\xi_x)^2]\tilde{u}_{\xi\xi} + 2aJ(x,t)\tilde{u}_{\xi\eta} + [(\eta_t)^2 - a^2(\eta_x)^2]\tilde{u}_{\eta\eta} +$$
$$+[\xi_{tt} - a^2\xi_{xx} - a^{-1}a_t\xi_t - aa_x\xi_x]\tilde{u}_\xi + [\eta_{tt} - a^2\eta_{xx} - a^{-1}a_t\eta_t - aa_x\eta_x]\tilde{u}_\eta =$$
$$= \tilde{\breve{f}}(\xi,\eta) = f(x(\xi,\eta), t(\xi,\eta)) \tag{2.6}$$

with respect to the function $\tilde{u}(\xi,\eta) = u(x(\xi,\eta),\ t(\xi,\eta)) \in C^2(\tilde{G}_\infty)$. Here the set $\tilde{G}_\infty$ is the image of the first quarter of the plane G_∞ under changing (2.3).

The total differentials of the functions g_i, $i = 1,\ 2$, of characteristics (1.3) are obviously identically equal to zero and, according to the characteristic equations (1.2), we have the representations

$$dg_i = (g_i)_x dx + (g_i)_t dt = [(g_i)_t + (-1)^i a(x,t)(g_i)_x]dt \equiv 0,\ (x,t) \in G_\infty,\ i = 1,\ 2,$$

and, therefore, in view of (2.3) we have the relations

$$(g_i)_t \equiv (-1)^{i+1} a(x,t)(g_i)_x,\ (x,t) \in G_\infty,\ i = 1,\ 2, \tag{2.7}$$

$$\xi_t - a(x,t)\xi_x = 0,\ \eta_t + a(x,t)\eta_x = 0,\ (x,t) \in G_\infty. \tag{2.8}$$

We differentiate once the equations (2.8) with respect to t

$$\xi_{tt} - a_t(x,t)\xi_x - a(x,t)\xi_{xt} = 0, \quad \eta_{tt} + a_t(x,t)\eta_x + a(x,t)\eta_{xt} = 0 \tag{2.9}$$

and then differentiate the from (2.8) once with respect to x

$$\xi_{tx} - a_x(x,t)\xi_x - a(x,t)\xi_{xx} = 0,\ \eta_{tx} + a_x(x,t)\eta_x + a(x,t)\eta_{xx} = 0. \tag{2.10}$$

We sum and subtract the equations (2.9), respectively, with the equations (2.10) multiplied by the coefficient $a(x,t)$, and arrive at the equations

$$\xi_{tt} - a_t(x,t)\xi_x - a(x,t)a_x(x,t)\xi_x - a^2(x,t)\xi_{xx} = 0,$$
$$\eta_{tt} - a_t(x,t)\eta_x - a(x,t)a_x(x,t)\eta_x - a^2(x,t)\eta_{xx} = 0. \tag{2.11}$$

By virtue of equalities (2.8) we derive from equations (2.11), respectively, for $(x,t) \in G_\infty$

$$\xi_{tt} - a^2(x,t)\xi_{xx} = a_t(x,t)\xi_x + a(x,t)a_x(x,t)\xi_x = a^{-1}(x,t)a_t(x,t)\xi_t + a(x,t)a_x(x,t)\xi_x,$$
$$\eta_{tt} - a^2(x,t)\eta_{xx} = a_t(x,t)\eta_x + a(x,t)a_x(x,t)\eta_x = a^{-1}(x,t)a_t(x,t)\eta_t + a(x,t)a_x(x,t)\eta_x. \tag{2.12}$$

Based on the identities (2.12), the equation (2.6) becomes the equation

$$\tilde{u}_{\xi\eta}(\xi,\eta) = \tilde{f}(\xi,\eta)/[2\tilde{a}(\xi,\eta)J(x,t)], \quad (\xi,\mu) \in \tilde{G}_\infty, \tag{2.13}$$

where the coefficient $\tilde{a}(\xi,\eta) = \breve{a}(x(\xi,\eta), t(\xi,\eta))$ and the replacement Jacobian $J(x,t) = \xi_x\eta_t - \xi_t\eta_x \neq$ $= 0$ on the set $\tilde{G}_\infty = \{(\xi,\eta) : h_2\{\eta,0\} \le h_1\{\xi,0\},\ \eta \ge 0; h^{(2)}[\eta,0] < h^{(1)}[\xi,0],\ \eta < 0;\ \xi \ge 0\}$.

For any point $M(x,t) \in G_\infty$, the double iterated integral (2.1) is equal to the double integral over the curvilinear characteristic triangle ΔMPQ with vertex $M(x,t) \in G_\infty$ and the vertices of its base $P\,(h_2\{g_2(x,t),0\},0)$, $Q\,(h_1\{g_1(x,t),0\},0)$ (Fig. 1, a; Fig. 2, a):

$$F(x,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Delta\, MPQ} \frac{f(|x|,t)}{a(|x|,t)}dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Delta\, MPQ} \frac{\tilde{\breve{f}}(x,t)}{\breve{a}(x,t)}dxdt, \tag{2.14}$$

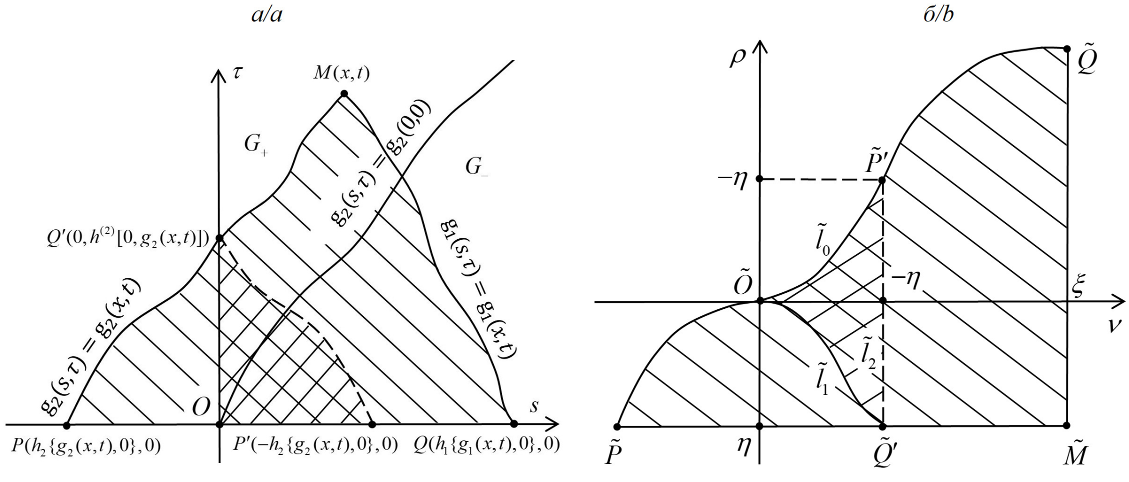

Fig. 1: The region of integration on the set G_+: a — for the function F; b — for the function $\tilde{F}$

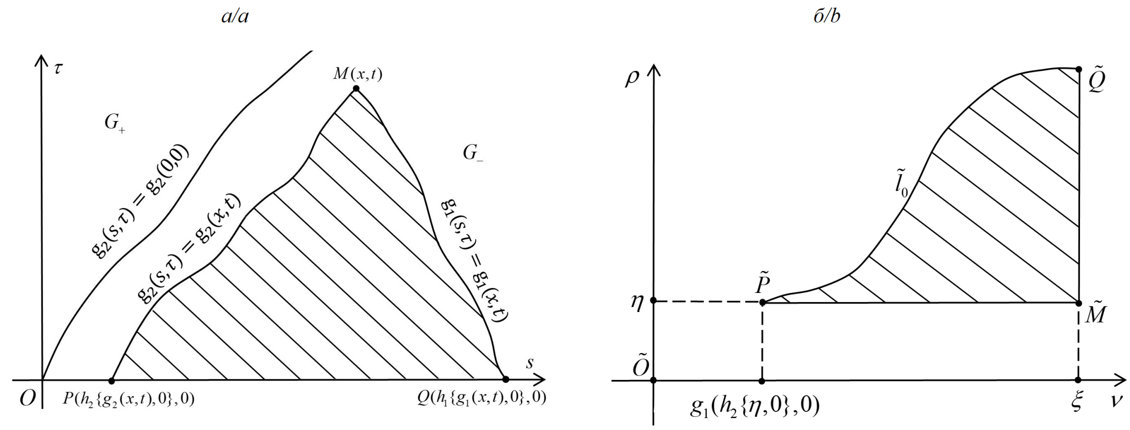

Fig. 2: The region of integration on the set G_-a — for the function F; b — for the function $\tilde{F}$

By passing to new variables of type (2.3) in function (2.14):

$$\nu = g_1(s,\tau), \;\; \rho = g_2(s,\tau), \tag{2.15}$$

in the plane $\tilde{O}\nu\rho$, we find the image $\Delta\ \tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}$ of triangle $\Delta\ MPQ$. Two characteristics $g_2(s,\tau) = g_2(x,t)$ and $g_1(s,\tau) = g_1(x,t)$, which intersect axis Os at $\tau = 0$, respectively, at the base points $P\left(h_2\{g_2(x,t),0\},0\right)$ and $Q\left(h_1\{g_1(x,t),0\},0\right)$.

The mapping (2.3) maps a point $M(x,t)$ of the plane $Os\tau$ to a point $\tilde{M}(\xi,\eta)$ of the plane $\tilde{O}\nu\rho$. After replacement (2.15) of the characteristic equations $g_i(s,\tau) = g_i(x,t)$, $i = 1,\ 2$, of the sides MP and MQ of the triangle ΔMPQ become respectively the equations $\nu = g_1(s,\tau) = g_1(x,t) = \xi$, $\rho = g_2(s,\tau) = g_2(x,t) = \eta$ of the sides $\tilde{M}\tilde{P}$ and $\tilde{M}\tilde{Q}$ for the triangle $\Delta\tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}$ in the plane $\tilde{O}\nu\rho$. Replace (2.15) with the coordinates of the base vertices $P(h_2\{g_2(x,t),0\},0)$, $Q(h_1\{g_1(x,t),0\},0)$ and by virtue of the first inversion identities from (1.4) we find the coordinates

$$\nu = g_1\left(h_2\{\eta,0\},0\right),\ \rho = g_2\left(h_2\{\eta,0\},0\right) = \eta;\ \nu = g_1\left(h_1\{\xi,0\},0\right) = \xi,\ \rho = \ g_2\left(h_1\{\xi,0\},0\right)$$

of the vertex $\tilde{P}\left(g_1\left(h_2\{\eta,0\},0\right),\eta\right)$, $\tilde{Q}\left(\xi, g_2\left(h_1\{\xi,0\},0\right)\right)$ of the triangle $\Delta\tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}$ in the plane $\tilde{O}\nu\rho$, since $g_1(x,t) = \xi$, $g_2(x,t) = \eta$ in (2.3) (Fig. 1, b; Fig. 2, b).

Putting $\tau = 0$ in change (2.15), we arrive at the equations $\nu = g_1(s,0)$, $\rho = g_2(s,0)$, of which, due to the uniqueness of the solutions $s = h_1\{\nu,0\}$, $s = h_2\{\rho,0\}$ of the equation system (2.15) with respect to (s,τ) and the second inversion identities from (1.4), we derive the equation $\nu = g_1(h_2\{\rho,0\},0)$ of the curvilinear base $\tilde{P}\tilde{Q}$ of the triangle $\Delta\tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}$ in $\tilde{O}\nu\rho$ (Fig. 1, b; Fig. 2, b).

Due to the mutually inverse orientation of the lateral sides of the triangles ΔMPQ and $\Delta \tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}$, the double integral (2.14) becomes an iterated integral as a result of the substitution (2.3)

$$\tilde{F}(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\int\limits_{\Delta\,\tilde{M}\tilde{P}\tilde{Q}}\frac{\tilde{\breve{f}}(\xi,\eta)}{\tilde{\breve{a}}(\xi,\eta)}J(\xi,\eta)d\xi d\eta=\frac{1}{2}\int\limits_{g_2(h_1\{\xi,0\},0)}^{\eta}\int\limits_{g_1(h_2\{\rho,0\},0)}^{\xi}\frac{\tilde{\breve{f}}(\nu,\rho)}{\tilde{\breve{a}}(\nu,\rho)}J(\nu,\rho)d\nu d\rho, \tag{2.16}$$

where the points $\tilde{O}(0,0)$, $\tilde{M}(\xi,\eta)$, $\tilde{P}\left(g_1\left(h_2\{\eta,0\},0\right),\eta\right)$, $\tilde{Q}\left(\xi,g_2\left(h_1\{\xi,0\},0\right)\right)$ on the plane $\tilde{O}\nu\rho$ are respectively the images of the points $O(0,0)$, $M(x,t)$, $P\left(h_2\{g_2(x,t),0\},0\right)$, $Q\left(h_1\{g_1(x,t),0\},0\right)$ from the plane $Os\tau$ after variable transformation (2.15). For the existence of the integral (2.16), it is important that if the function $f\in C(G_\infty)$ is continuous, then, due to the continuity of the Jacobian $J(\nu,\rho)\neq 0$ of the transformation (2.15), the function $\tilde{\breve{f}}\in C(\tilde{G}_\infty)$ in (2.16) is also continuous.

We take partial derivatives with respect to η and ξ of $\tilde{F}$ from (2.16) and have a mixed derivative

$$\frac{\partial^2\tilde{F}(\xi,\eta)}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{1}{2}\frac{\tilde{\breve{f}}(\xi,\eta)}{\tilde{\breve{a}}(\xi,\eta)}J(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\frac{\tilde{f}(\xi,\eta)}{\tilde{a}(\xi,\eta)J(x,t)},\ (\xi,\eta)\in\tilde{G}_\infty, \tag{2.17}$$

since the inverse Jacobian $[J(\xi,\eta)]^{-1}=x_\xi t_\eta-x_\eta t_\xi=1/J(x,t)\neq 0$ on $\tilde{G}_\infty$. Thus, the function F after the change (2.3) satisfies equation (2.13) on $\tilde{G}_\infty$. Theorem 2.1 is proved.

C o r o l l a r y 2.1. [4] *Let the coefficient is strictly positive* $a(x,t)\geq a_0>0$, $(x,t)\in G_\infty)$, $a\in C^2(G_\infty)$. *If the right-hand side f of the equation (1.1) does not depend on x or on t in G_∞, then the continuity of f in t or in x, respectively, is necessary and is sufficient for the function F from (2.1) to be a classical solution of the inhomogeneous equation (1.1) in G_∞.*

P r o o f. The necessity of the continuity of $f\in C[0,+\infty[$ in t or in x is strictly justified in the proof of Theorem 2.1. In fact, it remains to show the sufficiency of this continuity of $f\in C[0,+\infty[$ in t or in x by the fact that in this case the corresponding integral smoothness requirements (2.2) are automatically satisfied.

If the right-hand side $f=f(t)$ does not depend on x, then function F from (2.1) takes the form

$$F(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}}\frac{f(\tau)}{a(|s|,\tau)}\,ds\,d\tau. \tag{2.18}$$

According to the proof of Theorem 2.1, the inclusion $F\in C^2(G_\infty)$ is sufficient for the function (2.18) to be a solution of the equation (1.1) in G_∞. Using the second inversion identities from (1.4), in G_∞ for all $f(t)\in C[0,+\infty[$ its first partial derivatives are obviously continuously differentiable

$$F_t=\frac{1}{2}\int\limits_0^t\left[\frac{f(\tau)}{a(|h_1\{g_1(x,t),\tau\}|,\tau)}\frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial t}-\frac{f(\tau)}{a(|h_2\{g_2(x,t),\tau\}|,\tau)}\frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial t}\right]d\tau,$$

$$F_x=\frac{1}{2}\int\limits_0^t\left[\frac{f(\tau)}{a(|h_1\{g_1(x,t),\tau\}|,\tau)}\frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial x}-\frac{f(\tau)}{a(|h_2\{g_2(x,t),\tau\}|,\tau)}\frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial x}\right]d\tau.$$

If the right side $f=f(x)$ does not depend on t, then the function F from (2.1) takes the form

$$F(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_{h_2\{g_2(x,t),\tau\}}^{h_1\{g_1(x,t),\tau\}}\frac{\breve{f}(s)}{\breve{a}(s,\tau)}dsd\tau, \tag{2.19}$$

where the functions $\tilde{f}$ and $\tilde{a}$ are even extensions of the functions f and a from $x\geq 0$ to all $x<0$. Same as at the beginning of the proof of the corollary 2.1, from Theorem 2.1 we have that if a function

$F\in C^2(G_\infty)$, then it satisfies equation (1.1) in G_∞. Let us check its twice continuous differentiability for $f(x)\in C[0,+\infty[$. The first partial derivative with respect to t of (2.19) is equal to the function

$$F_t=\frac{1}{2}\int\limits_0^t\left[\frac{\breve{f}(h_1\{g_1(x,t),\tau\})}{\breve{a}(h_1\{g_1(x,t),\tau\},\tau)}\frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial t}-\frac{\breve{f}(h_2\{g_2(x,t),\tau\})}{\breve{a}(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)}\frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial t}\right]d\tau,$$

to which we also applied the second inversion identities from (1.4). When we move here to the new integration variables $y=h_1\{g_1(x,t),\tau\}$, $z=h_2\{g_2(x,t),\tau\}$, then on G_∞ we obtain the obvious continuously differentiable representation of this derivative

$$F_t(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_{h_1\{g_1(x,t),\ 0\}}^{x}\left[\frac{\breve{f}(y)}{\breve{a}(y,\tau)}\frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial t}\left(\frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial\tau}\right)^{-1}\right]\Bigg|_{\tau=h^{(1)}[y,g_1(x,t)]}dy-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{h_2\{g_2(x,t),\ 0\}}^{x}\left[\frac{\breve{f}(y)}{\breve{a}(y,\tau)}\frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial t}\left(\frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial\tau}\right)^{-1}\right]\Bigg|_{\tau=h^{(2)}[z,g_2(x,t)]}dz\in C^1(G_\infty),$$

where we have used the second inversion identities from (1.4) and the identities $\tau=h^{(1)}[y,g_1(x,t)]$, $\tau=h^{(2)}[z,g_2(x,t)]$ due to the second inversion identities from (1.6).

For all $f(x)\in C[0,+\infty[$ the first partial derivative with respect to x of (2.19) is the function

$$F_x=\frac{1}{2}\int\limits_0^t\left[\frac{\breve{f}(h_1\{g_1(x,t),\tau\})}{\breve{a}(h_1\{g_1(x,t),\tau\},\tau)}\frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial x}-\frac{\breve{f}(h_2\{g_2(x,t),\tau\})}{\breve{a}(h_2\{g_2(x,t),\tau\},\tau)}\frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial x}\right]d\tau,$$

in which we used the second inversion identities from (1.4). After passing here to the new integration variables $y=h_1\{g_1(x,t),\tau\}$, $z=h_2\{g_2(x,t),\tau\}$ this partial derivative acquires the obvious for $f(x)\in$ $\in C[0,+\infty[$ continuously differentiable representation

$$F_x=\frac{1}{2}\int\limits_{h_1\{g_1(x,t),\ 0\}}^{x}\left[\frac{\breve{f}(y)}{\breve{a}(y,\tau)}\frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial x}\left(\frac{\partial h_1\{g_1(x,t),\tau\}}{\partial\tau}\right)^{-1}\right]\Bigg|_{\tau=h^{(1)}[y,g_1(x,t)]}dy-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{h_2\{g_2(x,t),\ 0\}}^{x}\left[\frac{\breve{f}(y)}{\breve{a}(y,\tau)}\frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial x}\left(\frac{\partial h_2\{g_2(x,t),\tau\}}{\partial\tau}\right)^{-1}\right]\Bigg|_{\tau=h^{(2)}[z,g_2(x,t)]}dz\in C^1(G_\infty),$$

where we have applied the same identities as for the partial derivative of F with respect to t.

Thus, the sufficiency of $f\in C[0,+\infty[$ for $F\in C^2(G_\infty)$ is verified. Corollary 2.1 is proved.

Corollary 2.2.[4] *Let the coefficient be strictly positive, $a(x,t)\geq a_0>0$, $(x,t)\in G_\infty$, $a\in$ $\in C^2(G_\infty)$. If the function f depends on x and on t, then for $f\in C(G_\infty)$ the requirements that the integrals from (2.2) belong to the space $C^1(G_\infty)$ are equivalent to the requirements that they belong to the space $C^{(1,0)}(G_\infty)$ or $C^{(0,1)}(G_\infty)$. Here $C^{(1,0)}(G_\infty)$, $C^{(0,1)}(G_\infty)$ are, respectively, the spaces of continuously differentiable with respect to x and t and continuous with respect to t and x functions on G_∞.*

Proof. The continuously differentiable right-hand sides $f\in C^1(G_\infty)$ obviously satisfy the integral requirements from (2.2). By replacing $s_i=h_i\{g_i(x,t),\tau\}$ by the integration variable τ, for example, the integrals from (2.2) are reduced to the integrals

$$H_i(x,t)=\int\limits_0^t\frac{f(|h_i\{g_i(x,t),\tau\}|,\tau)}{a(|h_i\{g_i(x,t),\tau\}|,\tau)}\frac{\partial h_i\{g_i(x,t),\tau\}}{\partial g_i}\,d\tau=$$

$$= \int\limits_{h_i\{g_i(x,t),0\}}^{x} \left[\frac{f(|s_i|,\tau)}{a(|s_i|,\tau)} \frac{\partial h_i\{g_i(x,t),\tau\}}{\partial g_i} \left(\frac{\partial h_i\{g_i(x,t),\tau\}}{\partial \tau} \right)^{-1} \right] \Bigg|_{\tau=h^{(i)}[s_i,g_i(x,t)]} ds_i, \ i=1,\ 2, \quad (2.20)$$

which for $f \in C^1(G_\infty)$ are indeed continuously differentiable with respect to x and t in G_∞, because in the last integrals (2.20) under the modulus $|s_i|$ the variables x and t are missing. Otherwise, the module would give a discontinuity of derivatives. Here we have applied the second inversion identities from (1.4) and the equalities $\tau = h^{(i)}[s_i, g_i(x,t)]$, $i = 1,\ 2$, due to the second identities from (1.6).

First, for smoother $f \in C^1(G_\infty)$, we take the derivative of the integrals (2.2)

$$\frac{\partial H_i}{\partial t} = \frac{f(|h_i\{g_i(x,t),t\}|\,,t)}{a(|h_i\{g_i(x,t),t\}|\,,t)} \frac{\partial h_i\{g_i(x,t),t\}}{\partial g_i} + \int\limits_0^t \left[\frac{f(|h_i\{g_i(x,t),\tau\}|,\tau)}{a(|h_i\{g_i(x,t),\tau\}|,\tau)} \frac{\partial h_i\{g_i(x,t),\tau\}}{\partial g_i} \right]_t' d\tau =$$

$$= \frac{f(x,t)}{a(x,t)} \frac{1}{(g_i)_x} + (-1)^{i+1} a(x,t) \int\limits_0^t \left[\frac{f(|h_i\{g_i(x,t),\tau\}|,\tau)}{a(|h_i\{g_i(x,t),\tau\}|,\tau)} \frac{\partial h_i\{g_i(x,t),\tau\}}{\partial g_i} \right]_x' d\tau =$$

$$= \frac{f(x,t)}{a(x,\ t)} \frac{1}{(g_i(x,t))_x} + (-1)^{i+1} a(x,t) \frac{\partial H_i}{\partial x},\ i=1,\ 2, \quad (2.21)$$

due to the second inversion identities from (1.4), to the well known formula for the derivative of the inverse function, to the relations (2.7) and to the equalities

$$\frac{\partial f(|h_i\{g_i(x,t),\tau\}|,\tau)}{\partial t} = \frac{\partial f(|h_i\{g_i(x,t),\tau\}|,\tau)}{\partial h_i} \frac{\partial h_i\{g_i(x,t),\tau\}}{\partial g_i} (g_i)_t =$$

$$= (-1)^{i+1} a(x,t) \frac{\partial f(|h_i\{g_i(x,t),\tau\}|,\tau)}{\partial h_i} \frac{\partial h_i\{g_i(x,t),\tau\}}{\partial g_i} (g_i)_x = (-1)^{i+1} a(x,t) \frac{\partial f(|h_i\{g_i(x,t),\tau\}|,\tau)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 h_i\{g_i(x,t),\tau\}}{\partial t \partial g_i} = \frac{\partial^2 h_i\{g_i(x,t),\ \tau\}}{\partial g_i^2} (g_i(x,t))_t =$$

$$= (-1)^{i+1} a(x,t) \frac{\partial^2 h_i\{g_i(x,t),\tau\}}{\partial g_i^2} (g_i(x,t))_x = (-1)^{i+1} a(x,t) \frac{\partial^2 h_i\{g_i(x,t),\tau\}}{\partial x \partial g_i},\ i=1,\ 2.$$

Then two equalities (2.21) of the first and last parts, which do not contain explicit derivatives of function f with respect to x and t in G_∞, are extended by passing to the limit in f smoother $f \in C^1(G_\infty)$ into continuous functions $f \in C(G_\infty)$, satisfying (2.2) in G_∞ [6]. Two equalities (2.21) obtained after passing to limit confirm the assertion of Corollary 2.2 on G_∞. Corollary 2.2 is proved.

3. General integral of the model telegraph equation

When solving mixed (initial-boundary) problems for the model telegraph equation (1.1) on half-strip plane by "method of auxiliary mixed problems for wave equations on the half-line" from [7], it is important to know its general integral (the set of all twicely continuously differentiable solutions).

T h e o r e m 3.1. [4] *Let $a(x,t) \geq a_0 > 0$, $(x,t) \in G_\infty)$, $a \in C^2(G_\infty)$ and (2.2) for $f \in C(G_\infty)$. Then the general integral of equation (1.1) in G_∞ in the set of classical solutions are the functions*

$$u(x,t) = \tilde{f}_1(g_1(x,t)) + \tilde{f}_2(g_2(x,t)) + F(x,t),\ (x,t) \in G_\infty, \quad (3.1)$$

where $\tilde{f}_1$ and $\tilde{f}_2$ are any twicely continuously differentiable functions of the variables ξ, η having the form

$$\tilde{f}_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(g_2(0,0)),\ \tilde{f}_2(\eta) = f_2(\eta) - f_2(g_2(0,0)). \quad (3.2)$$

P r o o f. For the continuous right-hand side $f \in C(G_\infty)$, the integral smoothness requirements (2.2) from Theorem 2.1 are obviously equivalent to the integral smoothness requirements (2.2) with the requirement that the first partial derivatives of the functions $H_i(x,t)$, $i=1,2$, be continuous on the sets G_+, G_- and in some neighborhood of characteristic $g_2(x,t)=g_2(0,0)$ (Fig. 1, a; Fig. 2, a). By Theorem 2.1, for the right-hand side $f \in C(G_\infty)$ and $H_i(x,t) \in C^1(G_\infty)$, $i=1,2$, the function F of the form (2.1) is twicely continuously differentiable and satisfies the equation (1.1) pointwise on $\dot{G}_\infty$ and the equation (2.13) on $\tilde{G}_\infty$ due to the identity (2.17) established above.

Therefore, formulas (3.1), (3.2) are indeed the set of all classical solutions to the model telegraph equation (1.1) on G_∞. The classical solutions (3.2) to the homogeneous equation (1.1) are obtained by "the method of immersion in solutions with fixed values", proposed in [8] in order to simplify the calculation of explicit solutions to systems of differential equations. It is clear that, in equalities (3.2) the functions f_1, f_2 and $\tilde{f}_1$, $\tilde{f}_2$, respectively, are twicely continuously differentiable at the same time. The general integral (3.1) of all classical solutions to the inhomogeneous equation (1.1) is the sum of an general integral $u_0(x,t)=\tilde{f}_1(g_1(x,t))+\tilde{f}_2(g_2(x,t))$ to an homogeneous equation (1.1) and the particular classical solution F of the form (2.2) to the inhomogeneous equation (1.1). Theorem 3.1 is proved.

The smooth non-degenerate coefficient a simplifies requirements (2.2) on $f \in C(G_\infty)$.

Remark 3.1. For the coefficient $a(x,t) \geq a_0 > 0$, $(x,t) \in G_\infty)$, $a \in C^2(G_\infty)$ the integral smoothness requirements (2.2) on the continuous $f \in C(G_\infty)$ are equivalent to the requirements

$$\int_0^t f(|h_i\{g_i(x,t),\tau\}|,\tau)\, d\tau \in C^1(G_\infty),\ i=1,\ 2.$$

4. Conclusion

The criterion for twice continuous differentiability of the solution F of the form (2.1) to the inhomogeneous model telegraph equation (1.1) with a variable rate $a(x,t)$ in the first quarter of the plane G_∞ is found. It consists of the continuity requirement right-hand side $f \in C(G_\infty)$ and two integral smoothness requirements (2.2) on the set G_∞. The general integral (the general solution) (3.1), (3.2) from twicely continuously differentiable functions determines the explicit resolution of various mixed (initial-boundary) problems for the inhomogeneous model telegraph equation (1.1) on the set G_∞.

The work is supported by the Belarusian Republican Foundation for Basic Research (grant № F22KI-001 dated November 05, 2021).

References

1. *Lomovtsev F.E.* The first mixed problem for the general telegraph equation with variable coefficients on the half-line. *J. of BSU. Mathematics. Informatics.* №1 (2021), 18–38.

2. *Baranovskaya S.N.* On the classical solution of the first mixed problem for a one-dimensional hyperbolic equation. *Ph.D. thesis.* Minsk, BSU, 1991.

3. *Lomovtsev F.E., Tochko T.S.* Mixed problem for nonhomogeneous equation of vibrations of a bounded string with characteristic nonstationary first oblique derivatives at the ends. *Bull. of Grodno State University named after Yanka Kupala. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, computer technology and management.* №2 (2019), 56–75.

4. *Lomovtsev F.E.* Conclusion of the smoothness criterion for the right-hand side of the model telegraph equation with the rate $a(x,t)$ by the correction method. *Modern Methods of the Theory of Boundary Value Problems: Proceedings of the International Conference VVMSH-2021 "Pontryagin Readings-XXXII". Voronezh: Voronezh Universit.* (2021), 284–287.

5. *Tikhonov A.N., Samarsky A.A. Equations of mathematical physics.* M. Nauka, 2004. (in Russian).

6. *Novikov E.N.* Mixed problems for the equation of forced vibrations of a bounded string under non-stationary boundary conditions with first and second oblique derivatives. *Ph.D. thesis.* Minsk, BSU, 2017.

7. *Lomovtsev F.E.* Method of auxiliary mixed problems for a semi-bounded string.. *Proceedings Int. scientific conf. Sixth Bogdanov Readings on Ordinary Differential Equations. Minsk. BSU.* (2015), 74–75.

8. *Lomovtsev F.E., Lysenko V.V.* A non-characteristic mixed problem for a one-dimensional wave equation in the first quarter of the plane with non-stationary boundary second derivatives. *Bull. of Vitebsk State University.* №3 (104) (2019), 5–17.

УДК 336.67+519.865

МОДЕЛИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ БАНКРОТСТВА: ОБЗОР И СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

Т. И. Маслюкова

e-mail: masljukova@bsu.by

В статье проведен анализ основных моделей прогнозирования банкротства. Приводятся результаты сравнительного анализа применения разных моделей прогнозирования банкротства, на примере ОАО «МАЗ».

Ключевые слова: *банкротство; ликвидность; прогнозирование банкротства предприятий.*

MODELS FOR PREDICTING BANKRUPTCY: OVERVIEW AND STATE OF THE ART

T. I. Masljukova

e-mail: masljukova@bsu.by

The article analyzes the main models for predicting bankruptcy. The results of a comparative analysis of the application of different models for predicting bankruptcy are given, using the example of MAZ OJSC.

Keywords: *bankruptcy; insolvency; prediction of corporate bankruptcy.*

Mathematics Subject Classification (2020): Primary 91B24, Secondary 91B64.

После второй мировой войны происходили резкие изменения в экономике разных стран, в первую очередь в США. Это было вызвано разными причинами. Страны находились в разном положении. Одни страны процветали, другие были разорены. Развитие и рост организаций происходил неравномерно. В первые десять лет после окончания второй мировой войны наблюдался рост числа банкротств. По большей части, этому способствовало резкое сокращение военных заказов. В это время и возникает проблема предсказания банкротства. Начинается работа выявления априорного определения факторов, которые ведут организацию к банкротству.

Первые попытки решить этот вопрос предпринимались на практическом качественном уровне, что порождало много ошибок. Первые значимые результаты появились в 60-е годы вместе с началом развития компьютерной техники. Первая модель Альтмана появилась в 1968 году и была разработана для компаний, чьи акции котировались на бирже. В дальнейшем Альтман разработал несколько моделей для определения банкротства производственных организаций. Фактически до сегодняшнего дня все известные модели определения банкротства являются модификациями моделей Альтмана.

Для того, чтобы более полно исследовать применение различных моделей банкроства проведем анализ конкретного предприятия. Рассмотрим результаты применения различных моделей к исследованию банкротства на примере промышленного предприятия ОАО «МАЗ» (Республика Беларусь). Исследование проводилось на основании финансовой отчетности, опубликованной на сайте предприятия [1]. Сегодня ОАО «МАЗ» является флагманом отчественного машиностроения. На ближайшие годы определены перспективы развития, а именно, планируется провести масштабную модернизацию и техническое перевооружение производственных мощностей, построить новый современный корпус по производству пассажирской техники, а также внедрить интеллектуальные цифровые системы управления.

Таблица 1. Сводная оценка вероятности банкротства ОАО «МАЗ» за период 2018-2020 гг. Источник: собственная разработка на основании данных финансовой отчетности [1].

Модель	**Оценка вероятности банкротства предприятия**		
	2018	2019	2020
Двухфакторная модель Альтмана Z-score	меньше 50% -189.2%	меньше 50% -180.0%	меньше 50% -168.4%
Пятифакторная модель Альтмана для компаний, чьи акции котируются на бирже	не хватает данных	не хватает данных	не хватает данных
Модифицированная пятифакторная модель Альтмана Z-score	высокая 0.88	высокая 1.06	высокая 0.95
Модель Альтмана для непроизводственных компаний Z-score	маловероятна 1.12	маловероятна 1.44	маловероятна 1.18
Модель Таффлера-Тишоу Z-score	низкая 0.32	низкая 0.34	низкая 0.35
Модель Фулмера Z-score	не хватает данных	высокая -2.68	высокая -2.42
Модель Спрингейта Z-score	высокая 0.39	высокая 0.59	высокая 0.54
Четырехфакторная модель ИГЭА R-модель	до 10% 1.28	до 10% 1.24	до 10% 1.06
Модель Лиса Z-score	положение предприятия неустойчиво 0.01	положение предприятия неустойчиво 0.01	положение предприятия неустойчиво 0.01
Модель О.П. Зайцевой		высокая	высокая
Модель Ж. Конана и М. Голдера оценки платежеспособности Z-score	низкая 18.72	высокая -17.87	высокая -2.98
Модель Р.С. Сайфуллина, Г.Г. Кадыкова оценки финансового состояния R (интегральный показатель)	неудовлетворительное -0.19	неудовлетворительное 0.15	неудовлетворительное 0.14
Модель Бивера (коэффициент Бивера, нормативное значение не менее 0.17)	Благоприятно 0.4–0.45	5 лет до банкротства 0.17	1 год до банкротства -0.15

Исследование показало следующие результаты. Низкую вероятность банкротства показали следующие модели: модели Альтмана (двухфакторная, для непроизводственных компаний), модель Таффлера-Тишоу, четырехфакторная модель ИГЭА. Высокую вероятность банкротства показали следующие модели: модифицированная пятифакторная модель Альтмана, модель Спрингейта, модель Лиса, модель Зайцевой, модель Сайфуллина-Кадыкова и модель Фулмера (2019-2020 годы), Конана-Голдера. Модель Бивера показывает, что состояние предприятия ухудшается. Неопределенный результат при использовании пятифакторной модели Альтмана (акции которой котируются на бирже). Противоречивые результаты получены также в работах [2].

В настоящее время используются два основных подхода к определению банкротства. Первый основывается на данных финансовой и управленческой отчетности и базируется на управлении финансовыми коэффициентами: Z-коэффициентом Альтмана, Таффлера, Фулмера, Бивера и другими. Российская экономическая школа также пыталась разработать свою модификацию, которая учитывает особенности российской экономики. Самые известные модели: модель Зайцевой, модель Сайфулина и Кадыкова и четырехфакторная R-модель иркутских ученых. Для этого варианта анализа характерно умение «читать» баланс.

Первый подход, уже показавший значительную эффективность в процедуре определения банкротства, имеет ряд существенных недостатков. Как правило, организации, которые находятся в неустойчивом положении, стараются задержать декларирование своей отчетности. Понятно, что актуальные данные могут длительное время оставаться закрытыми. Дальше, если отчетность и публикуется, она вполне может быть приукрашена. Во избежание репутационных потерь компании стараются не открывать настоящее положение вещей, в надежде, что ситуация вот-вот образуется. Иногда доходит даже до прямой фальсификации данных.

В такой ситуации даже опытный эксперт может не выявить «корректировку данных» и оценить степень намерено скрытых данных. Еще одна очень важная проблема: значения некоторых финансовых коэффициентов, которые вычислены по данным компании, могут указывать на неплатежеспособность и неустойчивость компании, в то время как другие — давать основание для заключения о том, что положение компании стабильное. Данные противоречия затрудняют заключение о реальном положении дел.

Применение разных моделей и их модификаций, в настоящее время часто дает противоречивые результаты. Второй подход основан на сравнении соответствующих показателей компаний, которые уже обанкротились и анализируемой компании. В последние несколько десятилетий опубликовано достаточно данных по компаниям, которые обанкротились в этот период. В этих публикация содержатся десятки финансовых показателей. Основная трудность заключается в том, что эти данные чаще всего не упорядочены по степени значимости и обычно последовательность таких данных очень разная. Очевидно, что провести сравнительный анализ в такой ситуации достаточно сложно. Одной из достаточно удачных попыток компенсировать возникшие трудности является методика бальной оценки А-Аргенти. Данная методика позволяет учесть не только финансовые показатели предпосылок банкротства, но и качество менеджмента организации. Это значит, что проводится диагностика не только влияния внешних, но и внутренних факторов. Основная концепция данного подхода: компания двигается к состоянию банкротства на протяжении 5-10 лет. Как правило, если компания обанкротилась стремительно, то это показатель того, что банкротство фиктивное. Таким образом, практическое применение большинства моделей прогнозирования банкротства имеет существенные недостатки. Один из наиболее значимых – невозможность использования этих моделей в отечественной экономике, так как они не учитывают особенности белорусской экономики. Большинство моделей создано более 50 лет назад и основываются на устаревших данных. С тех пор изменились условия функционирования экономики, как на глобальном, так и на региональном уровнях. Надо подключать экономико-математические инструменты разработки новых прогнозных моделей. Но в этом направлении существует большая проблема: нет достаточного количества финансовой информации о положении предприятий. Публиковать данные финансовой отчетности обязаны только крупные предприятия. Но даже те организации, которые публикуют свою отчетность не всегда открывают полный объем информации. Прогнозирования банкротства в банковской сфере не менее актуально, чем для производственных предприятий. За последние два десятилетия мировая экономика подвергалась воздействию нескольких финансовых кризисов. Наиболее сильное воздействие кризисы оказали и оказывают на банковскую сферу. Чаще всего для того, чтобы оценить финансовую устойчивость банка применяют следующие группы показателей [3]:

– достаточность капитала;
– ликвидность;
– качество пассивов;
– качество активов;
– прибыльность.

Проводя анализ в рамках вышеуказанных групп можно выявить интегрированный результат, который определяет степень устойчивости коммерческого банка в целом. Основные недостатки этой группы методик заключаются в том, что оценка не учитывает фактор времени. Здесь отсутствуют расчёты прогнозных показателей. Интегрированные выводы по этой методике может отставать по времени к моменту возникновения проблем. Кроме анализа вышеперечисленных показателей, на сегодняшний день, существуют и другие методики оценки финансовой устойчивости банка. Наиболее популярные из них — это российская методика В. Кромонова, зарубежная методика CAMELS и методика Национального банка Республики Беларусь.

Методика Национального банка регламентирует систему и порядок расчета нормативных показателей, характеризующих финансовую устойчивость банка. Данная методика лежит в основе функционирования надзорных финансовых органов. Согласно модели Кромонова устойчивость банка оценивается по данным финансовой отчетности банка, но с точки зрения клиента банка. Для клиента важным критерием является надежность банка, а не его прибыль. Основными недостатками модели Кромонова являются: неоднозначность нормирования коэффициентов и неопределенность критериев надёжности, а также способы определения весовых коэффициентов.

Методика CAMELS громоздка в расчетах, показатели противоречат друг другу. Эта методика ориентирована, по большому счету, на американскую систему функционирования банковской системы.

Название методики CAMELS основано по начальным буквам рейтинговых индексов:

– C — (capital adequacy) достаточность капитала;
– A — (asset quality) качество активов;
– M — (management) менеджмент;
– E — (earning) доходность или рентабельность;
– L — (liquidity) ликвидность;
– S — (sensitivity to market risk) чувствительность к рыночному риску.

Преимущества данной методики в том, что рейтинговая оценка каждого показателя отражает направления по улучшению эффективности работы банка. Общая оценка отражает степень необходимости вмешательства по отношению к банку. Главный недостаток данной методики в том, что она основана на экспертных оценках. Это значит, что интегральный показатель в данной методике очень сильно зависит от профессионализма экспертной группы, проводящей оценку.

Краткая характеристика методик анализа банкротства коммерческих банков показывает, что основные сведения для анализа банкротства – это отчётность, публикуемая в открытом доступе. Отметим, что в большинстве методик есть количественные показатели. Качественные оценки присущи не всем моделям. В то время как для того, чтобы провести полноценную оценку банка, обязательно проводить не только количественный, но и качественный анализ различных аспектов его функционирования. Рассмотрев все преимущества и недостатки существующих методик, можно заключить, что почти все методики правомерно могут оценивать только текущее положение банка. В этих методиках нет возможности сделать прогноз.

Экономисты в последнее время делают попытки разработать экономико-статистические модели прогнозирования банкротства банков, используя все имеющиеся инструменты экономикостатистического анализа [4]. Данные модели строятся на допущении, что банки, которые испытывают трудности, имеют какие-то общие черты. Проблемы в построении таких моделей чаще всего вызваны невозможностью получения полного объема информации. Та финансовая отчетность, которая находится в открытом доступе, не отражает полной картины деятельности банка.

Подводя итог, можно сделать вывод, что проблема разработки универсальной модели прогнозирования банкротства, остается актуальной и сегодня. А пока для достоверного анализа финансовой устойчивости коммерческих организаций, в том числе и банков недостаточно использовать только одну методику. Применяя зарубежные модели надо учитывать возникающие в них погрешности, которые возникают из-за различия состояний экономики и экономических условий. Так же надо обращать внимание на отраслевые особенности присущие коммерческим организациям. Для достоверного и всестороннего анализа необходимо использовать различные модели: качественные и количественные, а так же использовать экономико-математические методы и инструменты статистического и факторного анализа, которые дают возможность провести расчеты прогнозных значений, и может быт даже определить перспективные направления развития.

Литература

1. *ОАО "МАЗ"* [Электронный ресурс].. *Режим доступа: http://maz.by/about/reporting.* Дата доступа: 20.03.2022.

2. *Толстых Е.Н., Маслюкова Т.И.* Сравнительный анализ моделей прогнозирования банкротства на примере ОАО «ГАЛАНТЭЯ» *Банковский бизнес и финансовая экономика: глобальные тренды и перспективы развития.* (2020), 247–255.

3. *Ковалев М.М., Господарик Е.Г. Банковская аналитика: учебное пособие.* Минск: Изд. Центр БГУ, 2020.

4. *Маслюкова Т.И.* Метод главных компонент при построении модели банкротства банков. *Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: материалы 10-го международного семинара 13-17 сентября 2021 г., Минск, Беларусь/Институт математики НАН Беларуси.–Минск: ИВЦ Минфина.* (2021), 54–55.

УДК 517.589

h-ДИФФЕОМОРФИЗМЫ ОБЛАСТЕЙ НА МНОЖЕСТВЕ h-КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

В. А. Павловский

e-mail: pavlad95@gmail.com

В представленной статье рассматриваются вопросы отображения областей на множестве h-комплексных чисел. Найдены образы стандартной и произвольной областей. Доказана теорема о глобальном h-диффеоморфизме и сформулирован усиленный принцип соответсвия границ.

Ключевые слова: *h-голоморфное отображение; естественная область h-голоморфности; образ произвольной области; делители нуля; глобальный h-диффеоморфизм; усиленный принцип соответствия границ.*

h-DIFFEOMORPHISM OF DOMAINS ON THE SET OF h-COMPLEX NUMBERS

V. A. Pavlovsky

e-mail: pavlad95@gmail.com

This article discusses the questions of mapping of domains on the set of h-complex numbers. The images of the standard and arbitrary domains are found. The global h-diffeomorphism theorem and the strengthened boundary matching principle are proved.

Keywords: *h-complex mapping; natural domain of h-holomorphism; arbitrary domain image; zero divisors; global h-diffeomorphism; strengthened boundary matching principle.*

Mathematics Subject Classification (2020): Primary 30G30, Secondary 32H02.

1. Введение

Пусть $\mathbb{C}_h$ — кольцо h-комплексных (двойных) чисел вида $a + jb$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $j^2 = 1$, $j \neq \pm 1$ [1]. В кольце $\mathbb{C}_h$ имеются делители нуля вида $t \pm tj$, $t \in \mathbb{R}$. Нормой элемента $z = a + jb$ в кольце $\mathbb{C}_h$ назовем $\|z\|_{\mathbb{C}_h} = |a| + |b|$ [2].

Рассмотрим функцию h-комплексного переменного $f : D \subset \mathbb{C}_h \to \mathbb{C}_h$. Представим эту функцию в виде:

$$f(z) = u(x, y) + jv(x, y),$$

где $u(x, y) = \mathrm{Re} f$ — действительная часть, а $v(x, y) = \mathrm{Hyp} f$ — гиперболическая часть функции $f(z)$. Функция f называется h-голоморфной [2] в точке $z \in D$, если f определена в некоторой окрестности точки $z = x + jy$, а функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируемы в точке (x, y) и выполняются условия:

$$u'_x = v'_y, \quad u'_y = v'_x.$$

Функция f h-голоморфна на множестве D, если она h-голоморфна в каждой точке этого множества.

Обозначим через $\mathcal{H}_h(D)$ множество функций h-голоморфных на множестве $D \subset \mathbb{C}_h$. В работе [2] показано, что h-голоморфную функцию можно представить в виде:

$$f(z) = \frac{1 + j}{2} f(x + y) + \frac{1 - j}{2} f(x - y). \tag{1.1}$$

При этом

$$\begin{cases} u(x,y) = \left\{\frac{1}{2}\varphi(x+y) + \psi(x-y) + \alpha\right\} \\ v(x,y) = \left\{\frac{1}{2}\varphi(x+y) - \psi(x-y) + \beta\right\} \end{cases}, \qquad (1.2)$$

где φ и ψ — дважды непрерывно дифференцируемые вещественные функции, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — постоянные. Для производной имеем представление:

$$f'(z) = f'(x+jy) = \frac{1+j}{2}\varphi'(x+y) + \frac{1-j}{2}\psi'(x-y). \qquad (1.3)$$

2. Естественная область h-голоморфности

Определение 2.1. Множество $\mathcal{D}(f)\subset\mathbb{C}_h$ называется естественным множеством h-голоморфности функции f, если $f\in\mathcal{H}_h(\mathcal{D}(f))$ и $\forall D'\supset\mathcal{D}(f)$ таких, что $f\in\mathcal{H}_h(D')$ выполняется $D' = \mathcal{D}(f)$ [3].

Теорема 2.1. *Пусть функция $f(z) = u(x,y)+jv(x,y)$ дважды непрерывно h-дифференцируема в интервале $(a,b) \in \mathbb{R}$. Тогда естественным множеством h-голоморфности функции f при $|a|, |b| < +\infty$ является открытый h-круг*

$$\mathcal{D}(f) = \left\{\|z - z_0\| < \frac{b-a}{2},\ \ z_0 = \frac{a+b}{2}\right\}. \qquad (2.1)$$

Если $b = +\infty$, то

$$\mathcal{D}(f) = \{z \in \mathbb{C}_h |\ -x + a < y < x - a\}. \qquad (2.2)$$

Если $a = -\infty$, то

$$\mathcal{D}(f) = \{z \in \mathbb{C}_h |\ x - b < y < -x + b\}. \qquad (2.3)$$

При $a = -\infty$, $b = +\infty$ получаем

$$\mathcal{D}(f) = \mathbb{C}_h. \qquad (2.4)$$

Доказательство. На множестве h-голоморфности верно представление (1.1). В максимально широкой области имеем

$$\begin{cases} a < x+y < b \\ a < x-y < b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+a < y < -x+b \\ x-b < y < x-a \end{cases},$$

что равносильно

$$z \in \left\{\|z - z_0\| < \frac{b-a}{2},\ \ z_0 = \frac{a+b}{2}\right\}.$$

Равенства (2.2)–(2.4) проверяются аналогично.

Замечание 2.1. В общем случае $\mathcal{D}(f)$ представляется в виде объединений и пересечений областей вида (2.1)–(2.4) или их замыканий и дополнений.

3. Образ произвольной области

Определение 3.1. Стандартным назовем компактное множество со связной внутренностью, ограниченное замкнутой ломаной, образованной конечным числом отрезков, параллельных прямым $y = x$ или $y = -x$. Стандартной областью назовем внутренность стандартного множества [3].

Теорема 3.1. *Пусть $f \in \mathcal{H}_h(D)$, где $D \subset \mathcal{D}(f)$ — стандартная область, $|u'_x(x,y)| \neq |u'_y(x,y)|$ в области $D^* = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | z = x + jy \in D\right\}$. Тогда $E = f(D)$ — стандартная область.*

Доказательство. Доказательство теоремы представлено в [3].

Определение 3.2. Последовательность множеств D_k называется исчерпанием множества D, если

1. $D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D_k \subset D_{k+1} \subset \ldots$,
2. $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} D_k = D$.

Теорема 3.2. *Пусть $D \subset \mathbb{C}_h$ — область, ограниченная кусочно-гладкой замкнутой кривой ∂D, $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ — её исчерпание стандартными областями, $f \in \mathcal{H}_h(D_k)$ $\forall k$. Тогда:*

1. *$f(D_k) \subset f(D_m)$ при $k < m$,*
2. *$f(D) = f\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} D_k\right) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} f(D_k)$,*
3. *$f \in \mathcal{H}_h(D)$,*
4. *если для всех $k = 1, 2, \ldots$ $E_k = f(D_k)$ — область, то $E = f(D)$ — область и $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ — её исчерпание стандартными областями.*

Доказательство. 1) вытекает из того, что $D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D_k \subset D_{k+1} \subset \ldots$

2) Обозначим $E = f(D)$. Пусть $z_0 \in D$, следовательно, существует такое k_0, что $z_0 \in D_k$ $\forall k \geq k_0$, следовательно, $f(z_0) \in f(D_k)$. С другой стороны $E_k = f(D_k) \subset E$, следовательно, $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$.

3) Пусть $z_0 \in D$. Тогда существует окрестность $U(z_0)$ и существует такое k_0, что $U(z_0) \subset D_k$ $\forall k \geq k_0$, следовательно, $f \in \mathcal{H}_h(U(z_0))$. В силу произвольности z_0 получаем $f \in \mathcal{H}_h(D)$.

4) Пусть $E_k = f(D_k)$ — область $\forall k$. Из 2) вытекает, что $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ — открытое множество. Для любых $z_1, z_2 \in D$ существует такой k_0, что $z_1, z_2 \in D_k$ $\forall k \geq k_0$, следовательно, точки z_1 и z_2 можно соединить непрерывным путем в D_k, а тогда точки $w_1 = f(z_1)$ и $w_2 = f(z_2)$ можно соединить непрерывным путем в E. Следовательно, E — связное множество. Таким образом, E — область. Доказательство теоремы вытекает из 1), 2) и теоремы 3.1.

4. Теорема о глобальном h-диффеоморфизме

В отличие от классических голоморфных функций, условие $f'(z) \neq 0$ не является достаточным для локальной обратимости h-голоморфных функций. Покажем, что при более сильных ограничениях локальная обратимость h-голоморфных функций имеет место.

Теорема 4.1. *(Теорема о локальной обратимости h-голоморфных функций.) Пусть функция $w = f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ h-голоморфна в области $D \subset \mathbb{C}_h$, непрерывно h-дифференцируема в окрестности точки $z_0 = a + jb \in D$. Если $|u'_x(a, b)| \neq |u'_y(a, b)|$, то существует открытая окрестность U точки z_0 и открытая окрестность V точки $w_0 = f(z_0)$ такие, что функция $f : U \to V$ имеет обратную $f^{-1} : V \to U$, которая непрерывно дифференцируема в V, и*

$$\left\{f^{-1}\right\}'(w) = \left\{f'(z)\right\}^{-1}.$$

Если $|u'_x(x, y)| \equiv |u'_y(x, y)|$ в некоторой окрестности точки z_0, то f не обратима в этой окрестности.

Доказательство. Доказательство проводится аналогично случаю вещественной функции двух переменных.

Для h-голоморфных функций обычный принцип сохранения области не имеет места. Для таких функций верна следующая теорема.

Теорема 4.2. *(Принцип сохранения области для h-голоморфных функций.) Пусть функция $w = f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ h-голоморфна в области $D \subset \mathbb{C}_h$; $u'_x(x, y)$, $u'_y(x, y)$ непрерывны* *в области* $D^* = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 | z = x + jy \in D\right\}$. *Если* $|u'_x(x,y)| \neq \left|u'_y(x,y)\right|$ *всюду в* D^*, *то множество* $E = f(D)$ *является областью. Если* $|u'_x(x,y)| \equiv \left|u'_y(x,y)\right|$ *всюду в* D *то* $f(D)$ — *открытый интервал вида*

$$\gamma_\pm = \left\{ w = (1 \pm j) \cdot u\left(\frac{x \pm y}{2}\right) + jC \,|\, C \in \mathbb{R},\, (x;y) \in D^* \right\}.$$

Доказательство. 1) Пусть $|u'_x(x,y)| \neq \left|u'_y(x,y)\right|$. Докажем, что $E = f(D)$ открыто. Выберем произвольную точку $w_0 = f(z_0) \in E$, $z_0 = x_0 + jy_0 \in D$. В силу теоремы 4.1 существуют такие открытые окрестности U и V точек z_0 и w_0 соответственно, что функция $f : U \to V$ имеет обратную $f^{-1} : V \to U$. Тогда для любой $w_1 \in V$ существует такая $z_1 \in U$, что $z_1 = f^{-1}(w_1) \in D$, $w_1 = f(z_1) \in E$. Следовательно, E — открытое.

2) Докажем, что E связно. Для открытых множеств связность эквивалентна линейной связности. Пусть $w_1, w_2 \in E$, $z_1 \in D$ — один из прообразов w_1, $z_2 \in D$ — один из прообразов w_2. Существует путь $\gamma : z = z(t)$, $t \in [0,1]$, связывающий в D точки z_1 и z_2. Из непрерывности f вытекает, что образ $\gamma^* = f[z(t)]$, $t \in [0,1]$ будет путем, связывающим в E точки w_1 и w_2. Очевидно, $\gamma^* \in E$, следовательно, E связно. Таким образом, при $|u'_x(x,y)| \neq \left|u'_y(x,y)\right|$ всюду в D множество $E = f(D)$ есть область.

3) Пусть $|u'_x(x,y)| \equiv \left|u'_y(x,y)\right|$ для любой точки $(x;y) \in D^*$. Если $u'_x = u'_y$, то $f(z) = (1+j) \cdot u\left(\frac{x+y}{2}\right) + jC$ и для любой точки $z \in D$ точка $w = f(z)$ лежит на интервале γ_+. Если $u'_x = -u'_y$, то $f(z) = (1-j) \cdot u\left(\frac{x-y}{2}\right) + jC$ и образы любой точки $z \in D$ лежат на интервале γ_-. Указанные интервалы не являются областями в $\mathbb{C}_h$. Теорема доказана.

Для h-голоморфных функций справедлив следующий аналог теоремы Ролля.

Теорема 4.3. *Пусть* $f \in \mathcal{H}_h(D)$, *где* $D \subset \mathbb{C}_h$ — *область,* $f(z_1) = f(z_2)$, *где* $z_1, z_2 \in D$. *Тогда* $f'(z)$ *обращается в делитель нуля на бесконечном множестве точек из области* D.

Доказательство. Пусть $f(z_1) = f(z_2)$, где $z_1 = a_1 + jb_1$, $z_2 = a_2 + jb_2$. Тогда $u(a_1,b_1) = u(a_2,b_2)$, $v(a_1,b_1) = v(a_2,b_2)$. Из (2) вытекает

$$\begin{cases} \varphi(a_1+b_1) + \psi(a_1-b_1) + \alpha = \varphi(a_2+b_2) + \psi(a_2-b_2) + \alpha \\ \varphi(a_1+b_1) - \psi(a_1-b_1) + \beta = \varphi(a_2+b_2) - \psi(a_2-b_2) + \beta \end{cases},$$

откуда $\varphi(a_1+b_1) = \varphi(a_2+b_2)$, $\psi(a_1-b_1) = \psi(a_2-b_2)$.

1) Предположим вначале, что $a_1+b_1 < a_2+b_2$ и $a_1-b_1 < a_2-b_2$. По теореме Ролля существуют $\xi \in (a_1+b_1, a_2+b_2)$ и $\eta \in (a_1-b_1, a_2-b_2)$ такие, что $\varphi'(\xi) = 0$, $\psi'(\eta) = 0$. Из (1.3) вытекает, что $f'(z)$ обращается в делитель нуля на бесконечном множестве точек $z = x + jy \in D$ таких, что $x + y = \xi$ или $x - y = \eta$.

2) Пусть $a_1 + b_1 = a_2 + b_2$, а $a_1 - b_1 < a_2 - b_2$. Тогда $\psi(a_1-b_1) = \psi(a_2-b_2)$ и $f'(z)$ обращается в делитель нуля на множестве точек $z = x + jy \in D$ таких, что $x - y = \eta$.

3) Если $a_1 - b_1 = a_2 - b_2$, а $a_1 + b_1 < a_2 + b_2$, то $\varphi(a_1+b_1) = \varphi(a_2+b_2)$ и $f'(z)$ обращается в делитель нуля на множестве точек $z = x + jy \in D$ таких, что $x + y = \xi$.

Другие случаи рассматриваются аналогично.

Теорема 4.4. *(О глобальном* h*-диффеоморфизме.) Пусть функция* $w = f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ h*-голоморфна в области* $D \subset \mathbb{C}_h$ *и* $|u'_x(x,y)| \neq |u'_y(x,y)|$ *для любых* (x,y) *таких, что* $z = x + jy \in D$. *Тогда* f h*-диффеоморфно отображает область* D *на область* $E = f(D)$. *При этом для производной обратной функции* $f^{-1} : E \to D$ *верна формула*

$$\left(f^{-1}(w)\right)' = \frac{1}{f'(z)}. \tag{4.1}$$

Доказательство. Из принципа сохранения области для h-голоморфных функций вытекает, что E — область. Однолистность отображения $f : D \to E$ выводится из теоремы 4.3. Формула (4.1) вытекает из теоремы о локальной обратимости h-голоморфных функций.

5. Усиленный принцип соответствия границ

Для h-голоморфных функций классический принцип соответствия границ [4] не имеет места. Из-за наличия в кольце $\mathbb{C}_h$ делителей нуля h-голоморфная в области функция может вообще никак не продолжаться на границу области. Покажем, что при выполнении более сильных условий h-голоморфную функцию можно продолжить до h-диффеоморфизма замкнутых областей.

Пусть Γ — кусочно-гладкая кривая в $\mathbb{C}_h$, $t = \sigma + j\omega$.

Определение 5.1. Функция $f : \Gamma \to \mathbb{C}_h$ называется h-голоморфной в точке $t \in \Gamma$, если

$$f(t + \Delta t) - f(t) = f'(t)\Delta t + \alpha(\Delta t)\Delta t,$$

где $t + \Delta t \in \Gamma$, $f'(t) = \frac{1+j}{2}\varphi'(\sigma + \omega) + \frac{1-j}{2}\psi'(\sigma - \omega)$, $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \alpha(\Delta t) = 0$, а φ, ψ — некоторые дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Определение 5.2. Функция f h-голоморфна на Γ, если f h-голоморфна в любой точке $t \in \Gamma$.

Теорема 5.1. *(Усиленный принцип соответствия границ.) Пусть $D \subset \mathbb{C}_h$ — область, ограниченная замкнутой кусочно-гладкой кривой ∂D, $f \in \mathcal{H}_h(D)$, $E = f(D)$, $f'(z)$ не обращается в делитель нуля на D. Если для любого $t \in D$ существует $\lim\limits_{D \ni z \to t} f'(z)$, отличный от делителя нуля, то $f : D \to E$ можно продолжить до h-диффеоморфизма замкнутых областей.*

Доказательство. 1) Из теоремы 4.4 вытекает, что D — область и f h-диффеоморфно отображает D на E. Пусть $t_0 \in \partial D$. Выберем произвольную последовательность $z_n \in D, n \in \in \mathbb{N}$, такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = t_0$. В силу компактности замыкания $\overline{D}$ из теоремы о конечных приращениях [2] для любых $n, p \in \mathbb{N}$ следует, что верна оценка

$$\|f(z_{n+p}) - f(z_n)\| \le 2 \sup_{\zeta\in D} \left\|f'(\zeta)\right\| \, \|z_{n+p} - z_n\|,$$

влекущая за собой фундаментальность последовательности $f(z_n)$. Из произвольности выбора последовательности z_n следует, что существует $\lim\limits_{D\ni z\to t_0} f(z)$. Полагая, что $f(t) = \lim\limits_{D\ni z\to t} f(z)$, для любого $t \in \partial D$ будем иметь непрерывное отображение $f : \overline{D} \to \overline{E}$. Очевидно, что при этом $f(\partial D) = \partial E$. Повторяя эти рассуждения для h-голоморфной функции $f^{-1} : E \to D$, получим непрерывное отображение $f^{-1} : \overline{E} \to \overline{D}$. Таким образом, f можно продолжить до гомеоморфизма замкнутых областей.

2) Покажем, что продолженная функция h-голоморфна на ∂D. Из теоремы о существования глобальной первообразной [5] для любого $z \in D$ имеем

$$f(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f'(\tau)d\tau + f(z_0),$$

где $z_0 \in D$, интеграл берется по любой кусочно-гладкой кривой, лежащей в D, соединяющей точки z_0 и z. В условиях теоремы 5.1 для любой точки $t \in \partial D$ существует

$$f(t) = \lim_{D\ni z\to t} \int\limits_{z_0}^{z} f'(\tau)d\tau + f(z_0) = \int\limits_{z_0}^{z} f'(\zeta)d\zeta + f(z_0).$$

При этом f h-дифференцируема в точке t и в силу (1.3)

$$f'(t) = \lim_{D\ni z\to t} f'(z) = \frac{1+j}{2}\varphi'(\sigma + \omega) + \frac{1-j}{2}\psi'(\sigma - \omega).$$

Кроме того, из (1.2) вытекают равенства

$$\begin{cases} u(\sigma,\omega) = \lim\limits_{x\to\sigma, y\to\omega} u(x,y) = \frac{1}{2}\left\{\varphi(\sigma+\omega)+\psi(\sigma-\omega)+\alpha\right\} \\ v(\sigma,\omega) = \lim\limits_{x\to\sigma, y\to\omega} v(x,y) = \frac{1}{2}\left\{\varphi(\sigma+\omega)-\psi(\sigma-\omega)+\beta\right\} \end{cases}.$$

Пусть $t, t+\Delta t \in \partial D$, $\Delta t = h + jk$. Имеем

$$f(t+\Delta t) - f(t) = [u(\sigma+h,\omega+k)+jv(\sigma+h,\omega+k)] - [u(\sigma,\omega)+jv(\sigma,\omega)] =$$

$$= [u(\sigma+h,\omega+k)-u(\sigma,\omega)] + j\,[v(\sigma+h,\omega+k)-v(\sigma,\omega)] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\big(\varphi'(\sigma+\omega)+\psi'(\sigma-\omega)\big)h + \big(\varphi'(\sigma+\omega)-\psi'(\sigma-\omega)\big)k\right] +$$

$$+\frac{j}{2}\left[\big(\varphi'(\sigma+\omega)-\psi'(\sigma-\omega)\big)h + \big(\varphi'(\sigma+\omega)+\psi'(\sigma-\omega)\big)k\right] + \alpha(\Delta t)\Delta t =$$

$$= \left[\frac{1+j}{2}\varphi'(\sigma+\omega) + \frac{1-j}{2}\psi'(\sigma-\omega)\right]\Delta t + \alpha(\Delta t)\Delta t,$$

что и завершает доказательство.

Замечание 5.1. Из доказательства теоремы 5.1 вытекает, что для продолженной функции справедлива формула:

$$\left(\lim_{D\ni z\to t} f(z)\right)' = \lim_{D\ni z\to t} f'(z).$$

Литература

1. *Яглом И.М. Комплексные числа и их применение в геометрии.* М., 2004.

2. *Павловский В.А., Васильев И.Л.* О свойствах h-дифференцируемых функций. *Журнал Белорусского государственного университета.* Математика. Информатика, No. 2 (2021), 29–37.

3. *Васильев И.Л., Павловский В.А.* Отображения с помощью h-голоморфных функций. *Весцi БДПУ.* Сер. 3, No. 2 (2021), 37–43.

4. *Гурвиц А., Курант Р. Теория функций.* М., Наука, 1968.

5. *Павловский В.А.* Дифференцирование и интегрирование функций h-комплексного переменного. *Наука и образование в современном мире: Вызовы XXI века: материалы IX Международной научно-практической конференции. Нур-Султан: Бобек.* (2021), 70–73.

УДК 519.876.2

РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДОВ ДЕКОМПОЗИЦИИ В ЗАДАЧЕ ОЦЕНКИ ПОТОКА НА НЕНАБЛЮДАЕМОЙ ЧАСТИ ДВУНАПРАВЛЕННОЙ СЕТИ

Л. А. Пилипчук[1], М. П. Романчук[2]

e-mail: [1]pilipchuk@bsu.by, [2]romanchump@bsu.by

Задача минимизации размера множества M обозреваемых узлов сети с целью локализации специальных программируемых устройств (сенсоров) для сбора необходимой информации о функции потока относится к классу NP-полных задач. Поиск оптимального решения с применением стратегий полного перебора сенсорных конфигураций узлов исследуемого класса NP-полных задач потребует огромных вычислительных затрат. Для больших сетей актуальной прикладной проблемой является поиск приемлемого числа обозреваемых узлов, что гарантировало бы ее полную наблюдаемость (субоптимальное решение). В работе рассматривается численная реализация методов декомпозиции построения оптимального решения в задаче оценки потока на ненаблюдаемой части двунаправленной сети.

Ключевые слова: *граф; поток; разреженная линейная система; декомпозиция; моделирование; сенсорная конфигурация узлов; оптимальное решение; вычислительные эксперименты.*

IMPLEMENTATION OF DECOMPOSITION METHODS IN THE FLOW ESTIMATION PROBLEM ON THE UNOBSERVED PART OF A BIDIRECTIONAL NETWORK

L. A. Pilipchuk[1], M. P. Romanchuk[2]

e-mail: [1]pilipchuk@bsu.by, [2]romanchump@bsu.by

The problem of minimization of the size of the set M for surveyed nodes in order to localize special programmable devices (sensors) to collect necessary information about the flow function belongs to the class of NP-complete problems. Determination of the optimal solution using the full brute-force strategies of sensor node configurations of the investigated class of NP-complete problems requires enormous computational cost. For large networks, a relevant applied problem is to find an acceptable number of the observable nodes that would guarantee its complete observability (suboptimal solution). In this paper we consider the numerical implementation of decomposition methods for construction of an optimal solution in the flow estimation problem on the unobserved part of a bidirectional network.

Keywords: *graph; flow; sparse linear system; decomposition; modelling; sensor nodes configuration; optimal solution; computational experiments.*

Mathematics Subject Classification (2020): Primary 05C82, 68Q06, Secondary 49L25, 90C35.

1. Введение

Для задач управления потоками и их контроля в сетях неотъемлемой составляющей является проектирование стратегий расположения специальных программируемых устройств (сенсоров). Технологии коммуникации позволяют получить информацию о потоках в больших сетях с помощью сенсоров и видеокамер для относительно незначительной части сети. Особую важность имеет разработка оптимальных стратегий расположения минимального количества сенсоров в узлах сети для сбора частичной информации о функции потока. На основании анализа и использования полученных данных рассматривается возможность оценки потоков в той части сети, которая непосредственно не наблюдается. Задача моделирования процессов оценки потоков на ненаблюдаемой части может быть представлена в виде недоопределенной системы линейных алгебраических уравнений, где совокупность переменных соответствует неизвестным дуговым потокам и переменным интенсивностям узлов, а совокупность уравнений – условиям баланса. Решение системы линейных алгебраических уравнений определяет численные значения потоков на ненаблюдаемой части исходной сети. Это означает, что все потоки известны, т.е. сеть полностью наблюдаема.

В [1] доказано, что задача идентификации минимального числа датчиков и их конфигураций является NP-полной. В последние несколько лет проблема расположения сенсоров для мониторинга потоков в сети была объектом растущего интереса в связи с ее актуальностью в области контроля и управления движением. С ростом размерности сети стратегии полного перебора для определения оптимальных конфигураций обозреваемых узлов NP-полных задач данного класса оказываются неприемлемыми. В этом контексте первостепенное значение имеет разработка новых подходов и стратегий определения местоположения датчиков, развитие технологий и алгоритмов численного решения разреженных систем линейных алгебраических уравнений. В [2], [3] представлены эффективные алгоритмы и технологии численного решения исследуемой задачи.

2. Исследование разреженных систем в задаче идентификации сенсорных конфигураций узлов для оценки потоков на ненаблюдаемой части сети

Необходимо установить сенсоры в определенные (обозреваемые) узлы для сбора информации о функции потока, которая бы гарантировала полную наблюдаемость сети. В результате обработки информации от установленных в обозреваемые узлы сенсоров получена специальная разреженная система линейных алгебраических уравнений, единственность решения которой гарантирует полную наблюдаемость сети.

Пусть задан ориентированный конечный связный двунаправоенный граф $G = (I, U)$. Множество дуг U задано на $I \times\ I$ $(|I| < \infty, |U| < \infty)$. Объект исследования — разреженная система линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j \in I_i^+(U)} x_{i,j} - \sum_{j \in I_i^-(U)} x_{j,i} = \begin{cases} 0, & i \in I \setminus I^*, \\ x_i sign(i), & i \in I^*. \end{cases} \tag{1}$$

$$\sum_{(i,j) \in U} \lambda_{i,j}^p x_{i,j} + \sum_{i \in I^*} \lambda_i^p x_i = \beta_p, p = \overline{1, q}. \tag{2}$$

где $I_i^+(U) = \{j \in I : (i,j) \in U\}, I_i^-(U) = \{j \in I : (j,i) \in U\}$, $x_{i,j}$ — величина потока вдоль дуги (i,j). Узлы $i \in I^*$ — узлы с переменным внешним потоком x_i, $sign(i) = \begin{cases} 1, & i \in I_+^*, \\ -1, & i \in I_-^*. \end{cases}$ Матрица системы (1)–(2) имеет структуру вида:

$$A = \begin{bmatrix} M & B \\ Q & T \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Матрица M — матрица с блочно-диагональной структурой размера $|I| \times\ |U|$ ориентированного графа $G = (I, U)$; Q — матрица размера $q \times |U|$ с элементами $\lambda_{i,j}^p, (i,j) \in U, p = \overline{1, q}$. Матрица B — разреженная матрица размера $|I| \times |I^*|$. Матрица содержит в столбце j ненулевой элемент равный $-sign(i)$ в строке i для всех $j \in I^*$, остальные элементы равны нулю, $i \in I$. T — матрица размера $q \times |I^*|$ состоит из элементов $\lambda_i^p, i \in I^*, p = \overline{1, q}$.

Если ранг матрицы A системы (1)–(2) равен $|I|+q$, а также выполняется неравенство $|I|+q<$ $<|U|+|I^*|$, то система (1)–(2) является недоопределенной системой линейных алгебраических уравнений.

3. Недоопределенная разреженная линейная система

Проанализируем работу алгоритма декомпозиции системы (1)–(2) для оценки потоков в сети, на примере двунаправленного орграфа $G=(I,U)$, $I=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $U=\{(1,2),(2,1),(1,5),(1,5)$ $(2,5),(5,2),(6,4),(4,6),(9,6),(6,9),(9,5),(5,9),(9,2),(2,9),(3,5),(5,3)\}$, $I^*=\{2,3,7,8\}$ (см. рисунок 1).

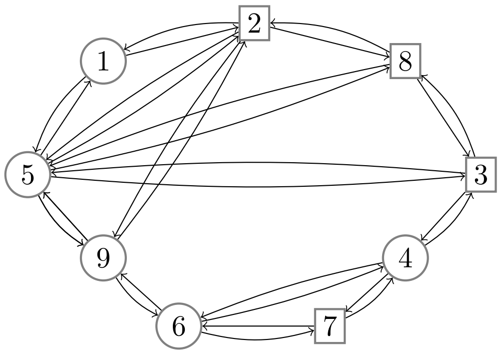

Рис. 1: Двунаправленный орграф $G=(I,U)$

На рисунке 1 узлы с переменным внешним потоком $x_i, i \in I^*$ помечены квадратами.

Положим множество обозреваемых узлов $M=\{9\}$. Удалим из G узел $i=9$ (см. рисунок 2), Построим разрез $CC(M)=\{(6,9),(9,6),(5,9),(9,5),(2,9),(9,2)\}$, найдем $I(CC(M))=$ $=\{2,5,6,9\}$, построим $M^+=I(CC(M))\setminus M=\{2,5,6\}$, сформируем множества $M^*=M\cup M^+$ $+=\{2,5,6,9\}$ и $\widetilde{I}=I\setminus M^*=\{1,3,4,7,8\}$ [2]. Удалим дуги, исходящие из узлов $i\in M^+$, т. к. поток на них известен [2] и получим орграф $\overline{G}=(\overline{I},\overline{U})$ — ненаблюдаемую часть орграфа G, $\overline{I}=$ $=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $\overline{U}=\{(1,2),(1,5),(3,4),(3,5),(3,8),(4,3),(4,6),(4,7),(7,4),(7,6),(8,2),(8,3),$ $(8,5)\}$ (см. рисунок 3).

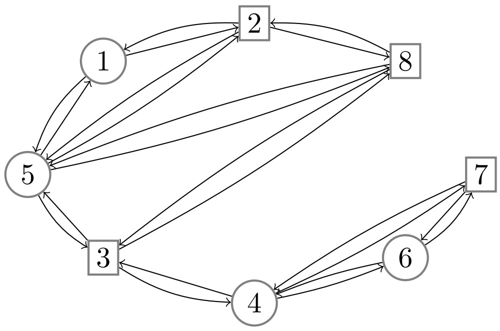

Рис. 2: Орграф после удаления обозреваемого узла $M=\{9\}$
и соответствующих входящих и исходящих дуг из узла $i=9$

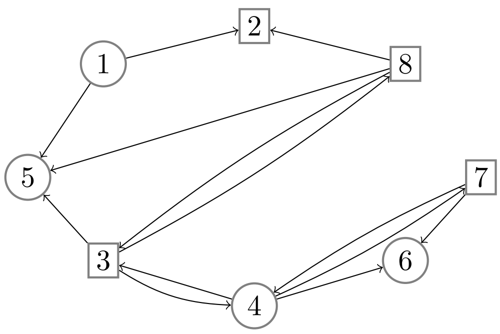

Рис. 3: Орграф $\overline{G}$ — ненаблюдаемая часть орграфа G

К орграфу $\overline{G}$ добавим фиктивный узел ξ и дуги $(\xi, 2)$, $(\xi, 3)$, $(\xi, 7)$, $(\xi, 8)$, получим $\widehat{G} = (\widehat{I}, \widehat{U})$ и построим опору (остовное дерево) T графа $\widehat{G}$ для системы вида (1) при $I^* = \varnothing$ [2] (на рисунке 4 опора полученного орграфа отмечена жирными дугами).

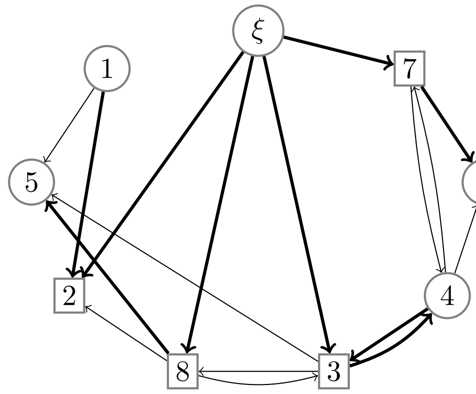

Рис. 4: Орграф $\widehat{G}$ с помеченной опорой для системы (1) при $I^* = \varnothing$

Для опоры T (покрывающее дерево графа $\widehat{G}$ [2]) выберем узел ξ в качестве корня и построим корневые и вспомогательные структуры для представления корневого дерева в памяти компьютера (см. таблицу 1).

Таблица 1. Корневые структуры для хранения покрывающего дерева T графа $\widehat{G}$

i	1	2	3	4	5	6	7	8	ξ
$pred[i]$	2	ξ	ξ	3	8	7	ξ	ξ	0
$dir[i]$	-1	1	1	1	1	1	1	1	0
$depth[i]$	2	1	1	2	2	2	1	1	0
$d[i]$	8	1	4	7	3	ξ	6	5	2

Для орграфа $\widehat{G}$ вычислим правую часть $a_i, i \in \overline{I}$ и представим преобразованную систему уравнений баланса:

$$
\begin{gathered}
-x_{1,2} - x_{1,5} = -\frac{f_{2,9} p_{2,1}}{p_{2,9}} - \frac{f_{5,9} p_{5,1}}{p_{5,9}}, \\
x_{\xi,2} + x_{1,2} + x_{8,2} = \frac{f_{2,9}\left(p_{2,1} + p_{2,5} + p_{2,8} + p_{2,9}\right)}{p_{2,9}} - \frac{f_{5,9} p_{5,2}}{p_{5,9}} - f_{9,2}, \\
x_{1,5} + x_{3,5} + x_{8,5} = \frac{f_{5,9}\left(p_{5,1} + p_{5,2} + p_{5,3} + p_{5,8} + p_{5,9}\right)}{p_{5,9}} - \frac{f_{2,9} p_{2,5}}{p_{2,9}} - f_{9,5}, \\
x_{\xi,8} + x_{3,8} - x_{8,2} - x_{8,3} - x_{8,5} = -\frac{f_{2,9} p_{2,8}}{p_{2,9}} - \frac{f_{5,9} p_{5,8}}{p_{5,9}}, \\
x_{\xi,3} - x_{3,4} - x_{3,5} - x_{3,8} + x_{4,3} + x_{8,3} = -\frac{f_{5,9} p_{5,3}}{p_{5,9}}, \\
x_{3,4} - x_{4,3} - x_{4,6} - x_{4,7} + x_{7,4} = -\frac{f_{6,9} p_{6,4}}{p_{6,9}}, \\
x_{\xi,7} + x_{4,7} - x_{7,4} - x_{7,6} = -\frac{f_{6,9} p_{6,7}}{p_{6,9}}, \\
x_{4,6} + x_{7,6} = \frac{f_{6,9}\left(p_{6,4} + p_{6,7} + p_{6,9}\right)}{p_{6,9}} - f_{9,6}, \\
-x_{\xi,2} - x_{\xi,3} - x_{\xi,7} - x_{\xi,8} = -f_{2,9} - f_{5,9} - f_{6,9} + f_{9,2} + f_{9,5} + f_{9,6}.
\end{gathered}
\tag{4}
$$

Положим неопорные потоки равными 0 и построим частное решение $\tilde{x} = (\tilde{x}_{i,j}, i, j \in \widehat{U})$ системы (4):

$$
\begin{gathered}
\tilde{x}_{1,5} \to 0,\ \tilde{x}_{3,5} \to 0,\ \tilde{x}_{3,8} \to 0,\ \tilde{x}_{4,3} \to 0,\ \tilde{x}_{4,6} \to 0,\ \tilde{x}_{4,7} \to 0,\\
\tilde{x}_{7,4} \to 0,\ \tilde{x}_{8,2} \to 0,\ \tilde{x}_{8,3} \to 0,\ \tilde{x}_{1,2} \to \frac{f_{2,9}p_{2,1}}{p_{2,9}} + \frac{f_{5,9}p_{5,1}}{p_{5,9}},\\
\tilde{x}_{3,4} \to -\frac{f_{6,9}p_{6,4}}{p_{6,9}},\ \tilde{x}_{7,6} \to \frac{f_{6,9}\left(p_{6,4}+p_{6,7}+p_{6,9}\right)}{p_{6,9}} - f_{9,6},\\
\tilde{x}_{8,5} \to \frac{f_{5,9}\left(p_{5,1}+p_{5,2}+p_{5,3}+p_{5,8}+p_{5,9}\right)}{p_{5,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,5}}{p_{2,9}} - f_{9,5},\\
\tilde{x}_{9,2} \to \frac{f_{2,9}\left(p_{2,1}+p_{2,5}+p_{2,8}+p_{2,9}\right)}{p_{2,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,1}}{p_{2,9}} - \frac{f_{5,9}p_{5,1}}{p_{5,9}} - \frac{f_{5,9}p_{5,2}}{p_{5,9}} - f_{9,2},\\
\tilde{x}_{9,3} \to -\frac{f_{5,9}p_{5,3}}{p_{5,9}} - \frac{f_{6,9}p_{6,4}}{p_{6,9}},\ \tilde{x}_{9,7} \to \frac{f_{6,9}\left(p_{6,4}+p_{6,7}+p_{6,9}\right)}{p_{6,9}} - \frac{f_{6,9}p_{6,7}}{p_{6,9}} - f_{9,6},\\
\tilde{x}_{9,8} \to \frac{f_{5,9}\left(p_{5,1}+p_{5,2}+p_{5,3}+p_{5,8}+p_{5,9}\right)}{p_{5,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,5}}{p_{2,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,8}}{p_{2,9}} - \frac{f_{5,9}p_{5,8}}{p_{5,9}} -\\
-f_{9,5}.
\end{gathered}
\tag{5}
$$

Построим характеристические векторы $\delta_{ij}(\tau,\rho)$ (см. таблицу 2) в том числе и для дуг, инцидентных узлу ξ (см. таблицу 3). Система характеристических векторов представляет собой базис пространства решений [2] однородной системы, порожденной из системы (4).

Таблица 2. Характеристические векторы

	$\delta_{1,2}$	$\delta_{1,5}$	$\delta_{8,2}$	$\delta_{3,4}$	$\delta_{4,3}$	$\delta_{3,8}$	$\delta_{8,3}$	$\delta_{4,7}$	$\delta_{7,4}$	$\delta_{8,5}$	$\delta_{7,6}$	$\delta_{4,6}$	$\delta_{3,5}$
(1,5)	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0
(8,2)	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(4,3)	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
(3,8)	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
(8,3)	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
(4,7)	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
(7,4)	0	0	0	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
(4,6)	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	1	0
(3,5)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1

Таблица 3. Характеристические векторы для дуг, инцидентных ξ

	$\delta_{\xi,2}$	$\delta_{\xi,3}$	$\delta_{\xi,7}$	$\delta_{\xi,8}$
(1,5)	1	0	0	-1
(8,2)	-1	0	0	1
(4,3)	0	0	0	0
(3,8)	0	1	0	-1
(8,3)	0	-1	0	1
(4,7)	0	1	-1	0
(7,4)	0	-1	1	0
(4,6)	0	1	-1	0
(3,5)	0	1	0	-1

Построим общее решение однородной системы, порожденной системой (4):

$$
\begin{gathered}
x_{1,2} \to \frac{f_{2,9}p_{2,1}}{p_{2,9}} + \frac{f_{5,9}p_{5,1}}{p_{5,9}} - x_{1,5},\\
x_{3,4} \to -\frac{f_{6,9}p_{6,4}}{p_{6,9}} + x_{4,3} + x_{4,6} + x_{4,7} - x_{7,4},\\
x_{8,5} \to \frac{f_{5,9}\left(p_{5,1}+p_{5,2}+p_{5,3}+p_{5,8}+p_{5,9}\right)}{p_{5,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,5}}{p_{2,9}} - f_{9,5} - x_{1,5} - x_{3,5},\\
x_{7,6} \to \frac{f_{6,9}\left(p_{6,4}+p_{6,7}+p_{6,9}\right)}{p_{6,9}} - f_{9,6} - x_{4,6},
\end{gathered}
$$

$$x_{\xi,2} \to \frac{f_{2,9}\left(p_{2,1}+p_{2,5}+p_{2,8}+p_{2,9}\right)}{p_{2,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,1}}{p_{2,9}} - \frac{f_{5,9}p_{5,1}}{p_{5,9}} - \frac{f_{5,9}p_{5,2}}{p_{5,9}} - $$
$$-f_{9,2} + x_{1,5} - x_{8,2},$$
$$x_{\xi,3} \to -\frac{f_{5,9}p_{5,3}}{p_{5,9}} - \frac{f_{6,9}p_{6,4}}{p_{6,9}} + x_{3,5} + x_{3,8} + x_{4,6} + x_{4,7} - x_{7,4} - x_{8,3},$$
$$x_{\xi,7} \to \frac{f_{6,9}\left(p_{6,4}+p_{6,7}+p_{6,9}\right)}{p_{6,9}} - \frac{f_{6,9}p_{6,7}}{p_{6,9}} - f_{9,6} - x_{4,6} - x_{4,7} + x_{7,4},$$
$$x_{\xi,8} \to \frac{f_{5,9}\left(p_{5,1}+p_{5,2}+p_{5,3}+p_{5,8}+p_{5,9}\right)}{p_{5,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,5}}{p_{2,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,8}}{p_{2,9}} -$$
$$-\frac{f_{5,9}p_{5,8}}{p_{5,9}} - f_{9,5} - x_{1,5} - x_{3,5} - x_{3,8} + x_{8,2} + x_{8,3}$$

Система дополнительных уравнений [2] имеет вид:

$$\begin{gathered} x_{1,2} - \frac{p_{1,5}x_{1,5}}{p_{1,2}} = 0, \;\; x_{3,4} - \frac{p_{3,8}x_{3,8}}{p_{3,4}} = 0, \;\; x_{3,4} - \frac{p_{3,5}x_{3,5}}{p_{3,4}} = 0, \\ x_{4,3} - \frac{p_{4,7}x_{4,7}}{p_{4,3}} = 0, \;\; x_{4,3} - \frac{p_{4,6}x_{4,6}}{p_{4,3}} = 0, \;\; x_{7,4} - \frac{p_{7,6}x_{7,6}}{p_{7,4}} = 0, \\ x_{8,2} - \frac{p_{8,3}x_{8,3}}{p_{8,2}} = 0, \;\; x_{8,2} - \frac{p_{8,5}x_{8,5}}{p_{8,2}} = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Запишем матрицу Λ системы (6):

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\frac{p_{1,5}}{p_{1,2}} - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{p_{3,8}}{p_{3,4}} & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -\frac{p_{3,5}}{p_{3,4}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{p_{4,7}}{p_{4,3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{p_{4,6}}{p_{4,3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{p_{7,6}}{p_{7,4}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{p_{8,3}}{p_{8,2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{p_{8,5}}{p_{8,2}} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{p_{8,5}}{p_{8,2}} \end{pmatrix}.$$

Поскольку $rank(\Lambda) = 8$, число неопорных дуг равно 9, то система недоопределена. Выберем дуги

$$\widehat{U}_W = \{(1,5),(8,2),(4,3),(3,8),(8,3),(4,7),(7,4),(4,6)\},$$

тогда $\widehat{U}_{\neg T} \setminus \widehat{U}_W = \{(3,5)\}$. Таким образом

$$\Lambda_W = \begin{pmatrix} -\frac{p_{1,5}}{p_{1,2}} - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{p_{3,8}}{p_{3,4}} & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{p_{4,7}}{p_{4,3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{p_{4,6}}{p_{4,3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{p_{7,6}}{p_{7,4}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{p_{8,3}}{p_{8,2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{p_{8,5}}{p_{8,2}} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

определитель матрицы Λ_W равен

$$det(\Lambda_W) = \frac{\left(p_{1,2}+p_{1,5}\right)p_{3,8}\left(p_{4,6}p_{4,7}p_{7,4} + p_{4,3}\left(p_{4,6}p_{7,4} + p_{4,7}\left(p_{7,4}+p_{7,6}\right)\right)\right)p_{8,3}}{p_{1,2}p_{3,4}p_{4,3}^2p_{7,4}p_{8,2}}.$$

Т.к. $p_{ij} > 0$, то в выражении $det(\Lambda_W)$ все слагаемые строго положительны, следовательно, $det(\Lambda_W) \neq 0$, значит, матрица Λ_W – невырожденная.

Вычислим правую часть β:

$$\beta = \begin{pmatrix} -\frac{f_{2,9}p_{2,1}}{p_{2,9}} - \frac{f_{5,9}p_{5,1}}{p_{5,9}} \\ \frac{f_{6,9}p_{6,4}}{p_{6,9}} \\ \frac{f_{6,9}p_{6,4}}{p_{6,9}} + \frac{p_{3,5}x_{3,5}}{p_{3,4}} \\ 0 \\ 0 \\ p_{7,6}\left(\dfrac{f_{6,9}\left(p_{6,4}+p_{6,7}+p_{6,9}\right)}{p_{6,9}} - f_{9,6}\right)p_{7,4}^{-1} \\ 0 \\ \dfrac{p_{8,5}\left(\dfrac{f_{5,9}\left(p_{5,1}+p_{5,2}+p_{5,3}+p_{5,8}+p_{5,9}\right)}{p_{5,9}} - \dfrac{f_{2,9}p_{2,5}}{p_{2,9}} - f_{9,5} - x_{3,5}\right)}{p_{8,2}} \end{pmatrix} \tag{7}$$

Общее решение системы (4), (6) может быть получено по правилам, описанным в [2] в виде решения двух систем, полученных на основе декомпозиции потоков на ненаблюдаемой части сети.

4. Переопределенная разреженная линейная система

Для графа, представленного на рисунке 1, изменим количество обозреваемых узлов, либо их конфигурацию. В результате сбора необходимой информации о функции потока ранг матрицы системы может измениться, т.е. возможно, что система будет *переопределенной* либо иметь единственное решение. Рассмотрим случай построения решения для переопределенной системы. Для графа G, представленного на рисунке 1, положим $M = \{8, 9\}$ и удалим узлы $i \in M$ и соответствующие входящие и исходящие дуги из узлов множества M орграфа G (см. рисунок 4).

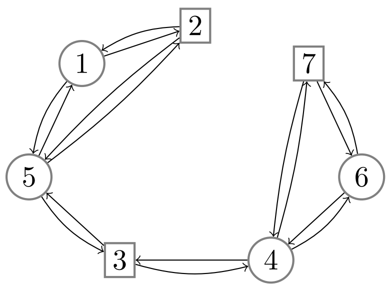

Рис. 4: Орграф после удаления обозреваемых узлов и соответствующих входящих и исходящих дуг из узлов множества $M = \{8, 9\}$

Удалим дуги, исходящие из узлов $i \in M^+$, т.к. поток на них известен и получим орграф (см. рисунок 5) $\overline{G} = (\overline{I}, \overline{U})$, $\overline{I} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $\overline{U} = \{(1, 2), (1, 5), (4, 3), (4, 7), (7, 4), (7, 6), (4, 6)\}$.

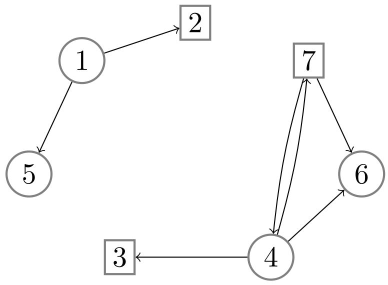

Рис. 5: Орграф $\overline{G} = (\overline{I}, \overline{U})$ состоит из двух компонент связности

Дополним орграф $\overline{G} = (\overline{I}, \overline{U})$ узлом ξ и дугами $(\xi, 2), (\xi, 3), (\xi, 7)$, получим орграф $\widehat{G} = (\widehat{I}, \widehat{U}), \widehat{I} = \overline{I} \cup \{\xi\}, \widehat{U} = \overline{U} \cup \{(\xi, 2), (\xi, 3), (\xi, 7)\}$ и построим его опору T [1] (на рисунке 6 опора полученного орграфа отмечена жирными дугами).

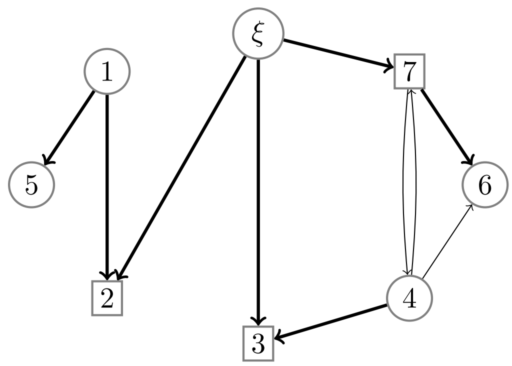

Рис. 6: Орграф $\widehat{G}$ с помеченной опорой для системы (8)

Для опоры орграфа $\widehat{G}$ выберем узел ξ в качестве корня и построим корневые и вспомогательные структуры (см. таблицу 4).

Таблица 4. Корневые структуры для хранения T орграфа $\widehat{G}$

i	1	2	3	4	5	6	7	ξ
$pred[i]$	2	ξ	ξ	3	1	7	ξ	0
$dir[i]$	-1	1	1	-1	1	1	1	0
$depth[i]$	2	1	1	2	3	2	1	0
$d[i]$	5	1	4	7	3	ξ	6	2

Для орграфа $\widehat{G}$ вычислим $a_i, i \in \overline{I}$ с учетом сбора информации, полученной от сенсоров, и преобразований системы (4). Запишем систему уравнений баланса:

$$\begin{gathered}
-x_{1,2} - x_{1,5} = -\frac{f_{2,8}p_{2,1}}{p_{2,8}} - \frac{f_{2,9}p_{2,1}}{p_{2,9}} + p_{5,1}\left(-\frac{f_{5,8}}{p_{5,8}} - \frac{f_{5,9}}{p_{5,9}}\right), \\
x_{\xi,2} + x_{1,2} = \frac{f_{2,8}\left(p_{2,1}+p_{2,5}+p_{2,8}\right)}{p_{2,8}} + \frac{f_{2,9}\left(p_{2,1}+p_{2,5}+p_{2,9}\right)}{p_{2,9}} - \\
-\frac{f_{5,8}p_{5,2}}{p_{5,8}} - \frac{f_{5,9}p_{5,2}}{p_{5,9}} - f_{8,2} - f_{9,2}, \\
x_{1,5} = \frac{f_{5,8}\left(p_{5,1}+p_{5,2}+p_{5,3}+p_{5,8}\right)}{p_{5,8}} + \frac{f_{5,9}\left(p_{5,1}+p_{5,2}+p_{5,3}+p_{5,9}\right)}{p_{5,9}} - \\
-\frac{f_{2,8}p_{2,5}}{p_{2,8}} - \frac{f_{2,9}p_{2,5}}{p_{2,9}} - \frac{f_{3,8}p_{3,5}}{p_{3,8}} - f_{8,5} - f_{9,5}, \\
x_{\xi,3} + x_{4,3} = \frac{f_{3,8}\left(p_{3,4}+p_{3,5}+p_{3,8}\right)}{p_{3,8}} + p_{5,3}\left(-\frac{f_{5,8}}{p_{5,8}} - \frac{f_{5,9}}{p_{5,9}}\right) - f_{8,3}, \\
-x_{4,3} - x_{4,6} - x_{4,7} + x_{7,4} = -\frac{f_{3,8}p_{3,4}}{p_{3,8}} - \frac{f_{6,9}p_{6,4}}{p_{6,9}}, \\
x_{\xi,7} + x_{4,7} - x_{7,4} - x_{7,6} = -\frac{f_{6,9}p_{6,7}}{p_{6,9}}, \\
x_{4,6} + x_{7,6} = \frac{f_{6,9}\left(p_{6,4}+p_{6,7}+p_{6,9}\right)}{p_{6,9}} - f_{9,6}, \\
-x_{\xi,2} - x_{\xi,3} - x_{\xi,7} = -f_{2,8} - f_{2,9} - f_{3,8} - f_{5,8} - f_{5,9} - f_{6,9} + f_{8,2} + f_{8,3} + \\
+ f_{8,5} + f_{9,2} + f_{9,5} + f_{9,6}.
\end{gathered} \tag{8}$$

Положим неопорные потоки равными 0 и построим частное решение системы (8):

$$\tilde{x}_{4,6} \to 0, \tilde{x}_{4,7} \to 0, \tilde{x}_{7,4} \to 0,$$

$$\tilde{x}_{1,2} \to f_{8,5} + f_{9,5} - p_{5,1}\left(-\frac{f_{5,8}}{p_{5,8}} - \frac{f_{5,9}}{p_{5,9}}\right) + \frac{f_{2,8}p_{2,1}}{p_{2,8}} + \frac{f_{2,8}p_{2,5}}{p_{2,8}} + \frac{f_{2,9}p_{2,1}}{p_{2,9}} +$$

$$+\frac{f_{2,9}p_{2,5}}{p_{2,9}} + \frac{f_{3,8}p_{3,5}}{p_{3,8}} - \frac{f_{5,8}\left(p_{5,1}+p_{5,2}+p_{5,3}+p_{5,8}\right)}{p_{5,8}} - \frac{f_{5,9}\left(p_{5,1}+p_{5,2}+p_{5,3}+p_{5,9}\right)}{p_{5,9}},$$

$$\tilde{x}_{1,5} \to -f_{8,5} - f_{9,5} + \frac{f_{5,8}\left(p_{5,1}+p_{5,2}+p_{5,3}+p_{5,8}\right)}{p_{5,8}} + \frac{f_{5,9}\left(p_{5,1}+p_{5,2}+p_{5,3}+p_{5,9}\right)}{p_{5,9}} -$$

$$-\frac{f_{2,8}p_{2,5}}{p_{2,8}} - \frac{f_{2,9}p_{2,5}}{p_{2,9}} - \frac{f_{3,8}p_{3,5}}{p_{3,8}},$$

$$\tilde{x}_{4,3} \to \frac{f_{3,8}p_{3,4}}{p_{3,8}} + \frac{f_{6,9}p_{6,4}}{p_{6,9}},$$

$$\tilde{x}_{7,6} \to \frac{f_{6,9}\left(p_{6,4}+p_{6,7}+p_{6,9}\right)}{p_{6,9}} - f_{9,6},$$

$$\tilde{x}_{8,2} \to -f_{8,2} - f_{8,5} - f_{9,2} - f_{9,5} + \frac{f_{2,8}\left(p_{2,1}+p_{2,5}+p_{2,8}\right)}{p_{2,8}} + \frac{f_{2,9}\left(p_{2,1}+p_{2,5}+p_{2,9}\right)}{p_{2,9}} +$$

$$+\frac{f_{5,8}\left(p_{5,1}+p_{5,2}+p_{5,3}+p_{5,8}\right)}{p_{5,8}} + p_{5,1}\left(-\frac{f_{5,8}}{p_{5,8}} - \frac{f_{5,9}}{p_{5,9}}\right) +$$

$$+\frac{f_{5,9}\left(p_{5,1}+p_{5,2}+p_{5,3}+p_{5,9}\right)}{p_{5,9}} - \frac{f_{2,8}p_{2,1}}{p_{2,8}} - \frac{f_{2,8}p_{2,5}}{p_{2,8}} - \frac{f_{2,9}p_{2,1}}{p_{2,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,5}}{p_{2,9}} -$$

$$-\frac{f_{3,8}p_{3,5}}{p_{3,8}} - \frac{f_{5,8}p_{5,2}}{p_{5,8}} - \frac{f_{5,9}p_{5,2}}{p_{5,9}},$$

$$\tilde{x}_{8,3} \to -f_{8,3} + \frac{f_{3,8}\left(p_{3,4}+p_{3,5}+p_{3,8}\right)}{p_{3,8}} + p_{5,3}\left(-\frac{f_{5,8}}{p_{5,8}} - \frac{f_{5,9}}{p_{5,9}}\right) - \frac{f_{3,8}p_{3,4}}{p_{3,8}} - \frac{f_{6,9}p_{6,4}}{p_{6,9}},$$

$$\tilde{x}_{8,7} \to -f_{9,6} + \frac{f_{6,9}\left(p_{6,4}+p_{6,7}+p_{6,9}\right)}{p_{6,9}} - \frac{f_{6,9}p_{6,7}}{p_{6,9}}$$

Построим характеристические векторы $\delta_{ij}(\tau,\rho)$ (см. таблицу 5).

Таблица 5. Характеристические векторы

(τ,ρ)	$\delta_{1,2}$	$\delta_{1,5}$	$\delta_{4,3}$	$\delta_{4,7}$	$\delta_{7,4}$	$\delta_{7,6}$	$\delta_{4,6}$	$\delta_{\xi,2}$	$\delta_{\xi,3}$	$\delta_{\xi,7}$
(4,7)	0	0	-1	1	0	0	0	0	1	-1
(7,4)	0	0	1	0	1	0	0	0	-1	1
(4,6)	0	0	-1	0	0	-1	1	0	1	-1

Построим общее решение однородной системы уравнений баланса (8). В силу слишком большого размера оно не приводится. Система дополнительных уравнений имеет вид:

$$x_{1,2} - \frac{p_{1,5}x_{1,5}}{p_{1,2}} = 0, \quad x_{4,3} - \frac{p_{4,7}x_{4,7}}{p_{4,3}} = 0, \quad x_{4,3} - \frac{p_{4,6}x_{4,6}}{p_{4,3}} = 0, \quad x_{7,4} - \frac{p_{7,6}x_{7,6}}{p_{7,4}} = 0 \qquad (9)$$

и запишем матрицу Λ системы (9):

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{p_{4,7}}{p_{4,3}} - 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -\frac{p_{4,6}}{p_{4,3}} - 1 \\ 0 & 1 & \frac{p_{7,6}}{p_{7,4}} \end{pmatrix}.$$

$rank(\Lambda) = 3$. Т.к. небазисных дуг 3, а $q = 4$, то система переопределена, выберем $\widehat{U}_W = \widehat{U}_{\neg T}$, тогда $\widehat{U}_{\neg T} \setminus \widehat{U}_W = \varnothing$. Таким образом нужно выбрать три линейно независимых уравнения, т.к.

четвертое линейно зависимо от них и должно выполняться при условии, что коэфициенты p_{ij} и значения f_{ij} заданы корректно. Выберем уравнения с номерами 2, 3, 4 и соответствующую им подматрицу

$$\Lambda_W = \begin{pmatrix} -\frac{p_{4,7}}{p_{4,3}} - 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -\frac{p_{4,6}}{p_{4,3}} - 1 \\ 0 & 1 & \frac{p_{7,6}}{p_{7,4}} \end{pmatrix}$$

тогда

$$det(\Lambda_W) = \frac{p_{4,3}\left(-p_{4,6} - \frac{p_{4,7}(p_{7,4}+p_{7,6})}{p_{7,4}}\right) - p_{4,6}p_{4,7}}{p_{4,3}^2}.$$

Т.к. $p_{ij} > 0$, то в выражении $det(\Lambda_W)$ все слагаемые строго отрицательны, тогда $det(\Lambda_W) \neq 0 \Rightarrow$ матрица Λ_W — невырожденная.

Общее решение систем (8), (9) может быть получено по описанным выше правилам, однако в данном примере оно будет опущено в силу того, что оно занимает слишком много места.

5. Оптимальное решение задачи оценки потока на ненаблюдаемой части сети

Рассмотрим случай $|M| = 1$ и установим сенсор в узел 5. В силу особенностей реализации алгоритма перенумеруем узлы в графе G так, чтобы обозреваемые узлы имели максимальные номера, т.е. изменим номер узла 5 на 9, а узла 9 на 5 и получим орграф $G' = (I', U'), I' = I$, $U' = \{(1,2),(2,1),(1,9),(9,1),(2,8),(8,2),(3,4),(4,3),(3,8),(8,3),(4,7),(7,4),(8,9),(9,8),(7,6),$ $(6,7),(2,9),(9,2),(6,4),(4,6),(5,6),(6,5),(5,9),(9,5),(5,2),(2,5),(3,9),(9,3)\}$ (см. рисунок 7). В результате множество оборзреваемых узлов соситоит из узла 9, $M' = \{9\}$.

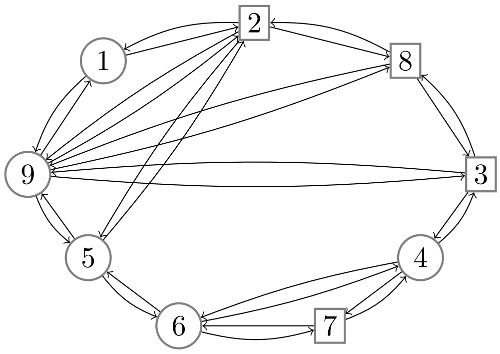

Рис. 7: Орграф $G' = (I', U')$

Удалим узлы $i \in M'$ из орграфа G' и дуги, исходящие и входящие в узел 9 (см. рисунок 8). Согласно [2], построим разрез $CC(M') = \{(1,9),(9,1),(8,9),(9,8),(2,9),(9,2),(5,9),(9,5),(3,9),$ $(9,3)\}$, найдем $I(CC(M')) = \{1,2,3,5,8,9\}$, построим $M^+ = I(CC(M')) \setminus M = \{1,2,3,5,8\}$, сформируем множества $M^* = M \cup M^+ = \{1,2,3,5,8,9\}$ и $\widetilde{I}' = I \setminus M^* = \{4,6,7\}$.

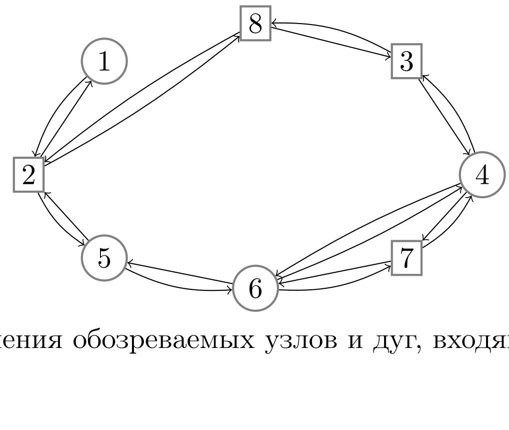

Рис. 8: Орграф после удаления обозреваемых узлов и дуг, входящих и исходящих из узла 9

Удалим дуги, исходящие из узлов $i \in M^+$, т.к. поток на них известен и получим орграф $\overline{G} = (\overline{I}, \overline{U})$, $\overline{I} = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $\overline{U} = \{(4,3),(4,7),(7,4),(7,6),(6,7),(6,4),(4,6),(6,5)\}$ (см. рисунок 9) [2].

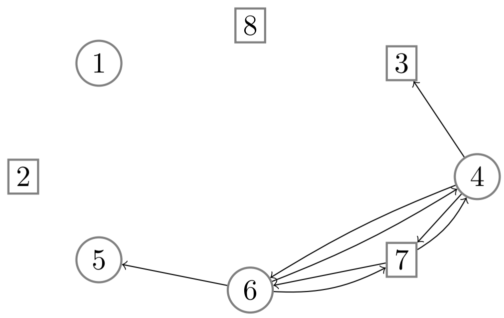

Рис. 9: Орграф $\overline{G}$

Дополним орграф $\overline{G} = (\overline{I}, \overline{U})$ узлом ξ и дугами $(\xi,2),(\xi,3),(\xi,7),(\xi,8)$, получим орграф $\widehat{G} = (\widehat{I}, \widehat{U}), \widehat{I} = \overline{I} \cup \{\xi\}, \widehat{U} = \overline{U} \cup \{(\xi,2),(\xi,3),(\xi,7),(\xi,8)\}$ и построим его опору T (на рисунке 10 опора полученного орграфа отмечена жирными дугами).

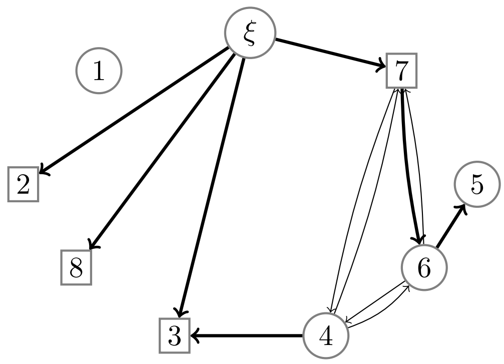

Рис. 10: Орграф $\widehat{G}$ с помеченной опорой для системы (10)

Заметим, что узел 1 принадлежит отдельной компоненте связности. Это означает, что при условии корректности выходных данных выполняется условие

$$\frac{f_{2,9}p_{2,1}}{p_{2,9}} + f_{9,1} = f_{1,9}\left(\frac{p_{1,2}}{p_{1,9}} + 1\right),$$

дуговые потоки, связанные с узлом 1, определены. Необходимо решить задачу оценки потока для второй компоненты связности. Для опоры орграфа выберем узел ξ в качестве корня и построим корневые и вспомогательные структуры (см. таблицу 6).

Таблица 6. Корневые структуры для хранения T

i	2	3	4	5	6	7	8	ξ
$pred[i]$	ξ	ξ	3	6	7	ξ	ξ	0
$dir[i]$	1	1	-1	1	1	1	1	0
$depth[i]$	1	1	2	3	2	1	1	0
$d[i]$	8	4	7	ξ	5	6	3	2

Для орграфа $\widehat{G}$ вычислим $a_i, i \in \overline{I}$, запишем систему уравнений баланса:

$$
\begin{gathered}
x_{\xi,2} = \frac{f_{2,9}\left(p_{2,1}+p_{2,5}+p_{2,8}+p_{2,9}\right)}{p_{2,9}} - \frac{f_{1,9}p_{1,2}}{p_{1,9}} - \frac{f_{5,9}p_{5,2}}{p_{5,9}} - \frac{f_{8,9}p_{8,2}}{p_{8,9}} - f_{9,2},\\
x_{\xi,8} = \frac{f_{8,9}\left(p_{8,2}+p_{8,3}+p_{8,9}\right)}{p_{8,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,8}}{p_{2,9}} - \frac{f_{3,9}p_{3,8}}{p_{3,9}} - f_{9,8},\\
x_{\xi,3} + x_{4,3} = \frac{f_{3,9}\left(p_{3,4}+p_{3,8}+p_{3,9}\right)}{p_{3,9}} - \frac{f_{8,9}p_{8,3}}{p_{8,9}} - f_{9,3},\\
-x_{4,3} - x_{4,6} - x_{4,7} + x_{6,4} + x_{7,4} = -\frac{f_{3,9}p_{3,4}}{p_{3,9}},\\
x_{\xi,7} + x_{4,7} + x_{6,7} - x_{7,4} - x_{7,6} = 0,\\
x_{4,6} - x_{6,4} - x_{6,5} - x_{6,7} + x_{7,6} = -\frac{f_{5,9}p_{5,6}}{p_{5,9}},\\
x_{6,5} = \frac{f_{5,9}\left(p_{5,2}+p_{5,6}+p_{5,9}\right)}{p_{5,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,5}}{p_{2,9}} - f_{9,5},\\
-x_{\xi,2} - x_{\xi,3} - x_{\xi,7} - x_{\xi,8} = -f_{1,9} - f_{2,9} - f_{3,9} - f_{5,9} - f_{8,9} + f_{9,1} + f_{9,2}+\\
+f_{9,3} + f_{9,5} + f_{9,8}.
\end{gathered}
\tag{10}
$$

Положим неопорные потоки равными 0 и построим частное решение системы (10):

$$
\begin{gathered}
\tilde{x}_{4,6} \to 0,\ \tilde{x}_{4,7} \to 0,\ \tilde{x}_{6,4} \to 0,\ \tilde{x}_{6,7} \to 0,\ \tilde{x}_{7,4} \to 0,\ \tilde{x}_{4,3} \to \frac{f_{3,9}p_{3,4}}{p_{3,9}},\\
\tilde{x}_{6,5} \to \frac{f_{5,9}\left(p_{5,2}+p_{5,6}+p_{5,9}\right)}{p_{5,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,5}}{p_{2,9}} - f_{9,5},\\
\tilde{x}_{7,6} \to \frac{f_{5,9}\left(p_{5,2}+p_{5,6}+p_{5,9}\right)}{p_{5,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,5}}{p_{2,9}} - \frac{f_{5,9}p_{5,6}}{p_{5,9}} - f_{9,5},\\
\tilde{x}_{9,2} \to \frac{f_{2,9}\left(p_{2,1}+p_{2,5}+p_{2,8}+p_{2,9}\right)}{p_{2,9}} - \frac{f_{1,9}p_{1,2}}{p_{1,9}} - \frac{f_{5,9}p_{5,2}}{p_{5,9}} - \frac{f_{8,9}p_{8,2}}{p_{8,9}} - f_{9,2},\\
\tilde{x}_{9,3} \to \frac{f_{3,9}\left(p_{3,4}+p_{3,8}+p_{3,9}\right)}{p_{3,9}} - \frac{f_{3,9}p_{3,4}}{p_{3,9}} - \frac{f_{8,9}p_{8,3}}{p_{8,9}} - f_{9,3},\\
\tilde{x}_{9,7} \to \frac{f_{5,9}\left(p_{5,2}+p_{5,6}+p_{5,9}\right)}{p_{5,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,5}}{p_{2,9}} - \frac{f_{5,9}p_{5,6}}{p_{5,9}} - f_{9,5},\\
\tilde{x}_{9,8} \to \frac{f_{8,9}\left(p_{8,2}+p_{8,3}+p_{8,9}\right)}{p_{8,9}} - \frac{f_{2,9}p_{2,8}}{p_{2,9}} - \frac{f_{3,9}p_{3,8}}{p_{3,9}} - f_{9,8}.
\end{gathered}
$$

Характеристические векторы $\delta_{ij}(\tau,\rho)$ приведены в таблице 7.

Таблица 7. Характеристические векторы

	$\delta_{4,3}$	$\delta_{4,7}$	$\delta_{7,4}$	$\delta_{7,6}$	$\delta_{6,7}$	$\delta_{6,4}$	$\delta_{4,6}$	$\delta_{6,5}$	$\delta_{\xi,2}$	$\delta_{\xi,3}$	$\delta_{\xi,7}$	$\delta_{\xi,8}$
(4,7)	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0
(7,4)	1	0	1	0	0	0	0	0	0	-1	1	0
(6,7)	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
(6,4)	1	0	0	1	0	1	0	0	0	-1	1	0
(4,6)	-1	0	0	-1	0	0	1	0	0	1	-1	0

Общее решение однородной системы, порожденной из системы (10), в силу слишком большого размера не приводится. Система дополнительных уравнений имеет вид:

$$
\begin{gathered}
x_{4,3} - \frac{p_{4,7}x_{4,7}}{p_{4,3}} = 0,\ x_{4,3} - \frac{p_{4,6}x_{4,6}}{p_{4,3}} = 0,\\
x_{6,7} - \frac{p_{6,4}x_{6,4}}{p_{6,7}} = 0,\ x_{6,7} - \frac{p_{6,5}x_{6,5}}{p_{6,7}} = 0,\\
x_{7,4} - \frac{p_{7,6}x_{7,6}}{p_{7,4}} = 0.
\end{gathered}
\tag{11}
$$

Матрица Λ системы (11) имеет вид:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\frac{p_{4,7}}{p_{4,3}} - 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -\frac{p_{4,6}}{p_{4,3}} - 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{p_{6,4}}{p_{6,7}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{p_{7,6}}{p_{7,4}} & -\frac{p_{7,6}}{p_{7,4}} & \frac{p_{7,6}}{p_{7,4}} \end{pmatrix}.$$

Так как $rank(\Lambda) = 5$ и число неопорных дуг равно 5, то система имеет единственное решение. Соответственно выберем $\widehat{U}_W = \widehat{U}_{\neg T}$, тогда $\widehat{U}_{\neg T} \setminus \widehat{U}_W = \varnothing$. Таким образом $\Lambda_W = \Lambda$. Вычислим определитель матрицы Λ_W

$$det(\Lambda_W) = -\frac{p_{6,4}\left(p_{4,6}p_{4,7}p_{7,4} + p_{4,3}\left(p_{4,6}p_{7,4} + p_{4,7}\left(p_{7,4} + p_{7,6}\right)\right)\right)}{p_{4,3}^2 p_{6,7} p_{7,4}}.$$

Т.к. $p_{ij} > 0$, то в выражении $det(\Lambda_W)$ все слагаемые строго положительны, следовательно, $det(\Lambda_W) \neq 0$, матрица Λ_W — невырожденная. Общее решение систем (10), (11) может быть получено по описанным выше правилам. Таким образом показано, что оптимальное решение задачи расположения сенсоров для графа G, изображенного на рисунке 1, достигается при одном обозреваемом узле $M = \{5\}$.

В таблице 8 представлены численные результаты построения оптимального решения с использованием матричного метода [4] и методов декомпозиции.

Таблица 8. Численные результаты

$\lvert I\rvert$	$\lvert U\rvert$	$\lvert I^*\rvert$	t_1, c	t_2, c	t_1/t_2
50	100	8	4.88453	0.603545	8.028
75	300	16	117.496	0.605637	193.888
100	300	20	121.02	0.386653	312.713
200	800	48	2215.2	2.97976	743.416
1000	4000	64	5391.43	66.3283	81.284
5000	20000	120	8945.6	181.6341	49.251

Численные результаты решения задачи оценки потоков на ненаблюдаемой части двунаправленной сети показали практическую применимость методов декомпозиции.

Литература

1. *Bianco L., Confessore G., Reverberi P.* A network based model for traffic sensor location with implication in O/D matrix estimates. *Transportation Science.* No. 35 (2001), 50–60.

2. *Pilipchuk L. A. Sparce Linear Systems and Their Applications.* Minsk: BSU, 2013.

3. *Пилипчук, Л.А., Пилипчук А.С., Полячок Е.Н., Фаразей А.И.* Идентификация сенсорной конфигурации и управление потоками. *Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика.* No. 2 (2018), 67–76.

4. *Bianco L., Confessore G., Gentili M.* Combinatorial aspects of the sensor location problem. *Annals of Operation Research.* No. 144 (2006), 201–234.

УДК 517.936+531.314.3

ОБ АБСОЛЮТНОМ ПОЛНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ ИНВАРИАНТЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

А. Ф. Проневич

e-mail: pranevich@grsu.by

В работе для системы уравнений в полных дифференциалах дан обзор результатов, связанных с построением их интегральных инвариантов. Установлено взаимно однозначное соответствие между существованием абсолютного интегрального инварианта полного порядка и последним множителем Якоби, доказан аналог теоремы Ж. Лиувилля о сохранении величины фазового объема. Для гамильтоновых систем уравнений в полных дифференциалах полученные утверждения конкретизированы.

Ключевые слова: *система в полных дифференциалах; гамильтонова дифференциальная система; абсолютный интегральный инвариант полного порядка; последний множитель.*

ON ABSOLUTE TOTAL INTEGRAL INVARIANT FOR SYSTEM OF TOTAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

A. F. Pranevich

e-mail: pranevich@grsu.by

In this paper, we consider systems of total differential equations. A survey of the results on construction of integral invariants of these systems. The one-to-one correspondence between the existence of total absolute integral invariant and Jacobi's last multiplier is obtained, the analogue of Liouville's theorem about invariance of the volume in the phase space is proved. For Hamiltonian systems in total differentials these statements are concretized.

Keywords: *system of total differential equations; Hamiltonian differential system; total absolute integral invariant; last multiplier.*

Mathematics Subject Classification (2020): Primary 37C79, Secondary 37J06.

1. Введение и постановка задачи

Теория интегральных инвариантов была заложена Анри Пуанкаре в работе «*О проблеме трех тел и уравнениях динамики*» [1] и позднее в расширенном виде изложена им в книге «*Новые методы небесной механики*» [2]. При этом важные конкретные примеры интегральных инвариантов были известны и ранее (например, теоремы У. Томсона и Г.Л.Ф. Гельмгольца из гидродинамики о сохранении циркуляции и потока вихря [3, с. 122–127]).

Интегральным инвариантом k-го порядка дифференциальной системы

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(t, x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n, \quad X_i \in C^1(D), \quad D = \mathcal{T} \times G \subset \mathbb{R}^{1+n},$$

следуя [2, с. 13], будем называть k-кратный интеграл

$$I_k = \overbrace{\int \ldots \int}^{k}_{V^k} \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n} J_{i_1 \ldots i_k}(t, x_1, \ldots, x_n)\, \delta x_{i_1} \ldots \delta x_{i_k},$$

который сохраняет постоянное значение в процессе движения точек многообразия V^k вдоль интегральных кривых этой дифференциальной системы. Здесь V^k есть произвольное многообразие размерности $k \leq n$ из области G фазового пространства $\mathbb{R}^n$, на котором параметр t имеет постоянное значение. Интегральный инвариант называется *абсолютным*, если свойство инвариантности имеет место для любых областей интегрирования, и *относительным*, если это свойство имеет место только для замкнутых областей.

А. Пуанкаре установил связь между относительными интегральными инвариантами k-го порядка и абсолютными $(k+1)$-го порядка, а также связал теорию интегральных инвариантов с теорией первых интегралов систем уравнений в вариациях и с теорией последнего множителя Якоби. Он широко применял интегральные инварианты для изучения движения небесных тел, и в частности, для изучения устойчивости асимптотических и двояко-асимптотических движений в задаче трех тел. Наконец, А. Пуанкаре указал на интегральные инварианты как на одно из эффективных средств проверки решений задачи трех тел, получающихся в форме рядов после трудоемких вычислений. Подводя итоги своих научных трудов А. Пуанкаре отметил [4; 5, с. 579–663], что гамильтоновы обыкновенные дифференциальные системы

$$\frac{dq_i}{dt} = \partial_{p_i} H(t,q,p), \quad \frac{dp_i}{dt} = -\partial_{q_i} H(t,q,p), \quad i = 1,\ldots,n, \quad H \in C^2(D), \ \ D \subset \mathbb{R}^{2n+1},$$

обладают универсальными инвариантами (имеют место для любой гамильтоновой системы)

$$I_1 = \oint \sum_{i=1}^{n} p_i\,\delta q_i\,, \quad I_2 = \iint \sum_{i=1}^{n} \delta p_i\,\delta q_i\,,$$

$$I_3 = \oint\oint\oint \sum_{i_1,i_2=1}^{n} p_{i_1}\,\delta q_{i_1}\,\delta p_{i_2}\,\delta q_{i_2}\,, \quad I_4 = \iiiint \sum_{i_1,i_2=1}^{n} \delta p_{i_1}\,\delta q_{i_1}\,\delta p_{i_2}\,\delta q_{i_2}\,, \quad \ldots,$$

$$I_{2n-1} = \overbrace{\oint \ldots \oint}^{2n-1} \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{n} p_{i_1}\,\delta q_{i_1} \ldots \delta p_{i_n}\,\delta q_{i_n}\,, \quad I_{2n} = \overbrace{\int \ldots \int}^{2n} \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{n} \delta p_{i_1}\,\delta q_{i_1} \ldots \delta p_{i_n}\,\delta q_{i_n}\,,$$

которые «проливают яркий свет» на свойства этих дифференциальных систем. Это обстоятельство сразу привлекло внимание ученых к теории интегральных инвариантов. Так, бельгийский математик Т. Дондер в 1901 году доказал [6] обратную теорему теории интегральных инвариантов о том, что если обыкновенная дифференциальная система $2n$-го порядка

$$\frac{dq_i}{dt} = X_i(t,q,p), \qquad \frac{dp_i}{dt} = Y_i(t,q,p), \quad i = 1,\ldots,n,$$

имеет интегральный инвариант Пуанкаре I_1, то она является гамильтоновой.

Французский математик и астроном Ж. Шази в работе [7] методом интегральных инваринтов вслед за А. Пуанкаре еще раз анализирует проблему трех тел и приходит к новым интересным результатам (см., например, научный обзор В.М. Алексеева в статье [8]). В частности, из конечности интегральных инвариантов Ж. Шази делает вывод об устойчивости движения. В ряде работ Т. Дондера, Р. Донто, Э. Вессио были рассмотрены интегральные инварианты термодинамики, оптики, гидродинамики и общей теории относительности [9–13].

Дальнейшее развитие теории интегральных инвариантов связано с работами французского математика Э. Картана [14–17], который при изучении дифференциальных уравнений, допускающих данные преобразования, пришел к рассмотрению некоторых дифференциальных выражений, названных им интегральными формами: они характеризуются тем свойством, что могут быть выражены через первые интегралы данных дифференциальных уравнений и через их дифференциалы. Оказалось, что понятие интегральной формы не отличается существенно от понятия интегрального инварианта. Сопоставляя эти два понятия Э. Картан в работе «Лекции об интегральных инвариантах» [15, 16] с помощью метода внешних форм завершил построение теории интегральных инвариантов, основанной А. Пуанкаре. При этом общая теория интегральных инвариантов, развитая Э. Картаном, была применена им к проблеме трех тел, к задаче о распространению света в однородной среде, а также, к другим задачам механики и математической физики. Отметим также и то, что результаты, приведенные в книге [15, 16], оказали существенное влияние на геометрическую теорию дифференциальных уравнений и особенно на теорию гамильтоновых систем (см., например, [18–22]).

В 1947 году китайский ученый Ли Хуа-Чжун доказал [23; 24, с. 305–311] единственность универсальных интегральных инвариантов $I_k,\ k=1,\ldots,2n$, для гамильтоновых обыкновенных дифференциальных систем. Он показал, что всякий другой универсальный интегральный инвариант отличается постоянным множителем от одного из интегралов $I_k,\ k=1,\ldots,2n$.

Советский механик В.В. Добронравов распространил теорию интегральных инвариантов на неголономные системы референции [25] и нашел, используя теорему Пуанкаре о связи между последним множителем Якоби и интегральным инвариантом, последний множитель Якоби для канонических дифференциальных уравнений в неголономных координатах в виде определителя от матрицы перехода от голономных координат к неголономным.

Для задач небесной механики А. Вилькенсом в 1955 году была построена [26] система интегральных инвариантов теории возмущения для достижения контроля численного решения задачи. Эти исследования дали важные результаты при изучении движения астероидов и комет (см., например, работы [26; 27, с. 98–99]). Применение теории интегральных инвариантов к задаче n тел, построению новых локальных первых интегралов и изучению устойчивости движений посвящены работы французского механика Л. Лоско [28–30].

Использование интегральных инвариантов позволяет не только исследовать движение динамических систем, но и получать новые соотношения между специальными функциями, описывающими решения этих динамических систем. Так, например, Ю.П. Сурков в 1975 году изучая [31] интегральные инварианты физического маятника установил новые интегральные соотношения между эллиптическими функциями Якоби.

В 1998 году академиком В.В. Козловым в работе «*Интегральные инварианты после Пуанкаре и Картана*» [32] сделан обзор литературы и научных результатов по теории интегральных инвариантов, полученных после классических работ А. Пуанкаре и Э. Картана.

В данной работе теория интегральных инвариантов порядка n для обыкновенных дифференциальных систем распространена на системы уравнений в полных дифференциалах

$$dx_i = \sum_{j=1}^{m} X_{ij}(t,x)\,dt_j\,, \quad i=1,\ldots,n, \tag{1.1}$$

где функции $X_{ij}\colon D\to\mathbb{R},\ i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,m$, непрерывно дифференцируемы на области $D=\mathcal{T}\times G,\ \mathcal{T}\in\mathbb{R}^m,\ G\in\mathbb{R}^n$, из расширенного фазового пространства $\mathbb{R}^{n+m}$.

Система (1.1) индуцирует линейные дифференциальные операторы первого порядка

$$\mathfrak{X}_j(t,x) = \partial_{t_j} + \sum_{i=1}^{n} X_{ij}(t,x)\,\partial_{x_i} \quad \forall (t,x)\in D, \quad j=1,\ldots,m.$$

Систему уравнений в полных дифференциалах (1.1) назовем *вполне разрешимой* на области D, если в любой точке $(t_0,x_0)\in D$ решение задачи Коши с начальными данными (t_0,x_0) единственно [33, с. 17; 34, с. 21]. Система (1.1) вполне разрешима тогда и только тогда, когда выполняются условия Фробениуса [33, с. 19; 34, с. 113], которые с помощью скобок Пуассона дифференциальных операторов $\mathfrak{X}_j$ выражаются системой тождеств [33, с. 112–113]

$$\big[\mathfrak{X}_j(t,x),\mathfrak{X}_\xi(t,x)\big] = \mathfrak{O} \quad \forall (t,x)\in D, \quad j=1,\ldots,m, \quad \xi=1,\ldots,m, \tag{1.2}$$

где $\mathfrak{O}$ — нулевой линейный дифференциальный оператор первого порядка.

Наряду с дифференциальной системой (1.1) будем рассматривать также гамильтонову систему уравнений в полных дифференциалах [35–37]

$$dq_i = \sum_{j=1}^{m} \partial_{p_i} H_j(t,q,p)\, dt_j\,, \qquad dp_i = -\sum_{j=1}^{m} \partial_{q_i} H_j(t,q,p)\, dt_j\,, \quad i = 1,\ldots,n, \tag{1.3}$$

с дважды непрерывно дифференцируемыми на области $\widetilde{D}$ из пространства $\mathbb{R}^{2n+m}$ гамильтонианами $H_j\colon \widetilde{D} \to \mathbb{R},\ j=1,\ldots,m$, которая индуцирует линейные дифференциальные операторы

$$\mathfrak{G}_j(t,q,p) = \partial_{t_j} + \sum_{i=1}^{n} \big(\partial_{p_i} H_j(t,q,p)\, \partial_{q_i} - \partial_{q_i} H_j(t,q,p)\, \partial_{p_i}\big) \quad \forall (t,q,p)\in \widetilde{D}, \quad j=1,\ldots,m.$$

Гамильтонову систему (1.3) можно представить в виде системы (1.1), состоящей из $2n$ дифференциальных уравнений, положив, что переменные $x_i = q_i,\ x_{n+i} = p_i,\ i=1,\ldots,n$, а функции на области $\widetilde{D}$ имеют вид

$$X_{ij}\colon (t,x) \to \partial_{p_i} H_j(t,q,p), \quad X_{n+i,j}\colon (t,x) \to -\partial_{q_i} H_j(t,q,p), \quad i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,m.$$

Для системы уравнений в полных дифференциалах (1.1) установлено взаимно однозначное соответствие (теорема 2.1) межу существованием абсолютного интегрального инварианта полного порядка и последним множителем Якоби, а также доказан аналог теоремы Ж. Лиувилля о сохранении величины фазового объема (теорема 2.2). Для гамильтоновых систем уравнений в полных дифференциалах (1.3) полученные в работе утверждения (теоремы 2.1 и 2.2) конкретизированы (следствия 2.1 и 2.2).

2. Интегральные инварианты системы

Рассмотрим n-кратный интеграл от дифференциальной n-формы

$$I_n = \int\limits_{V^n} \mu(t,x)\, \delta x_1 \wedge \ldots \wedge \delta x_n\,, \tag{2.1}$$

где $\mu\colon D' \to \mathbb{R}$ есть непрерывно дифференцируемая на области $D' \subset D$ скалярная функция, а V^n — произвольное гладкое n-мерное многообразие из области $G' \subset G$ фазового пространства $\mathbb{R}^n$ такое, что кратный интеграл (2.1) существует.

Теория интегральных инвариантов полного порядка (порядок равен n) систем уравнений в полных дифференциалах тесно связана с теорией последнего множителя Якоби этих дифференциальных систем. Более точно имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Интеграл* (2.1) *будет абсолютным интегральным инвариантом полного порядка системы в полных дифференциалах* (1.1)*, если и только если функция* $\mu\colon D' \to \mathbb{R}$ *будет последним множителем Якоби системы в полных дифференциалах* (1.1).

Доказательство. С учетом того, что V^n есть произвольное гладкое n-мерное многообразие из области G', получаем, что кратный интеграл (2.1) будет абсолютным интегральным инвариантом порядка n системы уравнений в полных дифференциалах (1.1) тогда и только тогда, когда имеет место тождество

$$d\big(\mu(t,x)\, \delta x_1 \wedge \ldots \wedge \delta x_n\big) = 0 \quad \forall (t,x)\in D'$$

или тождество

$$d\mu(t,x)\, \delta x_1 \wedge \ldots \wedge \delta x_n + \mu(t,x) \sum_{i=1}^{n} \delta x_1 \wedge \ldots \wedge \delta x_{i-1} \wedge d(\delta x_i) \wedge \delta x_{i+1} \wedge \ldots \wedge \delta x_n = 0 \quad \forall (t,x)\in D'.$$

Отсюда, на основании того, что дифференциал в силу системы уравнений в полных дифференциалах (1.1) скалярной функции $\mu\colon D' \to \mathbb{R}$ равен

$$d\,\mu(t,x)=\sum_{j=1}^{m}\mathfrak{X}_j\,\mu(t,x)\,dt_j\quad \forall (t,x)\in D'$$

и вариации координат являются изохронными, а значит, $d\,(\delta x_i)=\delta\,(dx_i),\ i=1,\dots,n$, то

$$\sum_{j=1}^{m}\mathfrak{X}_j\,\mu(t,x)\,dt_j\ \delta x_1\wedge\ldots\wedge\delta x_n+\mu(t,x)\sum_{i=1}^{n}\delta x_1\wedge\ldots\wedge\delta x_{i-1}\wedge\delta(dx_i)\wedge\delta x_{i+1}\wedge\ldots\wedge\delta x_n=0.$$

или, с учетом системы уравнений в полных дифференциалах (1.1), на области D' имеем

$$\sum_{j=1}^{m}\mathfrak{X}_j\,\mu(t,x)\,dt_j\ \delta x_1\wedge\ldots\wedge\delta x_n+\mu(t,x)\sum_{i=1}^{n}\delta x_1\wedge\ldots\wedge\delta x_{i-1}\wedge\delta\sum_{j=1}^{m}X_{ij}(t,x)\,dt_j\wedge\delta x_{i+1}\wedge\ldots\wedge\delta x_n=0.$$

Так как вариации

$$\delta X_{ij}(t,x)=\sum_{k=1}^{n}\partial_{x_k}X_{ij}(t,x)\,\delta x_k\quad \forall (t,x)\in D,\quad i=1,\dots,n,\quad j=1,\dots,m,$$

переменные $t_j,\ j=1,\dots,m$, независимы, а $\delta x_i\wedge\delta x_i=0,\ i=1,\dots,n$, то на области D'

$$\sum_{j=1}^{m}\Bigg(\mathfrak{X}_j\,\mu(t,x)\,\delta x_1\wedge\ldots\wedge\delta x_n+$$

$$+\ \mu(t,x)\sum_{i=1}^{n}\delta x_1\wedge\ldots\wedge\delta x_{i-1}\wedge\sum_{k=1}^{n}\partial_{x_k}X_{ij}(t,x)\,\delta x_k\wedge\delta x_{i+1}\wedge\ldots\wedge\delta x_n\Bigg)dt_j=0$$

или

$$\Bigg(\mathfrak{X}_j\,\mu(t,x)+\mu(t,x)\sum_{i=1}^{n}\partial_{x_i}X_{ij}(t,x)\Bigg)\,\delta x_1\wedge\ldots\wedge\delta x_n=0\quad \forall (t,x)\in D',\quad j=1,\dots,m,$$

а значит,

$$\mathfrak{X}_j\,\mu(t,x)+\mu(t,x)\operatorname{div}\mathfrak{X}_j(t,x)=0\quad \forall (t,x)\in D',\quad j=1,\dots,m.$$

Отсюда, основываясь на определении последнего множителя системы уравнений в полных дифференциалах, заключаем, что имеет место утверждение теоремы 2.1.

С учетом того, что для любой гамильтоновой системы уравнений в полных дифференциалах (1.3) функция $\mu\colon (t,q,p)\to 1\ \ \forall (t,q,p)\in\widetilde{D}$ является последним множителем этой системы, на основании теоремы 2.1, устанавливаем следующее утверждение.

Следствие 2.1. *Гамильтонова система уравнений в полных дифференциалах* (1.3) *допускает универсальный абсолютный интегральный инвариант полного порядка*

$$I_{2n}=\int\limits_{V^{2n}}\delta q_1\wedge\ldots\wedge\delta q_n\wedge\delta p_1\wedge\ldots\wedge\delta p_n\,,$$

где V^{2n} — произвольное гладкое $2n$-мерное многообразие такое, что интеграл существует.

Для обыкновенных дифференциальных систем утверждения аналогичные теореме 2.1 и следствию 2.1 установлены в [2, с. 44–46]. Аналогом теоремы Ж. Лиувилля о сохранении величины фазового объема [38, с. 180–184] на многомерный случай является

Теорема 2.2. *Пусть вполне разрешимая система в полных дифференциалах* (1.1)–(1.2) *такова, что расходимости ее операторов равны нулю на области D, т.е. верны тождества*

$$\operatorname{div}\mathfrak{X}_j(t,x)=0\quad \forall (t,x)\in D,\quad j=1,\dots,m. \tag{2.2}$$

Тогда на решениях этой дифференциальной системы сохраняется величина фазового объема.

Доказательство. Так как система уравнений в полных дифференциалах (1.1) является вполне разрешимой на области D из расширенного пространства $\mathbb{R}^{n+m}$, то задача Коши для системы (1.1) с произвольными начальными данными $(t_0, x_0) \in D$ имеет единственное решение

$$x\colon t \to \varphi(t; t_0, x_0) \quad \forall t \in \mathcal{T}_{(t_0,x_0)} \subset \mathcal{T}.$$

Зафиксируем начальное значение t_0 независимой переменной t и будем изменять начальные значения x_0 зависимой переменной x на некоторой ограниченной области $G_{t_0} \subset G$ фазового пространства $\mathbb{R}^n$. Получим параметрическое семейство решений вполне разрешимой системы уравнений в полных дифференциалах (1.1), заданное векторной функцией

$$x\colon (t, x_0) \to \varphi(t; t_0, x_0) \quad \forall t \in \mathcal{T}_{(t_0,x_0)}, \quad \forall x_0 \in G_{t_0}. \tag{2.3}$$

Отображение (2.3) при каждом $t \in \mathcal{T}_{(t_0,x_0)}$ устанавливает диффеоморфизм между областями G_{t_0} и $G_t = \{x\colon x = \varphi(t; t_0, x_0) \ \ \forall x_0 \in G_{t_0}\}$ фазового пространства $\mathbb{R}^n$.

Пусть V_0 есть объем области G_{t_0}, а $V(t)$ есть объем области G_t. Тогда

$$V_0 = \overbrace{\int\limits_{G_{t_0}} \ldots \int}^{n} dx_{10} \ldots dx_{n0}, \qquad x_0 = (x_{10}, \ldots, x_{n0}),$$

а

$$V(t) = \overbrace{\int\limits_{G_t} \ldots \int}^{n} dx_1 \ldots dx_n, \qquad x = (x_1, \ldots, x_n). \tag{2.4}$$

Используя формулу замены переменных для кратных интегралов перейдем в n-кратном интеграле (2.4) от переменных x к переменным x_0:

$$V(t) = \overbrace{\int\limits_{G_{t_0}} \ldots \int}^{n} J(t, x_0)\, dx_{10} \ldots dx_{n0},$$

где якобиан преобразования

$$J(t, x_0) = \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(x_{10}, \ldots, x_{n0})}\,(t, x_0) = \frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(x_{10}, \ldots, x_{n0})}\,(t, x_0) =$$

$$= \begin{vmatrix} \partial_{x_{10}}\varphi_1(t; t_0, x_0) & \ldots & \partial_{x_{n0}}\varphi_1(t; t_0, x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \partial_{x_{10}}\varphi_n(t; t_0, x_0) & \ldots & \partial_{x_{n0}}\varphi_n(t; t_0, x_0) \end{vmatrix} \quad \forall t \in \mathcal{T}_{(t_0,x_0)}, \quad \forall x_0 \in G_{t_0}.$$

Если $t = t_0$, то из задания отображения (2.3) следует, что $\varphi(t_0; t_0, x_0) = x_0 \ \ \forall x_0 \in G_{t_0}$, а значит, якобиан $J(t_0, x_0) = 1 \ \ \forall x_0 \in G_{t_0}$ и объем $V(t_0) = V_0$.

Покажем, что при выполнении для системы (1.1) тождеств (2.2) имеет место тождество $V(t) = V_0 \ \ \forall t \in \mathcal{T}_{(t_0,x_0)}$, т.е. функция $V(t)$ не зависит от переменной t (является постоянной).

По теореме о дифференцируемости кратного интеграла по параметру [39, с. 298] имеем:

$$\partial_{t_j} V(t) = \overbrace{\int \ldots \int}^{n}_{G_{t_0}} \partial_{t_j} J(t, x_0)\, dx_{10} \ldots dx_{n0} \quad \forall t \in \mathcal{T}_{(t_0, x_0)}, \quad j = 1, \ldots, m.$$

На основании правила дифференцирования определителей получаем, что

$$\partial_{t_j} J(t, x_0) = \sum_{i=1}^{n} J_{ij}(t, x_0) \quad \forall t \in \mathcal{T}_{(t_0, x_0)}, \quad \forall x_0 \in G_{t_0}, \quad j = 1, \ldots, m,$$

где определители n-го порядка J_{ij}, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, равны

$$J_{ij}(t, x_0) = \begin{vmatrix} \partial_{x_{10}} \varphi_1(t; t_0, x_0) & \ldots & \partial_{x_{n0}} \varphi_1(t; t_0, x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \partial_{t_j} \bigl(\partial_{x_{10}} \varphi_i(t; t_0, x_0)\bigr) & \ldots & \partial_{t_j} \bigl(\partial_{x_{n0}} \varphi_i(t; t_0, x_0)\bigr) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \partial_{x_{10}} \varphi_n(t; t_0, x_0) & \ldots & \partial_{x_{n0}} \varphi_n(t; t_0, x_0) \end{vmatrix} \quad \forall t \in \mathcal{T}_{(t_0, x_0)}, \quad \forall x_0 \in G_{t_0},$$

и получены из определителя J в результате замены его i-ой строки на строку

$$\Bigl(\partial_{t_j} \bigl(\partial_{x_{10}} \varphi_i(t; t_0, x_0)\bigr), \ldots, \partial_{t_j} \bigl(\partial_{x_{n0}} \varphi_i(t; t_0, x_0)\bigr)\Bigr), \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m.$$

При этом, так как функции (2.3) являются решениями вполне разрешимой системы в полных дифференциалах (1.1) с функциями $X_{ij} \in C^1(D)$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, то

$$\partial_{t_j} \bigl(\partial_{x_{\xi 0}} \varphi_i(t; t_0, x_0)\bigr) = \partial_{x_{\xi 0}} \bigl(\partial_{t_j} \varphi_i(t; t_0, x_0)\bigr) = \partial_{x_{\xi 0}} X_{ij}\bigl(t, \varphi(t; t_0, x_0)\bigr) =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \partial_{x_l} X_{ij}(t, x)\big|_{x = \varphi(t; t_0, x_0)} \partial_{x_{\xi 0}} \varphi_l(t; t_0, x_0) \quad \forall t \in \mathcal{T}_{(t_0, x_0)}, \ \forall x_0 \in G_{t_0}, \ \xi, i = 1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, m.$$

С учетом этих тождеств в каждом из определителей J_{ij}, $i = 1, \ldots, n$, умножим l-ые строки $(l \neq i)$, $l = 1, \ldots, n$, на $\partial_{x_l} X_{ij}(t, x)\big|_{x = \varphi(t; t_0, x_0)}$ и вычтем эти строки из i-ой строки. Тогда с учетом того, что определитель не изменится, если от элементов некоторой строки вычесть соответствующие элементы другой строки, предварительно умножив их на один и тот же множитель, получим, что

$$J_{ij}(t, x_0) = \begin{vmatrix} \partial_{x_{10}} \varphi_1(t; t_0, x_0) & \ldots & \partial_{x_{n0}} \varphi_1(t; t_0, x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \partial_{x_i} X_{ij}(t, x)\big|_{x = \varphi(t; t_0, x_0)} \partial_{x_{10}} \varphi_i(t; t_0, x_0) & \ldots & \partial_{x_i} X_{ij}(t, x)\big|_{x = \varphi(t; t_0, x_0)} \partial_{x_{n0}} \varphi_i(t; t_0, x_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \partial_{x_{10}} \varphi_n(t; t_0, x_0) & \ldots & \partial_{x_{n0}} \varphi_n(t; t_0, x_0) \end{vmatrix} =$$

$$= \partial_{x_i} X_{ij}(t, x)\big|_{x = \varphi(t; t_0, x_0)} J(t, x_0) \quad \forall t \in \mathcal{T}_{(t_0, x_0)}, \quad \forall x_0 \in G_{t_0}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Следовательно,

$$\partial_{t_j} J(t,x_0) = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} X_{ij}(t,x)\big|_{x=\varphi(t;t_0,x_0)} J(t,x_0) \quad \forall t \in \mathcal{T}_{(t_0,x_0)}, \quad \forall x_0 \in G_{t_0}, \quad j=1,\ldots,m.$$

Отсюда, на основании системы тождеств (2.2) имеем

$$\partial_{t_j} J(t,x_0) = 0 \quad \forall t \in \mathcal{T}_{(t_0,x_0)}, \quad \forall x_0 \in G_{t_0}, \quad j=1,\ldots,m,$$

а значит $\partial_{t_j} V(t) = 0 \ \ \forall t \in \mathcal{T}_{(t_0,x_0)}, \ j=1,\ldots,m$, или $V(t) = \mathrm{const}$.

Из того, что $V(t_0) = V_0$ получаем, что объем $V(t) = V_0 \ \ \forall t \in \mathcal{T}_{(t_0,x_0)}$. Теорема доказана.

Из теоремы 2.2 для вполне разрешимых гамильтоновых систем получаем

С л е д с т в и е 2.2. *При перемещении точек фазового объема по траекториям вполне разрешимой гамильтоновой системы уравнений в полных дифференциалах* (1.3) *величина фазового объема не меняется.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение следует из того, что для гамильтоновых систем уравнений в полных дифференциалах расходимости

$$\operatorname{div} \mathfrak{G}_j(t,q,p) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\partial_{q_i} \big(\partial_{p_i} H_j(t,q,p)\big) - \partial_{p_i} \big(\partial_{q_i} H_j(t,q,p)\big) \Big) = 0 \quad \forall (t,q,p) \in \widetilde{D}, \quad j=1,\ldots,m.$$

По следствию 2.2, интеграл, который определяет объем в фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$,

$$I_{2n} = \overbrace{\int \ldots \int}^{2n}_{V(t)} \delta q_1 \ldots \delta q_n \, \delta p_1 \ldots \delta p_n$$

является интегральным инвариантом полного порядка (или интегральным инвариантом Лиувилля) для вполне разрешимой гамильтоновой системы уравнений в полных дифференциалах (1.3). При этом инвариантность понимается в следующем смысле: если каждую точку некоторого начального объема V_0 в фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ перемещать по траекториям вполне разрешимой гамильтоновой системы уравнений в полных дифференциалах, то величина фазового объема $V(t)$, который займут точки к моменту t, не зависит от t, т.е. не меняется.

З а м е ч а н и е. Как отмечено Э.Т. Уиттекером [40, с. 413] интегральные инварианты полного и первого порядков наиболее важны для классической динамики. Изучению интегральных инвариантов первого порядка систем в полных дифференциалах посвящена работа [41]:

— для системы уравнений в полных дифференциалах (1.1) установлены критерии существования абсолютного и относительного линейных интегральных инвариантов первого порядка, приведены необходимые условия существования автономных и цилиндричных по части зависимых и независимых переменных абсолютных линейных интегральных инвариантов первого порядка, установлены аналитические связи между абсолютными линейными интегральными инвариантами и первыми интегралами системы;

— для гамильтоновых систем в полных дифференциалах (1.3) полученные критерии конкретизированы, а также доказано отсутствие универсальных абсолютных линейных интегральных инвариантов первого порядка, отличных от тождественного нуля, и указан аналитический вид универсального относительного линейного интегрального инварианта первого порядка.

Литература

1. *Poincaré H.* Sur le probléme des trois corps et les équations de la dynamique. *Acta Mathematica.* Vol. 13 (1890), 3–270.

2. *Пуанкаре А. Избранные труды в трех томах. Том II. Новые методы небесной механики. Топология. Теория чисел.* М., Наука, 1972.

3. *Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике.* М., Наука, 1966.

4. *Poincaré H.* Analyse de ses travaux scientifiques. *Acta Mathematica.* Vol. 38 (1921), 36–135.

5. *Пуанкаре А. Избранные труды в трех томах. Том III. Математика. Теоретическая физика. Анализ математических и естественнонаучных работ Анри Пуанкаре.* М., Наука, 1974.

6. *Donder Th.De.* Sur les invariants intégraux. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences (France).* Vol. 133, №11 (1901), 129–137.

7. *Chazy J.* Sur l'allure finale du mouvement dans le probléme des trois corps. *Journal de mathématiques pures et appliquées.* Vol. 8 (1929), 353–380.

8. *Алексеев В.М.* Финальные движения в задаче трех тел и символическая динамика. *Успехи математических наук.* Т. 36, No. 4 (1981), 161–176.

9. *Donder Th.De.* Sur le mouvementde la chaleur dans un corps athermane. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences (France).* Vol. 157 (1913), 1400–1403.

10. *Donder Th.De.* Sur les invariants intégraux de l'optique. *Bulletin de la société mathématique de France.* Vol. 42 (1914), 91–95.

11. *Dontot R.* Sur les invariants intégraux et quelques points d'optique géométrique. *Bulletin de la société mathématique de France.* Vol. 42 (1914), 53–91.

12. *Vessiot E.* Sur les invariants intégraux de la propagation par ondes. *Bulletin de la société mathématique de France.* Vol. 42 (1914), 142–167.

13. *Vessiot E.* Sur un invariant intégral de l' Hydrodynamique et sur son application á la theorie de la relativite génerale. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences (France).* Vol. 167 (1918), 1065–1068.

14. *Cartan E.* Sur l'intégration des systémes différentiels complétement intégrables I, II. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences (France).* Vol. 134 (1902), 1415–1418, 1564–1566.

15. *Cartan E. Leçons sur les invariants intégraux.* Paris, 1922.

16. *Картан Э. Интегральные инварианты.* М.–Л., Гостехиздат, 1940.

17. *Акивис М.А., Розенфельд Б.А. Эли Картан (1869 – 1951).* М., Наука, 2007.

18. *Арнольд В.И. Математические методы классической механики.* М., Наука, 1974.

19. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения.* М., Наука, 1986.

20. *Биркгоф Дж. Динамические системы.* М–Ижевск, 2002.

21. *Мозер Ю. Интегрируемые гамильтоновы системы и спектральная теория.* Ижевск, 1999.

22. *Трофимов В.В., Фоменко А.Т. Алгебра и геометрия интегрируемых Гамильтоновых дифференциальных уравнений.* М., 1995.

23. *Hwa-Chung Lee* Invariants of Hamilton systems and applications to the theory of canonical transformations. *Proc. Roy. Soc. Edinbough.* Vol. LXII, Ser. A (1947), 237–247.

24. *Айзерман М.А. Классическая механика.* М., Наука, 1980.

25. *Добронравов В.В.* Аналитическая динамика в неголономных координатах. *Ученые записки МГУ.* Т. 2, Вып. 122 (1948), 77–182.

26. *Wilkens A.* Über die Integral – Invarianten der Störungstheorie. *Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Math.-Naturwiss.* №7 (1955), 123–173.

27. *Тяпкин А.А., Шибанов А.С. Пуанкаре.* М., 1982.

28. *Losco L.* Sur une application des invariants intégraux au probléme des n corps. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences (France).* Vol. 277 (1973), 323–325.

29. *Losco L.* Sur un invariant inégral du probléme des n corps: conséquence de l'homogénéité du potentiel.. *The stability of the solar system and of small stellar systems: Proceedings of the Symposium, Poland, Warsaw, September 5–8, 1973 / International Astronomical Union, International Union of Theoretical and Applied Mechanics, and Polska Akademia Nauk / Dordrecht (D. Reidel Publishing Co.).* (1974), 249–255.

30. *Losco L.* Le probléme des n corps et les invariants intégraux. *Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy.* Vol. 15, №4 (1977), 477–488.

31. *Сурков Ю.П.* Интегральные инварианты физического маятника.. *Сборник научно-методических статей по теоретической механике. Вып. 5. М.: Высшая школа.* (1975), 56–58.

32. *Козлов В.В.* Интегральные инварианты после Пуанкаре и Картана.. *Библиотека «R&C Dynamics». Т. 1.* (1998), 217–260.

33. *Горбузов В.Н. Интегралы дифференциальных систем.* Гродно, 2006.

34. *Гайшун И.В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения.* М., 2004.

35. *Аржаных И.С.* Об интегрировании канонической системы уравнений в точных дифференциалах. *Успехи математических наук.* Т. VIII, вып. 3 (1953), 99–104.

36. *Гайшун И.В.* Устойчивость линейных гамильтоновых систем в полных дифференциалах с периодическими коэффициентами. *Дифференц. уравнения.* Т. 41, No. 1 (2005), 33–40.

37. *Проневич А.Ф.* Теорема Пуассона построения стационарных интегралов автономных систем уравнений в полных дифференциалах. *Проблемы физики, математики и техники.* No. 3 (2016), 52–57.

38. *Яковенко Г.Н. Краткий курс аналитической динамики.* М., 2004.

39. *Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Часть II.* М., 2000.

40. *Уиттекер Э.Т. Аналитическая динамика.* Ижевск, 1999.

41. *Проневич А.Ф.* Необходимые условия и критерии существования линейных интегральных инвариантов многомерных дифференциальных систем. *Дифференц. уравнения и процессы управления.* No. 3 (2017), 176–194.

УДК 330.4

АНАЛИТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ УЧЕТА АВТОНОМНОГО ЭКЗОГЕННОГО НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОГО ПРОГРЕССА В ТРЕХФАКТОРНЫХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ

А. Ф. Проневич[1], Г. А. Хацкевич[2]

e-mail: [1]pranevich@grsu.by, [2]Khatskevich@sbmt.by

Для динамических трехфакторных производственных функций представлена классификация учета автономного экзогенного научно-технического прогресса. Установлены аналитические критерии того, что заданная динамическая трехфакторная производственная функция учитывает продуктоувеличивающий научно-технический прогресс, трудодобавляющий научно-технический прогресс, капиталодобавляющий научно-технический прогресс и природодобавляющий научно-технический прогресс.

Ключевые слова: *производственная функция; научно-технический прогресс (НТП); продуктоувеличивающий НТП; капиталодобавляющий НТП; трудодобавляющий НТП; природодобавляющий НТП.*

ANALYTICAL CRITERIA OF ACCOUNTING FOR AUTONOMOUS EXOGENOUS TECHNOLOGICAL PROGRESS IN THREE-FACTOR PRODUCTION FUNCTIONS

A. F. Pranevich[1], G. A. Khatskevich[2]

e-mail: [1]pranevich@grsu.by, [2]Khatskevich@sbmt.by

In this article, we presented a classification of autonomous exogenous technological progress for dynamic three-factor production functions. The analytical criteria that dynamic three-factor production functions have product-augmenting technological progress, labor-augmenting technological progress, capital-augmenting technological progress, and environment-augmenting technological progress are proved.

Keywords: *production function; technological progress; product-augmenting technological progress; capital-augmenting technological progress, labor-augmenting technological progress; environment-augmenting technological progress.*

Mathematics Subject Classification (2020): Primary 91B02, Secondary 91B32.

1. Введение

Экономический рост любой страны складывается под воздействием многих составляющих, таких, как характер социальных институтов, отраслевая и воспроизводственная структура народного хозяйства, место и роль страны в системе международных отношений, природные условия и т.д. Агрегированно эти все составляющие можно представить в виде четырех факторов экономического роста [1, с. 982]: капитал (оборудование, фабрики, заводы, дороги и т.п.); человеческие ресурсы (предложение труда, образование, дисциплина, мотивация); природные ресурсы (земля, полезные ископаемые, топливо, качество окружающей среды); научно-технический прогресс (наука, технологии, инжиниринг, менеджмент, предпринимательство). Однако, начиная с начала прошлого века на первое место среди этих факторов во всех экономически развитых странах вышел научно-технический прогресс (НТП). Именно НТП на современном этапе в решающей степени определяет темпы и пропорции экономического роста в этих странах, поскольку возможности экстенсивного расширения производства в основном исчерпаны.

В современной экономической литературе нет однозначной трактовки понятия «научно-технический прогресс» (см., например, [2, с. 77–78; 3]). Существует множество различных определений, объяснений и толкований этого термина, подчас диаметрально противоположных. Однако условно можно выделить «экономико-инженерную» и «затратно-результатную» трактовки НТП [4, с. 29–30], причем первая трактовка является традиционной [5; 6]. При экономико-инженерной трактовке под НТП понимается перестройка технического базиса производства, совершенствование средств труда, улучшение организации трудовой деятельности, использование новых видов сырья и энергии, появление новых продуктов и технологий, а также повышение образовательного уровня рабочей силы и происходящее с течением времени изменения профессионально-квалификационной структуры занятых. В рамках такого подхода обычно не принимаются во внимание ни затраты, связанные с НТП, ни эффективность его реализации. В случае же затратно-результатной трактовки НТП рассматривается прежде всего с точки зрения экономического результата, безотносительно к материальному содержанию процессов, изменяющих облик производства. С этой точки зрения НТП имеет место тогда и только тогда, когда происходит повышение эффективности хозяйственной деятельности, т.е. отдача от используемых производственных факторов растет. Данная трактовка НТП сформировалась и получила первоначальное развитие в рамках теории производственных функций [2; 7; 8], а затем, вышла далеко за рамки этой экономической концепции. Отметим и то, что для экономической теории и практики одинаково важны эти два подхода к анализу НТП: изучение как материальных процессов, составляющих основу НТП, так и экономической эффективности НТП. Выбор того или иного подхода полностью зависит от объекта и цели проводимого исследования. В данной работе используется затратно-результатная трактовка НТП на основе теории динамических производственных функций. Наиболее простым способом отражения НТП в рамках макроэкономических производственных функций является такой, при котором НТП задается экзогенно как функция времени, а его воздействие на экономику проявляется лишь в повышении эффективности производства, т.е. в возможности увеличения выпуска продукции без привлечения дополнительных ресурсов. Такое модельное построение называется концепцией экзогенного НТП. При принятии этой концепции динамическая агрегированная производственная функция (ПФ) имеет аналитический вид [9]

$$Y = F(K, L, N, t), \tag{1.1}$$

где Y — выпуск продукции, K — капитал, L — трудовые ресурсы, N — природные ресурсы (земля, нефть, газ и др.), t — параметр времени из числового луча $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$, каждое значение которого выражает определенный уровень НТП, а неотрицательная функция F является дважды непрерывно дифференцируемой на множестве $D = G \times \mathbb{R}_+$, экономическая область $G \subset \mathbb{R}^3_+ = \{(K, L, N) \in \mathbb{R}^3 \colon K \geq 0,\ L \geq 0,\ N \geq 0\}$.

В рамках ПФ (1.1) капитал, труд и природные ресурсы являются агрегированными и не различаются по «возрасту» (капитал — по времени ввода в строй, рабочая сила — по времени начала трудовой деятельности). Таким образом, при использовании агрегированной ПФ (1.1) предполагается, что НТП одинаково воздействует как на вновь вводимые, так и на уже функционирующие производственные ресурсы. Такой НТП называется автономным.

Обе гипотезы (экзогенность и автономность) являются существенным упрощением реальности, но для многих задач, особенно для анализа долгосрочных тенденций, они могут рассматриваться как приемлемые. Из реальных процессов, на которых обычно фокусируется изучение НТП, этим гипотезам в наибольшей степени удовлетворяют совершенствование организации и управления производством, рационализация хозяйственных связей, изменения в отраслевой структуре производства, в меньшей степени — повышение квалификации и образовательного уровня рабочей силы. Автономность и экзогенность НТП — две совершенно различные и не связанные друг с другом концепции, которые отражают различные свойства НТП в рамках теории макроэкономических ПФ. Экзогенность означает, что НТП никак не связан с динамикой экономических показателей, а автономность — НТП одинаково воздействует на ресурсы разного возраста. Альтернативным понятием к экзогенному НТП является эндогенный НТП, а к автономному НТП — материализованный (или воплощенный) НТП. При этом [4, с. 31] термины «автономный» и «материализованный» не очень удачны, однако они являются довольно устоявшиеся в литературе, посвященной макроэкономическим динамическим ПФ.

При анализе НТП в рамках некоторой конкретной экономической единицы, рассматриваемой в определенный период времени, прежде всего необходимо конкретизировать зависимость в рамках аналитического представления ПФ (1.1). Этот выбор осуществляется из содержательных представлений о моделируемом объекте и о существе решаемой задачи. Для динамической трехфакторной ПФ (1.1) будем использовать следующую классификацию учета автономного экзогенного НТП (для двухфакторной ПФ см., например, [10, с. 83–85; 11–14]):

1. *Продуктоувеличивающий* НТП

$$F(K, L, N, t) = A(t)\widetilde{F}(K, L, N), \tag{1.2}$$

где строго возрастающая функция $A(t)$ есть индекс НТП, увеличивающий выпуск продукции;

2. *Капиталодобавляющий* (или *капиталосберегающий*) НТП

$$F(K, L, N, t) = \widetilde{F}(A(t)\,K, L, N), \tag{1.3}$$

трудодобавляющий (или *трудосберегающий*) НТП $F(K, L, N, t) = \widetilde{F}(K, B(t)\,L, N)$ и *природодобавляющий* (или *природосберегающий*) НТП $F(K, L, N, t) = \widetilde{F}(K, L, C(t)\,N)$;

3. *Капитало- и трудодобавляющий* НТП

$$F(K, L, N, t) = \widetilde{F}(A(t)\,K, B(t)\,L, N), \tag{1.4}$$

капитало- и природодобавляющий НТП $F(K, L, N, t) = \widetilde{F}(A(t)\,K, L, C(t)\,N)$, *трудо- и природодобавляющий* НТП $F(K, L, N, t) = \widetilde{F}(K, B(t)\,L, C(t)\,N)$;

4. *Капитало-, трудо- и природодобавляющий* НТП

$$F(K, L, N, t) = \widetilde{F}(A(t)\,K, B(t)\,L, C(t)\,N), \tag{1.5}$$

где строго возрастающие функции $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ такие, что $A(0) = B(0) = C(0) = 1$, представляют собой индексы НТП по капиталу, труду и природным ресурсам, соответственно, а трехфакторная функция $\widetilde{F}$ является дважды непрерывно дифференцируемой на области G.

Отметим, что значимость использования трехфакторных ПФ (1.1) в экономическом анализе впервые была теоретически обоснована в монографии английского экономиста Д.Э. Мида [9]. В настоящее время, модели экономического роста с трехфакторными ПФ применяются для изучения «голландской болезни» и «ресурсного проклятия» (см., например, [15; 16]).

В данной работе авторами получены аналитические критерии того, что динамическая трехфакторная ПФ (1.1) учитывает автономный экзогенный НТП. Способ доказательства и установления аналитической формы ПФ основан на нахождении решений линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка [17, с. 255–256].

2. Продуктоувеличивающий НТП

Приведем аналитические критерии учета ПФ (1.1) продуктоувеличивающего НТП.

Теорема 2.1. *Динамическая трехфакторная ПФ* (1.1) *учитывает продуктоувеличивающий НТП тогда и только тогда, когда выполняется система тождеств*

$$\begin{gathered}\partial_K \ln F(K, L, N, t) = \varphi(K, L, N), \quad \partial_L \ln F(K, L, N, t) = \psi(K, L, N),\\ \partial_N \ln F(K, L, N, t) = \rho(K, L, N) \quad \forall (K, L, N, t) \in G' \times T' \subset G \times T,\end{gathered} \tag{2.1}$$

где φ, ψ и ρ — некоторые непрерывно дифференцируемые на области $G' \subset G$ функции, которые не зависят от параметра НТП t.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть ПФ (1.1) учитывает продуктоувеличивающий НТП. Тогда ее можно представить в аналитической форме (1.2). Частные производные

$$\partial_K \ln F(K,L,N,t) = \frac{\partial_K F(K,L,N,t)}{F(K,L,N,t)} = \frac{\partial_K \big(A(t)\widetilde{F}(K,L,N)\big)}{A(t)\widetilde{F}(K,L,N)} = \frac{\partial_K \widetilde{F}(K,L,N)}{\widetilde{F}(K,L,N)} = \partial_K \ln \widetilde{F}(K,L,N),$$

$$\partial_L \ln F(K,L,N,t) = \frac{\partial_L F(K,L,N,t)}{F(K,L,N,t)} = \frac{\partial_L \big(A(t)\widetilde{F}(K,L,N)\big)}{A(t)\widetilde{F}(K,L,N)} = \frac{\partial_L \widetilde{F}(K,L,N)}{\widetilde{F}(K,L,N)} = \partial_L \ln \widetilde{F}(K,L,N),$$

$$\partial_N \ln F(K,L,N,t) = \frac{\partial_N F(K,L,N,t)}{F(K,L,N,t)} = \frac{\partial_N \big(A(t)\widetilde{F}(K,L,N)\big)}{A(t)\widetilde{F}(K,L,N)} = \frac{\partial_N \widetilde{F}(K,L,N)}{\widetilde{F}(K,L,N)} = \partial_N \ln \widetilde{F}(K,L,N),$$

а значит, на области $G' \times T'$ имеет место система тождеств (2.1) при $\varphi(K,L,N) = \partial_K \ln \widetilde{F}(K,L,N)$, $\psi(K,L,N) = \partial_L \ln \widetilde{F}(K,L,N)$, $\rho(K,L,N) = \partial_N \ln \widetilde{F}(K,L,N)$.

Достаточность. Пусть динамическая ПФ (1.1) такова, что выполняются тождества (2.1). Тогда из первого уравнения системы уравнений в частных производных (2.1) находим, что

$$\ln F(K,L,N,t) = \int \varphi(K,L,N)\, dK + C(L,N,t),$$

где $C(L,N,t)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Подставляя это выражение во второе уравнение системы уравнений в частных производных первого порядка (2.1), получаем

$$\int \partial_L \varphi(K,L,N)\, dK + \partial_L C(L,N,t) = \psi(K,L,N).$$

Отсюда следует, что функция $\partial_L C(L,N,t)$ не зависит от параметра НТП t, а является функцией только от двух переменных L и N, т.е. $\partial_L C(L,N,t) = \widetilde{C}(L,N)$, а значит, функция $C(L,N,t) = \int \widetilde{C}(L,N)\, dL + \widetilde{A}(t)$.

Следовательно, функция

$$F(K,L,N,t) = \exp\bigg(\int \varphi(K,L,N)\, dK + \int \widetilde{C}(L,N)\, dL + \widetilde{A}(t)\bigg) = A(t)\widetilde{F}(K,L,N),$$

где приняты следующие обозначения

$$A(t) = \exp \widetilde{A}(t), \quad \widetilde{F}(K,L,N) = \exp\bigg(\int \varphi(K,L,N)\, dK + \int \widetilde{C}(L,N)\, dL\bigg).$$

Таким образом, для динамической трехфакторной ПФ (1.1) имеет место представление (1.2), а значит, ПФ (1.1) учитывает продуктоувеличивающий НТП. Теорема доказана.

Замечание 2.1. Теорему 2.1 можно сформулировать в следующей форме: динамическая ПФ (1.1) учитывает продуктоувеличивающий НТП, если и только если непрерывные темпы прироста по капиталу, по труду и по природным ресурсам не зависят от параметра НТП.

Теорема 2.2. *Для того, чтобы динамическая трехфакторная ПФ (1.1) учитывала продуктоувеличивающий НТП необходимо и достаточно выполнения тождества*

$$\partial_t \ln F(K,L,N,t) = \theta(t) \quad \forall (K,L,N,t) \in G' \times T', \tag{2.2}$$

где θ — некоторая функция (темп прироста индекса НТП), которая зависит только от параметра НТП t.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть ПФ (1.1) учитывает продуктоувеличивающий НТП. Тогда ее можно представить в аналитической форме (1.2). Частная производная

$$\partial_t \ln F(K,L,N,t) = \frac{\partial_t F(K,L,N,t)}{F(K,L,N,t)} = \frac{\partial_t\big(A(t)\widetilde{F}(K,L,N)\big)}{A(t)\widetilde{F}(K,L,N)} = \frac{A'(t)}{A(t)}\,,$$

а значит, верно тождество (2.2) при $\theta(t) = A'(t)/A(t)\ \ \forall t \in T'$.

Достаточность. Пусть для ПФ (1.1) выполняется тождество (2.2). Тогда

$$\ln F(K,L,N,t) = \int \theta(t)\,dt + C(K,L,N),$$

где C — произвольная функция (постоянная интегрирования). Значит, функция

$$F(K,L,N,t) = \exp\biggl(\int \theta(t)\,dt + C(K,L,N)\biggr) = A(t)\widetilde{F}(K,L,N),$$

где положено $A(t) = \exp\displaystyle\int \theta(t)\,dt$ и $\widetilde{F}(K,L,N) = \exp C(K,L,N)$.

Таким образом, для динамической трехфакторной ПФ (1.1) верно представление (1.2), а значит, она учитывает продуктоувеличивающий НТП. Теорема доказана.

3. Капиталодобавляющий НТП

Приведем критерии того, что ПФ (1.1) учитывает капиталодобавляющий НТП (теорема 3.1), трудодобавляющий НТП (теорема 3.2) и природодобавляющий НТП (теорема 3.3).

Теорема 3.1. *Динамическая трехфакторная ПФ* (1.1) *учитывает капиталодобавляющий НТП, если и только если выполняется тождество*

$$\frac{\partial_t F(K,L,N,t)}{K\,\partial_K F(K,L,N,t)} = \alpha(t) \quad \forall (K,L,N,t) \in G' \times T' \subset G \times T, \tag{3.1}$$

где α есть скалярная функция, зависящая только от параметра НТП t.

Доказательство. *Необходимость.* Если динамическая ПФ (1.1) учитывает капиталодобавляющий НТП, то, на основании представления (1.3), получаем, что отношение

$$\frac{\partial_t F(K,L,N,t)}{K\,\partial_K F(K,L,N,t)} = \frac{\partial_t \widetilde{F}(A(t)\,K,L,N)}{K\,\partial_K \widetilde{F}(A(t)K,L,N)} =$$

$$= \frac{\partial_\xi \widetilde{F}(\xi,L,N)\big|_{\xi=A(t)K}\,\partial_t\big(A(t)K\big)}{K\,\partial_\xi \widetilde{F}(\xi,L,N)\big|_{\xi=A(t)K}\,\partial_K\big(A(t)K\big)} = \frac{A'(t)}{A(t)} \quad \forall (K,L,N,t) \in G' \times T',$$

т.е имеет место тождество (3.1) при скалярной функции $\alpha(t) = A'(t)/A(t)\ \ \forall t \in T'$.

Достаточность. Пусть ПФ (1.1) удовлетворяет тождеству (3.1). Тогда она будет решением дифференциального уравнения в частных производных первого порядка

$$\partial_t F - \alpha(t) K\,\partial_K F = 0. \tag{3.2}$$

Для дифференциального уравнения (3.2) запишем характеристическую систему

$$\frac{dK}{-\,\alpha(t)K} = \frac{dL}{0} = \frac{dN}{0} = \frac{dt}{1}\,.$$

Из дифференциального уравнения $\dfrac{dK}{-\,\alpha(t)K} = \dfrac{dt}{1}$, разделяя переменные, находим

$$\ln K + \int \alpha(t)\,dt = \widetilde{C}_1, \qquad K \exp \int \alpha(t)\,dt = C_1,$$

где $C_1 = \exp \widetilde{C}_1$, а $\widetilde{C}_1$ — произвольная вещественная постоянная.

Из дифференциальных уравнений $\dfrac{dL}{0} = \dfrac{dt}{1}$ и $\dfrac{dN}{0} = \dfrac{dt}{1}$ находим первые интегралы $L = C_2$ и $N = C_3$, где C_2 и C_3 — произвольные вещественные постоянные.

Тогда общее решение дифференциального уравнения (3.2) имеет вид

$$F(K, L, N, t) = \widetilde{F}\Bigl(K \exp \int \alpha(t)\, dt, L, N\Bigr) = \widetilde{F}(A(t)K, L, N),$$

где $\widetilde{F}$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция от трех переменных, а индекс НТП по капиталу есть функция $A(t) = \exp \int \alpha(t)\, dt$.

Следовательно, на основании представления (1.3) получаем, что функция (1.1) учитывает капиталодобавляющий НТП. Теорема доказана.

Замечание 3.1. Тождество (3.1) можно записать в аналитической форме

$$\partial_t \ln F(K, L, N, t) = \alpha(t)\, E_K(F) \quad \forall (K, L, N, t) \in G' \times T',$$

где $E_K(F)$ есть эластичность выпуска по капиталу, а теорему 3.1 сформулировать в следующем виде: динамическая ПФ (1.1) учитывает капиталодобавляющий НТП, если и только если непрерывный темп прироста по параметру НТП является линейно связанным через некоторую функцию от параметра НТП с эластичностью выпуска по капиталу.

Аналогично теореме 3.1 доказываются следующие утверждения (теоремы 3.2 и 3.3).

Теорема 3.2. *Динамическая трехфакторная ПФ* (1.1) *учитывает трудодобавляющий НТП в том и только в том случае, когда имеет место тождество*

$$\frac{\partial_t F(K, L, N, t)}{L\, \partial_L F(K, L, N, t)} = \beta(t) \quad \forall (K, L, N, t) \in G' \times T' \subset G \times T,$$

где β есть скалярная функция, зависящая только от параметра НТП t.

Замечание 3.2. Теорему 3.2 можно сформулировать в следующем виде: динамическая трехфакторная ПФ (1.1) учитывает трудодобавляющий НТП, если и только если непрерывный темп прироста по параметру НТП является линейно связанным через некоторую функцию от параметра НТП с эластичностью выпуска по трудовым ресурсам.

Теорема 3.3. *Динамическая трехфакторная ПФ* (1.1) *учитывает природобавляющий НТП тогда и только тогда, когда имеет место тождество*

$$\frac{\partial_t F(K, L, N, t)}{N\, \partial_N F(K, L, N, t)} = \gamma(t) \quad \forall (K, L, N, t) \in G' \times T' \subset G \times T,$$

где γ есть скалярная функция, зависящая только от параметра НТП t.

Замечание 3.3. Теорему 3.3 можно сформулировать в следующем виде: динамическая трехфакторная ПФ (1.1) учитывает природобавляющий НТП, если и только если непрерывный темп прироста по параметру НТП является линейно связанным через некоторую функцию от параметра НТП с эластичностью выпуска по природным ресурсам.

4. Капитало- и трудодобавляющий НТП

Теорема 4.1. *Динамическая трехфакторная ПФ* (1.1) *учитывает капитало- и трудодобавляющий НТП тогда и только тогда, когда темп прироста по параметру НТП является линейно связанным через некоторые функции от параметра НТП с эластичностями выпуска продукции по капиталу и труду, т.е. верно тождество*

$$\partial_t \ln F(K,L,N,t) = \alpha(t)\, E_K(F) + \beta(t)\, E_L(F) \quad \forall (K,L,N,t) \in G' \times T', \tag{4.1}$$

где α и β есть некоторые функции, зависящая только от параметра НТП t, а $E_K(F)$ и $E_L(F)$ есть эластичности выпуска продукции по капиталу и по труду, соответственно.

Доказательство. *Необходимость.* Если ПФ (1.1) учитывает капитало- и трудодобавляющий НТП, то, на основании представления (1.4), находим темп прироста по параметру НТП:

$$\partial_t \ln F(K,L,N,t) = \frac{\partial_t F(K,L,N,t)}{F(K,L,N,t)} = \frac{\partial_t \widetilde{F}(A(t)\,K, B(t)\,L, N)}{\widetilde{F}(A(t)\,K, B(t)\,L, N)} =$$

$$= \frac{\partial_\xi \widetilde{F}(\xi,\zeta,N)\Big|_{\substack{\xi = A(t)K \\ \zeta = B(t)L}} \partial_t\big(A(t)K\big) + \partial_\zeta \widetilde{F}(\xi,\zeta,N)\Big|_{\substack{\xi = A(t)K \\ \zeta = B(t)L}} \partial_t\big(B(t)L\big)}{\widetilde{F}(A(t)\,K, B(t)\,L, N)} =$$

$$= \frac{A'(t)\,K}{F(K,L,N,t)}\, \partial_\xi \widetilde{F}(\xi,\zeta,N)\Big|_{\substack{\xi = A(t)K \\ \zeta = B(t)L}} + \frac{B'(t)\,L}{F(K,L,N,t)}\, \partial_\zeta \widetilde{F}(\xi,\zeta,N)\Big|_{\substack{\xi = A(t)K \\ \zeta = B(t)L}} =$$

$$= A'(t)\, E_K(F) + B'(t)\, E_L(F) \quad \forall (K,L,N,t) \in G' \times T',$$

т.е имеет место тождество (4.1) при скалярных функциях $\alpha(t) = A'(t)$ и $\beta(t) = B'(t)$.

Достаточность. Пусть ПФ (1.1) удовлетворяет тождеству (4.1). Тогда она будет решением дифференциального уравнения в частных производных первого порядка

$$\partial_t F - \alpha(t) K\, \partial_K F - \beta(t) L\, \partial_L F = 0. \tag{4.2}$$

Для дифференциального уравнения (4.2) запишем характеристическую систему

$$\frac{dK}{-\,\alpha(t)K} = \frac{dL}{-\,\beta(t)L} = \frac{dN}{0} = \frac{dt}{1}\,.$$

Из дифференциального уравнения $\dfrac{dK}{-\,\alpha(t)K} = \dfrac{dt}{1}$, разделяя переменные, находим

$$\ln K + \int \alpha(t)\, dt = \widetilde{C}_1, \qquad K \exp \int \alpha(t)\, dt = C_1,$$

где $C_1 = \exp \widetilde{C}_1$, а $\widetilde{C}_1$ — произвольная вещественная постоянная.

Из дифференциального уравнения $\dfrac{dL}{-\,\beta(t)L} = \dfrac{dt}{1}$, разделяя переменные, находим

$$\ln L + \int \beta(t)\, dt = \widetilde{C}_2, \qquad L \exp \int \beta(t)\, dt = C_2,$$

где $C_2 = \exp \widetilde{C}_2$, а $\widetilde{C}_2$ — произвольная вещественная постоянная.

Из дифференциального уравнения $\dfrac{dN}{0} = \dfrac{dt}{1}$ находим первый интеграл $N = C_3$, где C_3 — произвольная вещественная постоянная.

Тогда общее решение дифференциального уравнения (4.2) имеет вид

$$F(K,L,N,t) = \widetilde{F}\Big(K \exp\!\int \alpha(t)\, dt,\ L \exp\!\int \beta(t)\, dt, N\Big) = \widetilde{F}(A(t)K, B(t)L, N),$$

где $\widetilde{F}$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция от трех переменных, а индексы НТП по капиталу и по труду соответственно равны $A(t) = \exp\!\int \alpha(t)\, dt$ и $B(t) = \exp\!\int \beta(t)\, dt$.

Следовательно, на основании представления (1.4) получаем, что функция (1.1) учитывает капитало- и трудодобавляющий НТП. Теорема доказана.

В случае, когда индексы НТП по капиталу и по трудовым ресурсам равны, т.е. $A(t) \equiv B(t)$, из теоремы 4.1 получаем следующее утверждение.

Следствие 4.1. *Динамическая трехфакторная ПФ* (1.1) *учитывает капитало- и трудодобавляющий НТП с равными индексами НТП по капиталу и по трудовым ресурсам в том и только в том случае, когда имеет место тождество*

$$\frac{\partial_t F(K,L,N,t)}{K\,\partial_K F(K,L,N,t) + L\,\partial_L F(K,L,N,t)} = \alpha(t) \quad \forall (K,L,N,t) \in G' \times T' \subset G \times T,$$

где α есть некоторая скалярная функция, зависящая только от параметра НТП t.

Методом, аналогичным использованному при доказательстве утверждения теоремы 4.1, устанавливаем критерии учета в задании динамической ПФ (1.1) капитало- и природодобавляющего НТП (теорема 4.2) и трудо- и природодобавляющего НТП (теорема 4.3).

Теорема 4.2. *Динамическая трехфакторная ПФ* (1.1) *учитывает капитало- и природодобавляющий НТП в том и только в том случае, когда темп прироста по параметру НТП является линейно связанным через некоторые функции от параметра НТП с эластичностями выпуска продукции по капиталу и природным ресурсам, т.е. имеет место тождество*

$$\partial_t \ln F(K,L,N,t) = \alpha(t)\, E_K(F) + \gamma(t)\, E_N(F) \quad \forall (K,L,N,t) \in G' \times T',$$

где α и γ есть некоторые функции, зависящая только от параметра НТП, а $E_K(F)$ и $E_N(F)$ есть эластичности выпуска продукции по капиталу и природным ресурсам, соответственно.

Теорема 4.3. *Динамическая трехфакторная ПФ* (1.1) *учитывает трудо- и природодобавляющий НТП в том и только в том случае, когда темп прироста по параметру НТП является линейно связанным через некоторые функции от параметра НТП с эластичностями выпуска продукции по труду и природным ресурсам, т.е. имеет место тождество*

$$\partial_t \ln F(K,L,N,t) = \beta(t)\, E_L(F) + \gamma(t)\, E_N(F) \quad \forall (K,L,N,t) \in G' \times T',$$

где β и γ есть некоторые функции, зависящая только от параметра НТП, а $E_L(F)$ и $E_N(F)$ есть эластичности выпуска продукции по труду и по природным ресурсам, соответственно.

5. Капитало-, трудо- и природодобавляющий НТП

Теорема 5.1. *Динамическая трехфакторная ПФ* (1.1) *учитывает капитало-, трудо- и природодобавляющий НТП тогда и только тогда, когда темп прироста по параметру НТП является линейно связанным через некоторые функции от параметра НТП с эластичностями выпуска продукции по капиталу, труду и природным ресурсам, т.е. верно тождество*

$$\partial_t \ln F(K,L,N,t) = \alpha(t)\, E_K(F) + \beta(t)\, E_L(F) + \gamma(t)\, E_N(F) \quad \forall (K,L,N,t) \in G' \times T', \tag{5.1}$$

где α, β и γ есть некоторые скалярные функции, зависящая только от параметра НТП t, а $E_K(F)$, $E_L(F)$ и $E_N(F)$ есть эластичности выпуска продукции по капиталу, по трудовым ресурсам и по природным ресурсам, соответственно.

Доказательство. *Необходимость.* Если ПФ (1.1) учитывает капитало-, трудо- и придобавляющий НТП, то, на основании (1.5), находим темп прироста по параметру НТП:

$$\partial_t \ln F(K,L,N,t) = \frac{\partial_t F(K,L,N,t)}{F(K,L,N,t)} = \frac{\partial_t \widetilde{F}(A(t)\,K, B(t)\,L, C(t)\,N)}{\widetilde{F}(A(t)\,K, B(t)\,L, C(t)\,N)} =$$

$$= \frac{\Big(\partial_\xi \widetilde{F}(\xi,\zeta,\rho)\,\partial_t\big(A(t)K\big) + \partial_\zeta \widetilde{F}(\xi,\zeta,\rho)\,\partial_t\big(B(t)L\big) + \partial_\rho \widetilde{F}(\xi,\zeta,\rho)\,\partial_t\big(C(t)N\big)\Big)\Big|_{\substack{\xi = A(t)K\\ \zeta = B(t)L\\ \rho = C(t)N}}}{\widetilde{F}(A(t)\,K, B(t)\,L, C(t)\,N)} =$$

$$= \Big(\frac{A'(t)\,K}{F(K,L,N,t)}\,\partial_\xi \widetilde{F}(\xi,\zeta,\rho) + \frac{B'(t)\,L}{F(K,L,N,t)}\,\partial_\zeta \widetilde{F}(\xi,\zeta,\rho) + \frac{C'(t)\,N}{F(K,L,N,t)}\,\partial_\rho \widetilde{F}(\xi,\zeta,\rho)\Big)\Big|_{\substack{\xi=A(t)K\\ \zeta=B(t)L\\ \rho=C(t)N}} =$$

$$= A'(t)\,E_K(F) + B'(t)\,E_L(F) + C'(t)\,E_N(F) \quad \forall (K,L,N,t) \in G'\times T',$$

т.е имеет место тождество (5.1) при функциях $\alpha(t) = A'(t),\ \beta(t) = B'(t)$ и $\gamma(t) = C'(t)$.

Достаточность. Пусть ПФ (1.1) удовлетворяет тождеству (5.1). Тогда она будет решением дифференциального уравнения в частных производных первого порядка

$$\partial_t F - \alpha(t)K\,\partial_K F - \beta(t)L\,\partial_L F - \gamma(t)N\,\partial_N F = 0. \tag{5.2}$$

Для дифференциального уравнения (5.2) запишем характеристическую систему

$$\frac{dK}{-\,\alpha(t)K} = \frac{dL}{-\,\beta(t)L} = \frac{dN}{-\,\gamma(t)N} = \frac{dt}{1}\,.$$

Из дифференциального уравнения $\dfrac{dK}{-\,\alpha(t)K} = \dfrac{dt}{1}$, разделяя переменные, находим

$$\ln K + \int \alpha(t)\,dt = \widetilde{C}_1, \qquad K\exp\int \alpha(t)\,dt = C_1,$$

где $C_1 = \exp \widetilde{C}_1$, а $\widetilde{C}_1$ — произвольная вещественная постоянная.

Из дифференциального уравнения $\dfrac{dL}{-\,\beta(t)L} = \dfrac{dt}{1}$, разделяя переменные, находим

$$\ln L + \int \beta(t)\,dt = \widetilde{C}_2, \qquad L\exp\int \beta(t)\,dt = C_2,$$

где $C_2 = \exp \widetilde{C}_2$, а $\widetilde{C}_2$ — произвольная вещественная постоянная.

Из дифференциального уравнения $\dfrac{dN}{-\,\gamma(t)N} = \dfrac{dt}{1}$, разделяя переменные, находим

$$\ln N + \int \gamma(t)\,dt = \widetilde{C}_3, \qquad N\exp\int \gamma(t)\,dt = C_3,$$

где $C_3 = \exp \widetilde{C}_3$, а $\widetilde{C}_3$ — произвольная вещественная постоянная.

Тогда общее решение дифференциального уравнения (5.2) имеет вид

$$F(K,L,N,t) = \widetilde{F}\Big(K\exp\int \alpha(t)\,dt,\ L\exp\int \beta(t)\,dt,\ N\exp\int \gamma(t)\,dt\Big) = \widetilde{F}(A(t)K, B(t)L, C(t)N),$$

где $\widetilde{F}$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция от трех переменных, а индексы НТП по капиталу, труду и природным ресурсам соответственно равны

$$A(t) = \exp\int \alpha(t)\,dt, \quad B(t) = \exp\int \beta(t)\,dt, \quad C(t) = \exp\int \gamma(t)\,dt.$$

Следовательно, на основании представления (1.5) получаем, что функция (1.1) учитывает капитало-, трудо- и природодобавляющий НТП. Теорема доказана.

В случае, когда индексы НТП по капиталу, по труду и по природным ресурсам равны, т.е. $A(t) \equiv B(t) \equiv C(t)$, из теоремы 5.1 получаем следующее утверждение.

Следствие 5.1. *Динамическая трехфакторная ПФ* (1.1) *учитывает капитало-, трудо- и природодобавляющий НТП с равными индексами НТП по капиталу, труду и природным ресурсам, если и только если на области $G' \times T' \subset G \times T$ имеет место тождество*

$$\frac{\partial_t F(K,L,N,t)}{K\,\partial_K F(K,L,N,t) + L\,\partial_L F(K,L,N,t) + N\,\partial_N F(K,L,N,t)} = \alpha(t),$$

где α есть некоторая скалярная функция, зависящая только от параметра НТП t.

Работа выполнена при поддержке государственной программы научных исследований «*Общество и гуманитарная безопасность белорусского государства*» на 2021 – 2025 годы (научно-исследовательская работа «*Разработка и применение эконометрических моделей развития малого и среднего предпринимательства в регионах для анализа и прогнозирования производства и экспорта товаров и услуг*, No. ГР 20211753»).

Литература

1. *Самуэльсон П., Нордхаус В.Д. Экономика.* СпБ., 2020.

2. *Плакунов М.К., Раяцкас Р.Л. Производственные функции в экономическом анализе.* Вильнюс, 1984.

3. *Ковалева Т.Ю.* Обзор методических подходов к оценке уровня научно-технического прогресса: страновой и региональный аспекты. *Вестник АГТУ. Сер. Экономика.* No. 3 (2015), 20–32.

4. *Паппэ Я.Ш. Малоразмерные макроэкономические модели экономического роста и научно-технического прогресса.* М., 1992.

5. *Варшавский А.Е. Научно-технический прогресс в моделях экономического развития: методы анализа и оценки.* М., 1984.

6. *Байнев В.Ф., Дадеркина Е.А. Научно-технический прогресс и устойчивое развитие.* Минск, 2008.

7. *Клейнер Г.Б. Производственные функции: теория, методы, применение.* М., 1986.

8. *Горбунов В.К. Производственные функции: теория и построение.* Ульяновск, 2013.

9. *Meade J.E. A neo-classical theory of economic growth.* New York, 1961.

10. *Иванилов Ю.П., Лотов А.В. Математические модели в экономике.* М., 1979.

11. *Хацкевич Г.А., Проневич А.Ф.* Классификация Сато – Беккмана учета научно-технического прогресса: генезис, обобщение и дополнение. *Журнал Белорусского государственного университета. Экономика.* No. 2 (2020), 4–17.

12. *Проневич А.Ф., Хацкевич Г.А.* Научно-технический прогресс и нейтральность по Хиксу, Харроду и Солоу: генезис, построение и обобщение. *Белорусский экономический журнал.* No. 3 (2020), 87–105.

13. *Проневич А.Ф., Хацкевич Г.А.* Автономный экзогенный научно-технический прогресс и нейтральность по Хиксу, Харроду и Солоу. *Вестник института экономики НАН Беларуси.* Вып. 2 (2021), 105–120.

14. *Проневич А.Ф., Хацкевич Г.А.* Трудодобавляющий научно-технический прогресс и нейтральность по Харроду. *Экономика, моделирование, прогнозирование.* Вып. 15 (2021), 236–246.

15. *Полтерович В.М., Попов В.В., Тонис А.С. Экономическая политика, качество институтов и механизмы «ресурсного проклятия».* М., 2007.

16. *Кирилюк И.Л.* Модели производственных функций для российской экономики. *Компьютерные исследования и моделирование.* Т. 5, No. 2 (2013), 293–312.

17. *Богданов Ю.С., Мазаник С.А., Сыроид Ю.Б. Курс дифференциальных уравнений.* Минск, 1996.

УДК 517.968.21+517.958

О СВЯЗИ МЕЖДУ СВОЙСТВАМИ БЕСКОНЕЧНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ СКАЛЯРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

Н. Н. Роговцов

e-mail: rogovtsov@bntu.by

В работе кратко описаны основные аналитические свойства бесконечных непрерывных дробей, которые играют ключевую роль в конструктивной теории интегральных скалярных характеристических уравнений теории переноса излучения (RTT). Установлена связь между дискретными спектрами этих интегральных уравнений и нулями указанных выше дробей. Для каждого приведенного скалярного интегрального характеристического уравнения найдены концы интервалов или отрезков, которые принадлежат интервалу $(-i; i)$ мнимой оси и на которых не могут находиться элементы дискретных спектров.

Ключевые слова: *интегральные скалярные характеристические уравнения; дискретные спектры; бесконечные непрерывные дроби; теория переноса излучения.*

ON RELATION BETWEEN THE PROPERTIES OF INFINITE CONTINUED FRACTIONS AND INTEGRAL SCALAR CHARACTERISTIC EQUATIONS OF RADIATIVE TRANSFER THEORY

N. N. Rogovtsov

e-mail: rogovtsov@bntu.by

The main analytical properties of the infinite continued fractions which play a key role in the constructive theory of the integral scalar characteristic equations of the transfer theory are briefly described in the article. The relation between discrete spectra of these integral equations and zeros the above-mentioned fractions are installed. The ends of intervals or segments that belong to the interval $(-i, i)$ of the imaginary axis and do not contain elements of discrete spectra are found for each reduced scalar integral characteristic equation.

Keywords: *integral scalar characteristic equations; discrete spectrum; continued fraction; radiative transfer theory.*

Mathematics Subject Classification (2020): Primary 80A21, Secondary 37B10, 45B05.

1. Введение

Впервые однородное интегральное скалярное характеристическое уравнение RTT было получено в статье [1] при решении частной проблемы теории рассеяния света в мутных (дисперсных) средах. Однако дальнейшее развитие RTT показало, что значительную часть информации о свойствах решений различных краевых задач (BVPs) для интегро-дифференциального уравнения переноса излучения (RTE) можно извлечь, используя известные качественные и конструктивные математические свойства однородных и неоднородных интегральных скалярных характеристических уравнений RTT. В частности, на основе общих идей и конструкций метода редукции общих соотношений инвариантности (GIRRM) [2, 3] в работах (см. [3–6] и ссылки в них) удалось найти целый ряд точных, асимптотических и численных решений канонических и многомерных BVPs для RTE для случаев дисперсных сред различной конфигурации. Ряд важных результатов качественной математической теории этих интегральных скалярных характеристических уравнений был получен в публикациях (см. работы [7–9] и ссылки в них). Однако значительная часть утверждений, сформулированных в этих публикациях является малопригодной при отыскании аналитических или численных решений BVPs для RTE. Дальнейшему развитию качественной и конструктивной теории таких интегральных уравнений были посвящены работы [5, 6, 10, 11]. В них, в частности, в рамках допущений, при выполнении которых данные уравнения являются уравнениями Фредгольма, были найдены явные аналитические представления для собственных функций, соответствующих элементам дискретных спектров однородных интегральных скалярных характеристических уравнений RTT, и предложен эффективный алгоритм отыскания этих элементов. Отметим, что в публикациях [3–6, 10, 11] эффективно использовались свойства инвариантности [2], которыми обладают бесконечные непрерывные дроби и бесконечные системы линейных алгебраических уравнений. В данной статье установлены в явной форме ограничения, накладываемые на расположение элементов дискретных спектров указанных выше интегральных уравнений, соответствующих случаям неконсервативного и консервативного рассеяний в дисперсной среде. Сформулированы также утверждения, относящиеся к аналитическим свойствам бесконечных непрерывных дробей, используемых в конструктивной теории интегральных скалярных характеристических уравнений RTT [5, 6, 10].

2. Интегральные скалярные характеристические уравнения теории переноса излучения

Интегральное скалярное характеристическое уравнение RTT может быть записано в виде [5]

$$(1-i\nu\mu)\,\Phi\left(\nu;\vec{\Omega};\omega_0\right)=\hat{\mathrm{P}}\,(\Phi)\left(\nu;\vec{\Omega};\omega_0\right)+g\left(\nu;\vec{\Omega};\omega_0\right),\ \vec{\Omega}\in\Omega. \tag{2.1}$$

Здесь i — мнимая единица; ν — заданный или искомый (вещественный или комплексный) параметр; ω_0 — заданный параметр ($\omega_0\in(0,1]$); $\Omega=\left\{\vec{\Omega}\middle|\vec{\Omega}=(\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3)=\Omega_1\vec{e}_1+\Omega_2\vec{e}_2+\right.$ $+\Omega_3\vec{e}_3$; $\{0;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ — ортонормированный правый репер в трехмерном точечном евклидовом пространстве ε_3; $\left.\left|\vec{\Omega}\right|=1\right\}$ — единичная сфера с центром в точке $0\in\varepsilon_3$; $\mu=\left(\vec{\Omega}\cdot\vec{e}_3\right)=\Omega_3\in$ $\in[-1,1]$; интегральный оператор $\hat{\mathrm{P}}$ определяется равенством

$$\hat{\mathrm{P}}\,(\Phi)\left(\nu;\vec{\Omega};\omega_0\right)=\frac{\omega_0}{4\pi}\int\limits_{\Omega}p\left(\vec{\Omega}\cdot\vec{\Omega}'\right)\Phi\left(\nu;\vec{\Omega}';\omega_0\right)d\Omega', \tag{2.2}$$

где $p\,(\mu)$ — фазовая функция, которая почти везде на [–1,1] неотрицательна и для любого $\vec{\Omega}\in$ $\in\Omega$; нормирована условием $(4\pi)^{-1}\int\limits_{\Omega}p\left(\vec{\Omega}\cdot\vec{\Omega}'\right)d\Omega'=1$; $g\left(\nu;\vec{\Omega};\omega_0\right)$ — заданная, а $\Phi\left(\nu;\vec{\Omega};\omega_0\right)$ — искомая функции.

В RTT исследование уравнения (2.1) обычно сводят к изучению семейства приведенных интегральных скалярных характеристических уравнений. Они имеют такой вид [5]:

$$(1-i\nu\mu)\,\Phi_m\,(\nu;\mu;\omega_0)=\hat{\mathrm{P}}_m\,(\Phi_m)\,(\nu;\mu;\omega_0)+g_m\,(\nu;\mu;\omega_0)\,, \tag{2.3}$$

$$\mu\in[-1,1]\,,m\in Z=\{...,-2,-1,0,1,2,...\}\,.$$

Здесь $g_m(\nu;\mu;\omega_0)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\exp(-im\varphi)\,g\left(\nu;\vec{\Omega};\omega_0\right)d\varphi$; $\Phi_m(\nu;\mu;\omega_0)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\exp(-im\varphi)\,\Phi\left(\nu;\vec{\Omega};\omega_0\right)d\varphi$;

$$\hat{\mathrm{P}}_m(\Phi_m)(\nu;\mu;\omega_0)=\frac{\omega_0}{2}\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{P}_{|m|}\left(\mu,\mu'\right)\Phi_m\left(\nu;\mu';\omega_0\right)d\mu';$$

$$\mathrm{P}_{|m|}\left(\mu,\mu'\right)=\sum_{s=|m|}^{+\infty}(2s+1)\,f_s\frac{(s-|m|)!}{(s+|m|)!}\mathrm{P}_{s,|m|}(\mu)\,\mathrm{P}_{s,|m|}\left(\mu'\right),$$

где $f_s=2^{-1}\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{P}_s(\mu)\,p(\mu)\,d\mu$. ($\mathrm{P}_s(\mu)$ — полином Лежандра s-го порядка; $\mathrm{P}_{s,|m|}(\mu)$ — присоединенная функция Лежандра); $\vec{\Omega}=\sin\theta\cos\varphi\vec{e}_1+\sin\theta\sin\varphi\vec{e}_2+\cos\theta\vec{e}_3$ $\left(\cos\theta=\mu,\sin\theta=\sqrt{1-\mu^2}\right)$. Если фазовая функция $p(\mu)\in L_2(-1,1)$ и для любых $\mu\in[-1,1]$ имеет место неравенство $1-$ $-i\nu\mu\neq 0$, то все уравнения (2.1), (2.3) являются уравнениями Фредгольма. Если $\omega_0\in(0,1)$, то эти уравнения можно привести к стандартной форме интегральных уравнений Фредгольма [5, 11]. В общем случае, когда $\nu\in\mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ — открытая комплексная плоскость), под элементами дискретных и непрерывных спектров в RTT понимаются значения параметра ν (или параметра $\zeta=-i\nu$), для которых существуют нетривиальные регулярные (обычные) и сингулярные решения уравнений (2.1), (2.3) соответственно. Непрерывные спектры всех уравнений (2.1), (2.3) совпадают с множеством $\underset{\sim}{\tilde{S}}=((-i\infty,-i]\bigcup[i,+i\infty))$ [9, 11]. Дискретные спектры всех уравнений (3), когда $1-i\nu\mu\neq 0$ для любых $\mu\in[-1,1]$, могут принадлежать только интервалу $(-i,i)$ [7, 9–11]. Дискретный спектр уравнения (2.1), когда $p(\mu)\in L_2(-1,1)$, не является пустым множеством и оно может быть только счетным множеством, которое является объединением дискретных спектров всех уравнений (2.3) [7]. Предельными точками указанных выше дискретных спектров могут быть только точки $\nu=\pm i$ [7]. Элементы дискретных спектров могут располагаться только симметрично относительно центра интервала $(-i,i)$ [7, 11].

Для приложений RTT представляет интерес проблема отыскания по заданной фазовой функции концов интервалов или отрезков, которым не могут принадлежать элементы дискретных спектров уравнений (2.1), (2.3). Необходимость решения этой проблемы возникает, например, при оценке порядков остаточных членов асимптотических решений BVPs для RTE для случаев оптически толстых дисперсных сред.

3. Об ограничениях, накладываемых на дискретные спектры структурой ядер интегральных скалярных характеристических уравнений и аналитическими свойствами бесконечных непрерывных дробей

В конструктивной теории характеристических уравнений RTT [5, 6] особую роль играют аналитические свойства следующих бесконечных непрерывных дробей:

$$\wp_0\left(\nu^2;|m|;\omega_0\right)=\left[1;\frac{q_0(|m|;\omega_0)\,\nu^2}{1},\frac{q_1(|m|;\omega_0)\,\nu^2}{1},...\right]=1+\mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty}\left(\left(q_{n-1}(|m|;\omega_0)\,\nu^2\right)/1\right)=$$

$$=1+\cfrac{q_0(|m|;\omega_0)\,\nu^2}{1+\cfrac{q_1(|m|;\omega_0)\nu^2}{1+\ddots}};\tag{3.1}$$

$$\wp_2\left(\nu^2;0;1\right)=\left[1;\frac{q_2(0;1)\,\nu^2}{1},\frac{q_3(0;1)\,\nu^2}{1},...\right]=1+\mathop{\mathrm{K}}_{n=1}^{+\infty}\left(\left(q_{n+1}(0;1)\,\nu^2\right)/1\right).\tag{3.2}$$

Здесь $(|m|,\omega_0) \in Q = (N_0 \times (0,1)) \cup (N \times (0,1])$, где $N = N_0 \backslash \{0\}$;
$q_l(|m|;\omega_0) = (l+1)(l+1+2|m|)\left(\chi_l^{\times}(|m|;\omega_0)\,\chi_{l+1}^{\times}(|m|;\omega_0)\right)^{-1}$,
где $\chi_l^{\times}(|m|;\omega_0) = (2(l+|m|)+1)\left(1-\omega_0 f_{l+|m|}\right)$. В [5, 6, 11] было доказано, что для случая неконсервативного рассеяния ($\omega_0 \in (0,1)$) соответствующий индексу $|m|$ дискретный спектр уравнения из семейства (2.3) совпадает со множеством нулей бесконечной непрерывной дроби $\wp_0\left(\nu^2;|m|;\omega_0\right)$. Если $\omega_0 = 1$ (рассеяние консервативно), то в [5] было установлено, что дискретный спектр уравнения из семейства (2.3), соответствующего индексу $|m| = 0$, является объединением элемента $\{0\}$ и множества нулей бесконечной непрерывной дроби (3.2). Все нули дробей (3.1), (3.2) принадлежат интервалу $(-i;i)$ [5, 6, 11]. В силу этого в (2.1), (2.3) можно заменить параметр ν на величину $\zeta = -i\nu$ ($\zeta \in (-1,1)$). Имеет место

Л е м м а 3.1. *Пусть $p(\mu) \in L_2(-1,1)$, $\nu = i\zeta$, $\zeta \in [-\Delta,\Delta] \subset (-1,1)$, $\left\|\hat{\mathrm{K}}_{|m|}\right\|_{L_2(-1,1)}$ — норма соответствующего индексу m интегрального оператора уравнения из семейства (2.3) в классе $L_2(-1,1)$. Тогда для любого $|m| \in N_0$ верно неравенство*

$$\left\|\hat{\mathrm{K}}_{|m|}\right\|_{L_2(-1,1)} \le \omega_0(1-\Delta)^{-1}\left[\sum_{l=|m|}^{+\infty} f_l^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{3.3}$$

в котором числовой ряд сходится.

Из леммы 3.1, принадлежности элементов дискретных спектров уравнений (2.1), (2.3) только интервалу $(-i,i)$ и принципа сжимающих отображений следует, что верна

Т е о р е м а 3.1. *Допустим, что $p(\mu) \in L_2(-1,1)$ и $\omega_0 \in (0,1]$. Тогда для любого $\Delta \in (0,1)$ существует такое конечное число $m_0(\Delta;\omega_0) \in N_0$, что для любых $|m| \ge m_0(\Delta;\omega_0)$ однородные аналоги интегральных уравнений из семейства (3) не имеют нетривиальных решений в $L_2(-1,1)$ на отрезке $[-i\Delta,i\Delta]$. При этом такие решения могут существовать только на подмножестве $(-i,-i\Delta) \cup (i\Delta,i)$ множества $\mathbb{C}$.*

С использованием леммы 3.1 и теорем 2, 3, 7, 12 и формулы (17) из статей [5, 6] устанавливается, что справедливо

С л е д с т в и е 3.1. *Предположим, что $p(\mu) \in L_2(-1,1)$, пара $(|m|,\omega_0) \in Q = (N_0 \times (0,1)) \cup (N \times (0,1])$, $\Delta \in (0,1)$ и $m_0(\Delta;\omega_0)$ — число, принадлежащее N_0 и удовлетворяющее неравенству $\Delta < 1 - \omega_0\left[\sum\limits_{l=m_0(\Delta;\omega_0)}^{+\infty} f_l^2\right]^{\frac{1}{2}}$. Тогда для любого $|m| \ge m_0(\Delta;\omega_0)$ бесконечная непрерывная дробь $\wp_0\left(\nu^2;|m|;\omega_0\right)$ не имеет нулей относительно параметра ν на отрезке $[-i\Delta;i\Delta]$. При этом для любых $|m| \ge m_0(\Delta;\omega_0)$ бесконечные непрерывные дроби $\left(\wp_0\left(\nu^2;|m|;\omega_0\right)\right)^{-1}$ являются аналитическими функциями на множестве $\mathbb{C}\backslash\left((-i\infty,-i\Delta] \cup [i\Delta,+i\infty)\right)$.*

Обозначим символом $\tilde{m}_0(\omega_0)$ наименьшее число из множества N_0, удовлетворяющее неравенству $0 < \tilde{\Delta}(\tilde{m}_0(\omega_0)) = 1 - \omega_0\left[\sum\limits_{l=\tilde{m}_0(\omega_0)}^{+\infty} f_l^2\right]^{\frac{1}{2}}$, где $\omega_0 \in (0,1]$. В силу сходимости ряда $\sum\limits_{l=0}^{+\infty} f_l^2$ такое наименьшее число всегда существует, если $p(\mu) \in L_2(-1,1)$.

З а м е ч а н и е 3.1. Если $p(\mu) \in L_2(-1,1)$ и $\omega_0 \in (0,1]$, то для любых $(|m|,\nu) \in \{\tilde{m}_0(\omega_0), \tilde{m}_0(\omega_0)+1,...\} \times \times \left(-i\tilde{\Delta}(m_0(\omega_0)), i\tilde{\Delta}(m_0(\omega_0))\right)$ однородные аналоги интегральных уравнений из семейства (2.3) не имеют нетривиальных решений в классе $L_2(-1,1)$, а дроби $\wp_0\left(\nu^2;|m|;\omega_0\right)$ не имеют нулей. При этом бесконечные непрерывные дроби $\left(\wp_0\left(\nu^2;|m|;\omega_0\right)\right)^{-1}$ являются аналитическими функциями на множестве $\mathbb{C}\backslash\left(\left(-i\infty,-i\tilde{\Delta}(\tilde{m}_0(\omega_0))\right] \cup \left[i\tilde{\Delta}(\tilde{m}_0(\omega_0)),+i\infty\right)\right)$.

Из условия нормировки фазовой функции $p(\mu)$ из класса $L_2(-1,1)$ следует, что верно

Замечание 3.2. Пусть $p(\mu)$ — фазовая функция из класса $L_2(-1,1)$. Тогда при $\omega_0 = 1$ число $\tilde{m}_0(1)$ не может равняться нулю. Если $\omega_0 \in (0,1)$, то число $\tilde{m}_0(\omega_0)$ может быть равным нулю, когда выполнено неравенство $\omega_0 < \left[\sum\limits_{l=0}^{+\infty} f_l^2\right]^{-\frac{1}{2}}$. При выполнении данного неравенства все бесконечные непрерывные дроби $\wp_0\left(\nu^2; |m|; \omega_0\right)$, когда $|m| \in N_0$, не имеют нулей на $\left(-i\tilde{\Delta}(0), i\tilde{\Delta}(0)\right)$.

Для приложений RTT представляет особый интерес анализ ситуаций, когда $\tilde{m}_0(\omega_0) \in N$ и $m \in \{0, ..., \tilde{m}_0(\omega_0) - 1\}$. Имеет место

Теорема 3.2. *Допустим, что фазовая функция* $p(\mu) \in L_2(-1,1)$, $(m, \omega_0) \in Q$, $f^* = \sup\limits_{l \in N} \{|f_l|\}$, $f^{**} = \sup\limits_{l \in \{2,3,...\}} \{|f_l|\}$, $f^{***} = \sup\limits_{l \in \{3,4,...\}} \{|f_l|\}$. *Тогда будут верны такие утверждения:*

1) если $\tilde{m}_0(\omega_0) \in N$, $m = 0$, *то бесконечная непрерывная дробь* $\wp_0\left(\nu^2; 0; \omega_0\right)$ *не имеет нулей на отрезке* $[-ia_1, ia_1]$, *где* $a_1 = \frac{1}{4}\sqrt{3(1-\omega_0)(1-\omega_0 f^*)(\tilde{m}_0(\omega_0))^{-1}}$;

2) если $\tilde{m}_0(\omega_0) \in \{2, 3, ...\}$, $m \in \{1, ..., \tilde{m}_0(\omega_0) - 1\}$, *то дроби* $\wp_0\left(\nu^2; m; \omega_0\right)$ *не имеют нулей на отрезке* $[-ia_2, ia_2]$, *где* $a_2 = \frac{1}{4}\sqrt{3(1-\omega_0 f^*)(1-\omega_0 f^{**})(\tilde{m}_0(\omega_0))^{-1}}$;

3) бесконечная непрерывная дробь $\wp_2\left(\nu^2; 0; 1\right)$ *не имеет нулей на отрезке* $[-ia_3, ia_3]$, *где* $a_3 = \frac{2}{3}\sqrt{(1-f^{**})(1-f^{***})}$;

4) бесконечные непрерывные дроби $\left(\wp_0\left(\nu^2; 0; \omega_0\right)\right)^{-1}$, $\left(\wp_0\left(\nu^2; m; \omega_0\right)\right)^{-1}\Big|_{\substack{\tilde{m}_0(\omega_0) \in N \setminus \{1\} \\ m \in \{1, ..., \tilde{m}_0(\omega_0) - 1\}}}$, $\left(\wp_2\left(\nu^2; 0; 1\right)\right)^{-1}$ *являются аналитическими функциями соответственно на множествах* $\mathbb{C} \setminus ((-i\infty, -ia_1] \cup [ia_1, +i\infty))$, $\mathbb{C} \setminus ((-i\infty, -ia_2] \cup [ia_2, +i\infty))$, $\mathbb{C} \setminus ((-i\infty, -ia_3] \cup [ia_3, +i\infty))$.

Доказательство. Положим, $\nu = i\zeta$ $(\zeta \in (-1,1))$ и рассмотрим бесконечную непрерывную дробь $\left(-\frac{1}{4}\zeta^2 / \wp_0\left(-\zeta^2; 0; \omega_0\right)\right)$. Согласно теореме Ворпицкого [12] эта дробь будет сходиться к конечному пределу, если будут верны все неравенства $\left|\frac{1}{4}\zeta^2\right| \le \frac{1}{4}$, $\left|q_{n-2}(0;\omega_0)\zeta^2\right| \le \frac{1}{4}$ $(n \in \{2, 3, ...\})$. Поскольку $\zeta \in (-1,1)$, то первое неравенство выполняется автоматически. Для выполнения всех остальных неравенств следует считать, что $|\zeta| \le \frac{1}{2}[q_l(0;\omega_0)]^{-\frac{1}{2}}$ для любых $l \in N_0$. Используя определение величин $q_l(0;\omega_0)$ и произведя нижние оценки правых частей всех этих неравенств, получим, что для всех $l \in N_0$ имеет место оценка $a_1 \le \frac{1}{2}[q_l(0;\omega_0)]^{-\frac{1}{2}}$. Следовательно, если считать, что $\zeta \in [-a_1; a_1]$, то бесконечная непрерывная дробь $\left(\frac{1}{4}\nu^2 / \wp_0\left(\nu^2; 0; \omega_0\right)\right)$ на отрезке $[-ia_1; ia_1]$ будет сходиться к конечному пределу. В силу этого бесконечная непрерывная дробь $\wp_0\left(\nu^2; 0; \omega_0\right)$ на отрезке $[-ia_1; ia_1]$ не будет иметь нулей (если $\nu = 0$ и $\omega_0 \in (0,1)$, то $\wp_0(0;0;\omega_0) = 1$). Доказательства справедливости утверждений 2), 3) проводятся аналогичным образом. Верность утверждения 4) следует из истинности утверждений 1), 2), 3) и теоремы 6 из статьи [5]. Теорема доказана.

При корректном вычислении бесконечных непрерывных дробей, которые используются в конструктивной теории интегральных скалярных характеристических уравнений [5, 6], необходимо принимать во внимание аналитические свойства бесконечных непрерывных дробей $\wp_0\left(\nu^2; m; 0\right) = \left[1; \frac{q_0(m;0)\nu^2}{1}, \frac{q_1(m;0)\nu^2}{1}, ...\right]$, которые для любых $m \in N_0$ совпадают с (3.1) при формальной замене в них величины ω_0 на нуль. Имеет место

Теорема 3.3. *Для любого конечного* $m \in N_0$ *бесконечные непрерывные дроби* $\wp_0\left(\nu^2; m; 0\right)$, $\left(\wp_0\left(\nu^2; m; 0\right)\right)^{-1}$ *являются аналитическими функциями на множестве* $\mathbb{C} \setminus ((-i\infty, -i] \cup [i + i\infty))$.

Справедливость теоремы устанавливается посредством использования теоремы 12 из статьи [6] и равенства $\int\limits_{-1}^{1} (1 - i\nu\mu)^{-1} P_{m,m}^2(\mu)\, d\mu = 2(2m)!\left((2m+1)\,\wp_0\left(\nu^2; m; 0\right)\right)^{-1}$.

Литература

1. *Амбарцумян В.А.* Новый способ расчета рассеяния света в мутной среде. *Изв. АН СССР, сер.геогр. и геофиз.* No. 3 (1942), 97.

2. *Роговцов Н.Н. Свойства и принципы инвариантности. Приложение к решению задач математической физики. Ч.1.* Минск: МО РБ, БГПА, 1999.

3. *Rogovtsov N.N.* General Invariance Relations Reduction Method and Its Applications to Solutions of Radiative Transfer for Turbid Media of Various Configurations. In: Light Scattering Reviews/Ed. Kokhanovsky A.A. *Chichester: Springer-Praxis.* Vol. 5, 2010, 249–327.

4. *Rogovtsov N.N., Borovik F.N.* Applications of General Invariance Relations Reduction. Method to Solution of Radiation Transfer Problems. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer.* Vol. 183, 2016, 128–153.

5. *Rogovtsov N.N.* Constructive Theory of Scalar Characteristics Equations of Theory of Radiation Transport: I. Basic Assertions of the Theory and Conditions for the Applicability of the Truncation Methal. *Differential Equations.* Vol. 51, №2, 2015, 268–281.

6. *Rogovtsov N.N.* Constructive Theory of Scalar Characteristics Equations of Theory of Radiation Transport: II. Algorithms for Finding Solutions and Their Analytic Representations. *Differential Equations.* Vol. 51, №5, 2015, 661–673.

7. *Масленников М.А.* Проблема Милна с анизотропным рассеянием. *Тр. Мат. ин-та АН СССР.* Т. 47, (1968), 3–132.

8. *Фельдман И.А.* О дискретном спектре характеристического уравнения теории переноса излучения. *Математические исследования, Кишинев.* Т. 10, No. 1(35) (1975), 236–243.

9. *Гермогенова Т.А., Шулая Д.А.* О характеристическом уравнении теории переноса излучения. *Доклады АН СССР.* Т. 231, No. 4 (1976), 841–844.

10. *Роговцов Н.Н.* О решении характеристического уравнения теории переноса излучения в замкнутой форме. *В: Труды международной конференции. Краевые задачи, специальные функции и дробное исчисление / Под ред. Килбаса А.А. Минск.* (1996), 305–312.

11. *Rogovtsov N.N., Borovik F.N.* The Characteristic Equation of Radiative Transfer Theory. In: Light Scattering Reviews/Ed. Kokhanovsky A.A. *Chichester: Springer-Praxis.* Vol. 4, 2009, 347–429.

12. *Джоунс У., Трон В. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения.* М.: Мир, 1985.

УДК 517.983+517.444

МНОГОМЕРНЫЕ МОДИФИЦИРОВАННЫЕ G- И H- ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ИХ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

С. М. Ситник[1], **О. В. Скоромник**[2], **М. В. Папкович**[3]

e-mail: [1]sitnik@bsu.edu.ru, [2]skoromnik@gmail.com, [3]mpapkovich@yandex.by

В работе, имеющей обзорный характер, рассматриваются пять классов многомерных интегральных преобразований с H- функцией Фокса, G-функцией Мейера, гипергеометрической функцией Гаусса и функцией Лежандра первого рода в ядрах в весовых пространствах интегрируемых функций в области $\mathrm{R}^n_+ = \mathrm{R}^1_+ \times \mathrm{R}^1_+ \times ... \times \mathrm{R}^1_+$. Получены условия ограниченности и взаимной однозначности операторов таких преобразований из одних пространств интегрируемых функций в другие, доказаны аналоги формулы интегрирования по частям. Для рассматриваемых преобразований установлены различные интегральные представления и выведены формулы обращения.

Keywords: *многомерные интегральные преобразования со специальными функциями в ядрах; многомерное преобразование Меллина; H-функция Фокса; G-функция Мейера; гипергеометрическая функция Гаусса; функция Лежандра первого рода; пространство интегрируемых функций; дробные интегралы и производные.*

MULTIDIMENSIONAL MODIFIED G- AND H-TRANSFORMS AND THEIR SPECIAL CASES

S. M. Sitnik[1], **O. V. Skoromnik**[2], **M. V. Papkopvich** [3]

e-mail: [1]sitnik@bsu.edu.ru, [2]skoromnik@gmail.com, [3]mpapkovich@yandex.by

This survey paper considers five classes of multidimensional integral transforms with Fox H-function, the Meyer G-function, the Gauss hypergeometric function, and Legendre function of the first kind in kernels in weighted spaces integrable functions in the domain $\mathrm{R}^n_+ = \mathrm{R}^1_+ \times \mathrm{R}^1_+ \times \times ... \times \mathrm{R}^1_+$. Boundedness and one-to-one correspondence conditions are obtained for operators of such transforms from some spaces of integrable functions into others, analogs of the integration-by-parts formula are proved. For the considered transforms, various integral representations and inversion formulas are derived.

Keywords: *multidimensional integral transformations with special functions in kernels; multidimensional Mellin transform; Fox H-function; Mejer G-function; Gauss hypergeometric function; Legendre function of the first kind; space of integrable functions; fractional integrals and derivatives.*

Mathematics Subject Classification (2020): Primary 35A22, 33C60, Secondary 44A30.

1. Введение

Рассматриваются многомерные интегральные преобразования [1, формулы (40) и (41); 2, формулы (1.1)–(1.3)]:

$$\left(\mathrm{H}^1_{\sigma,\kappa} f\right)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\sigma} \int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{x}} \mathrm{H}^{\mathbf{m},\,\mathbf{n}}_{\mathbf{p},\,\mathbf{q}} \left[\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}} \middle| \begin{array}{c} (\mathbf{a}_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (\mathbf{b}_j, \beta_j)_{1,q} \end{array} \right] \mathbf{t}^{\kappa} f(\mathbf{t}) \frac{\mathbf{dt}}{\mathbf{t}} (\mathbf{x} > 0); \tag{1.1}$$

$$\left(\mathrm{G}^1_{\sigma,\kappa} f\right)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\sigma} \int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{x}} \mathrm{G}^{\mathbf{m},\,\mathbf{n}}_{\mathbf{p},\,\mathbf{q}} \left[\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}} \middle| \begin{array}{c} (\mathbf{a}_i)_{1,p} \\ (\mathbf{b}_j)_{1,q} \end{array} \right] \mathbf{t}^{\kappa} f(\mathbf{t}) \frac{\mathbf{dt}}{\mathbf{t}} (\mathbf{x} > 0); \tag{1.2}$$

$$\left(\mathrm{G}^{1}_{\sigma,\kappa;\,\delta}f\right)(\mathbf{x})=\mathbf{x}^{\sigma}\int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{x}}\mathrm{G}^{\mathbf{m},\,\mathbf{n}}_{\mathbf{p},\,\mathbf{q}}\left[\frac{\mathbf{x}^{\delta}}{\mathbf{t}^{\delta}}\middle|\begin{matrix}(\mathbf{a}_i)_{1,p}\\(\mathbf{b}_j)_{1,q}\end{matrix}\right]\mathbf{t}^{\kappa}f(\mathbf{t})\frac{\mathbf{dt}}{\mathbf{t}}(\mathbf{x}>0); \qquad (1.3)$$

$$\left({}_1\mathrm{I}_{\sigma,\omega;\,\zeta}f\right)(\mathbf{x})=\mathbf{x}^{\sigma}\int\limits_{0}^{\mathbf{x}}\frac{\left(\mathbf{x}^{\zeta}-\mathbf{t}^{\zeta}\right)^{c-1}}{\Gamma(c)}{}_2\mathrm{F}_1\left(a,b;c;1-\frac{\mathbf{x}^{\zeta}}{\mathbf{t}^{\zeta}}\right)\mathbf{t}^{\omega}f(\mathbf{t})d\mathbf{t}\ (\mathbf{x}>\mathbf{0}); \qquad (1.4)$$

$$\left(\mathrm{P}^{\gamma}_{\delta,1}f\right)(\mathbf{x})=\int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{x}}\left(\mathbf{x}^2-\mathbf{t}^2\right)^{-\gamma/2}\mathrm{P}^{\gamma}_{\delta}\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}}\right)f(\mathbf{t})\mathbf{dt}=g(\mathbf{x})\ \ (\mathbf{x}>0); \qquad (1.5)$$

где (см., например, [1–2; 3, п. 28.4; 4–5]) $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathrm{R}^n$; $\mathbf{t}=(t_1,t_2,...,t_n)\in\mathrm{R}^n$, R^n — Евклидово n-мерное пространство; $\mathbf{x}\cdot\mathbf{t}=\sum\limits_{n=1}^{n}x_nt_n$ — скалярное произведение; в частности, $\mathbf{x}\cdot\mathbf{1}=\sum\limits_{n=1}^{n}x_n$ for $\mathbf{1}=(1,...,1)$. Выражение $\mathbf{x}>\mathbf{t}$ означает $x_1>t_1,...,x_n>t_n$, аналогично для знаков $\geq$, $<$, $\leq$; $\int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{x}}=\int\limits_{\mathbf{0}}^{x_1}\int\limits_{\mathbf{0}}^{x_2}\cdots\int\limits_{\mathbf{0}}^{x_n}$; $\mathrm{N}=\{1,2,...\}$ — множество натуральных чисел, $\mathrm{N}_0=\mathrm{N}\bigcup\{0\}$,$\mathrm{N}_0^n=$ $=\mathrm{N}_0\times\mathrm{N}_0\times...\times\mathrm{N}_0$, $\mathrm{R}^n_+=\{\mathbf{x}\in\mathrm{R}^n,\ \mathbf{x}>0\}$; C^n $(n\in\mathrm{N})$ — n-мерное пространство комплексных чисел $z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)$ $(z_j\in\mathrm{C},\ j=1,2,\cdots,n)$;

$\mathbf{m}=(m_1,m_2,...,m_n)\in\mathrm{N}_0^n$ и $m_1=m_2=...=m_n$; $\mathbf{n}=(\overline{n}_1,\overline{n}_2,...,\overline{n}_n)\in\mathrm{N}_0^n$ и $\overline{n}_1=\overline{n}_2=...=$ $=\overline{n}_n$; $\mathbf{p}=(p_1,p_2,...,p_n)\in\mathrm{N}_0$ и $p_1=p_2=...=p_n$; $\mathbf{q}=(q_1,q_2,...,q_n)\in\mathrm{N}_0$ и $q_1=q_2=...=q_n)$ $(0\leq\mathbf{m}\leq\mathbf{q},\ 0\leq\mathbf{n}\leq\mathbf{p})$;

$a=(a_1,a_2,...,a_n)\in\mathrm{C}^n$; $b=(b_1,b_2,...,b_n)\in\mathrm{C}^n$; $c=(c_1,c_2,...,c_n)\in\mathrm{C}^n$; $\omega=(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)\in\mathrm{C}^n$;
$\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)\in\mathrm{C}^n$; $\kappa=(\kappa_1,\kappa_2,...,\kappa_n)\in\mathrm{C}^n$; $\zeta=(\zeta_1,\zeta_2,...,\zeta_n)\in\mathrm{R}^n_+$;
$\delta=(\delta_1,\delta_2,...,\delta_n)\in\mathrm{R}^n$; $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n)\in\mathrm{R}^n$; $0<\gamma<1$;
$\mathbf{a}_i=(a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_n})$, $1\leq i\leq p$, $a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_n}\in\mathrm{C}$ $(1\leq i_1\leq p_1,...,1\leq i_n\leq p_n)$;
$\mathbf{b}_j=(b_{j_1},b_{j_2},...,b_{j_n})$, $1\leq j\leq q$, $b_{j_1},b_{j_2},...,b_{j_n}\in\mathrm{C}$ $(1\leq j_1\leq q_1,...,1\leq j_n\leq q_n)$;
$\alpha_i=(\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},...,\alpha_{i_n})$, $1\leq i\leq p$, $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},...,\alpha_{i_n}\in\mathrm{R}^+_1$ $(1\leq i_1\leq p_1,...,1\leq i_n\leq p_n)$;
$\beta_j=(\beta_{j_1},\beta_{j_2},...,\beta_{j_n})$, $1\leq j\leq q$, $\beta_{j_1},\beta_{j_2},...,\beta_{j_n}\in\mathrm{R}^+_1$ $(1\leq j_1\leq q_1,...,1\leq j_n\leq q_n)$;
$\mathbf{k}=(k_1,k_2,...,k_n)\in\mathrm{N}_0^n=\mathrm{N}_0\times...\times\mathrm{N}_0$ $(k_i\in\mathrm{N}_0,\ i=1,2,...,n)$ – мультииндекс с $\mathbf{k}!=k_1!\cdots k_n!$ and $|\mathbf{k}|=k_1+k_2+...+k_n$; for $l=(l_1,l_2,...,l_n)\in\mathrm{R}^n_+$
$\mathbf{D}^l=\frac{\partial^{|l|}}{(\partial x_1)^{l_1}\cdots(\partial x_n)^{l_n}}$, $\mathbf{dt}=dt_1\cdot dt_2\cdots dt_n$; $\mathbf{t}^l=t^{l_1}\cdots t^{l_n}$;
$\mathbf{x}^{\zeta}-\mathbf{t}^{\zeta}=(x_1^{\zeta_1}-t_1^{\zeta_1})\cdots(x_n^{\zeta_n}-t_n^{\zeta_n})$; $f(\mathbf{t})=f(t_1,t_2,...,t_n)$; функция

$$\mathrm{H}^{\mathbf{m},\,\mathbf{n}}_{\mathbf{p},\,\mathbf{q}}\left[\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}}\middle|\begin{matrix}(\mathbf{a}_i,\alpha_i)_{1,p}\\(\mathbf{b}_j,\beta_j)_{1,q}\end{matrix}\right]=\prod_{k=1}^{n}H^{m_k,\,\overline{n}_k}_{p_k,\,q_k}\left[\frac{x_k}{t_k}\middle|\begin{matrix}(a_{i_k},\alpha_{i_k})_{1,p_k}\\(b_{j_k},\beta_{j_k})_{1,q_k}\end{matrix}\right], \qquad (1.6)$$

представляет собой произведение H-функций $H^{m,n}_{p,q}[z]$:

$$H^{m,n}_{p,q}[z]\equiv H^{m,n}_{p,q}\left[z\middle|\begin{matrix}(a_i,\alpha_i)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{matrix}\right]=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\mathcal{H}^{m,n}_{p,q}(s)z^{-s}ds,\ \ z\neq0, \qquad (1.7)$$

где

$$\mathcal{H}^{m,n}_{p,q}(s)\equiv\mathcal{H}^{m,n}_{p,q}\left[\begin{matrix}(a_i,\alpha_i)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{matrix}\middle|s\right]=\frac{\prod\limits_{j=1}^{m}\Gamma(b_j+\beta_js)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma(1-a_i-\alpha_is)}{\prod\limits_{i=n+1}^{p}\Gamma(a_i+\alpha_is)\prod\limits_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j-\beta_js)}; \qquad (1.8)$$

а функция $\mathrm{G}^{\mathbf{m},\,\mathbf{n}}_{\mathbf{p},\,\mathbf{q}}\left[\mathbf{z}\middle|\begin{matrix}(\mathbf{a}_i)_{1,p}\\(\mathbf{b}_j)_{1,q}\end{matrix}\right]=\prod\limits_{k=1}^{n}\mathrm{G}^{m_k,\,\overline{n}_k}_{p_k,\,q_k}\left[z_k\middle|\begin{matrix}(a_{i_k})_{1,p_k}\\(b_{j_k})_{1,q_k}\end{matrix}\right]$ – есть произведение G-функций $G^{m_k,\,\overline{n}_k}_{p_k,\,q_k}[z_k]$ $(k=1,2,...n)$:

$$G^{m,n}_{p,q}[z]\equiv G^{m,n}_{p,q}\left[z\middle|\begin{matrix}(a_i)_{1,p}\\(b_j)_{1,q}\end{matrix}\right]=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\mathcal{G}^{m,n}_{p,q}(s)z^{-s}ds,\ \ z\neq0, \qquad (1.9)$$

где

$$\mathcal{G}_{p,\,q}^{m,n}(s) \equiv \mathcal{G}_{p,\,q}^{m,n}\left[\begin{matrix}(a_i)_{1,p}\\(b_j)_{1,q}\end{matrix}\middle| s\right] = \frac{\prod\limits_{j=1}^{m}\Gamma(b_j+s)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma(1-a_i-s)}{\prod\limits_{i=n+1}^{p}\Gamma(a_i+s)\prod\limits_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j-s)}. \qquad (1.10)$$

В (1.7) и (1.9) L — специально выбранный бесконечный контур, а пустые произведения, если таковые имеются, считаются равными единице. H-функция является наиболее общей из известных специальных функций и включает в качестве частных случаев элементарные функции, специальные функции гипергеометрического и бесселева типа, а также G-функцию Мейера (1.9), получающуюся из H-функции (1.7) при $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_p = \beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_q = 1$ [6, п. 2.9]. Современная теория H- и G-функций (1.7), (1.9) представлена в главах 1–2 монографии [6]. С элементами теории H-функции (1.7) и ее специальными случаями можно ознакомиться также в книгах [7–10].

Функция ${}_2\mathrm{F}_1(a, b; c; z)$ (см., например, [2; 11]) в (1.4) представляет собой произведение гипергеометрических функций Гаусса

$${}_2\mathrm{F}_1(a, b; c; z) = \prod_{k=1}^{n} {}_2F_1(a_k, b_k; c_k; z_k),$$

а функция [1; 11]

$$\mathrm{P}_{\delta}^{\gamma}[\mathbf{z}] = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{P}_{\delta_k}^{\gamma_k}[z_k]$$

является произведением функций Лежандра первого рода $\mathrm{P}_{\overline{\delta}}^{\overline{\gamma}}(z)$. Более подробно с теорией гипергеометрической функцией Гаусса и функцией Лежандра можно ознакомиться, например, в [12].

В 1993–1998 годах А.А. Килбасом и М.Сайго была разработана теория интегральных H-преобразований со специальными функциями общего типа в ядрах, а именно H-функциями, в пространствах $\mathfrak{L}_{\nu,\,r}$ суммируемых функций. Применяя технику преобразования Меллина и учитывая асимптотические свойства H-функции, была построена теория интегральных H-преобразований с такими функциями в ядрах в пространствах $\mathfrak{L}_{\nu,\,r}$. Полученные результаты представлены в [6].

Одна из научных задач, поставленных А.А. Килбасом, состояла в исследовании с точки зрения теории H-преобразований в весовых пространствах r-суммируемых функций $\mathfrak{L}_{\nu,\,r}$ на действительной полуоси со степенным весом одномерных интегральных преобразований с гипергеометрической функцией Гаусса и функцией Лежандра первого рода. Полученные результаты опубликованы в работах [13; 14].

Дальнейшей темой исследований А.А. Килбас видел задачу рассмотрения аналогичных свойств интегральных преобразований со специальными функциями в ядрах для многомерных случаев. Исследования в этом направлении (хотя и достаточно обширные) в настоящее время находятся на начальном этапе. В настоящей работе представлены свойства многомерных преобразований (1.1)–(1.5) в весовых пространствах $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\,\overline{2}}$ интегрируемых функций $f(\mathbf{x})= f(x_1, ..., x_n)$ на $\mathrm{R}^{\mathbf{n}}_{+}$, для которых :

$$\|f\|_{\overline{\nu},\overline{2}} = \{\int_{R^1_+} x_n^{\nu_n\cdot 2-1}\{\cdots\{\int_{R^1_+} x_2^{\nu_2\cdot 2-1}[\int_{R^1_+} x_1^{\nu_1\cdot 2-1}|f(x_1, ..., x_n)|^2 dx_1]dx_2\}\cdots\}dx_n\}^{1/2} < \infty$$

($\overline{2} = (2, 2, ..., 2)$, $\overline{\nu} = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n) \in \mathrm{R}^n$, $\nu_1 = \nu_2 = ... = \nu_n$), для таких преобразований получены различные интегральные представления и выведены формулы их обращения. Результаты исследования для преобразований (1.1), (1.2) и (1.3)–(1.5) обобщают полученные ранее для соответствующих одномерных случаев [6, гл. 5 и 6] и [13], [14] соответственно.

2. Предварительные сведения

Множество ограниченных линейных операторов, действующих из банахова пространства X в банахово пространства Y, обозначим через $[X, Y]$. Для $\overline{\nu} = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n) \in \mathrm{R}^n$, $\overline{r} = (r_1, r_2, ..., r_n) \in \mathrm{R}^n$ $(1 < \overline{r} < \infty)$ через $\mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{r}}$ обозначим пространство интегрируемых функций $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ с весом на $\mathrm{R}^{\mathbf{n}}_{+}$, для которых

$$\|f\|_{\overline{\nu},\overline{r}} = \left\{ \int_{R^1_+} x_n^{\nu_n \cdot r_n - 1} \left\{ \cdots \left\{ \int_{R^1_+} x_2^{\nu_2 \cdot r_2 - 1} \right.\right.\right.$$

$$\times \left[\int_{R^1_+} x_1^{\nu_1 \cdot r_1 - 1} |f(x_1, ..., x_n)|^{r_1} dx_1 \right]^{r_2/r_1} dx_2 \Bigg\}^{r_3/r_2} \cdots \Bigg\}^{r_n/r_{n-1}} dx_n \Bigg\}^{1/r_n} < \infty.$$

Многомерное интегральное преобразование Меллина $(\mathfrak{M}f)(\mathbf{x})$ функции $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathrm{R}^n_+$, определяется по формуле

$$(\mathfrak{M}f)(\mathbf{s}) = \int\limits_0^\infty f(\mathbf{t})\mathbf{t}^{\mathbf{s}-1}\mathbf{dt}, \; Re(\mathbf{s}) = \overline{\nu}, \tag{2.1}$$

$\mathbf{s} = (s_1, s_2, ..., s_n) \in \mathrm{C}^n$; обратное преобразование Меллина для $\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n_+$ дается формулой

$$(\mathfrak{M}^{-1}g)(\mathbf{x}) = \mathfrak{M}^{-1}[g(\mathbf{p})](\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\gamma_1 - i\infty}^{\gamma_1 + i\infty} \cdots \int_{\gamma_n - i\infty}^{\gamma_n + i\infty} \mathbf{x}^{-\mathbf{s}} g(\mathbf{s})\mathbf{ds}, \tag{2.2}$$

$\gamma_j = \mathrm{Re}(s_j)$ $(j = 1, \cdots, n)$. С теорией многомерных интегральных преобразований (2.1), (2.2) можно ознакомиться, например, в книгах [15; 5, глава 1]. Пусть $\mathbf{M}_\xi$, $\mathbf{N}_\varrho$, $\mathbf{R}$ элементарные операторы [5, Глава 1]:

$$(\mathbf{M}_\xi f)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\xi f(\mathbf{x}) \; (\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n, \; \xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in \mathrm{C}^n); \tag{2.3}$$

$$(\mathbf{N}_\varrho f)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^\varrho) \; (\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n, \; \varrho = (\varrho_1, \varrho_2, ..., \varrho_n) \in \mathrm{R}^n, \; \varrho \neq 0); \tag{2.4}$$

$$(\mathbf{R}f)(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mathbf{x}} f\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right). \tag{2.5}$$

Эти операторы обладают свойствами [1, лемма 1; 2, лемма 2.1]. Л е м м а 2.1. *Для* $\overline{\nu} = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n) \in R^n$ $(\nu_1 = \nu_2 = ... = \nu_n)$ *and* $1 \le \overline{r} < \infty$.

(a) $\mathbf{M}_\xi$ *является изометрическим изоморфизмом* $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{r}}$ *на* $\mathfrak{L}_{\overline{\nu} - \mathrm{Re}(\xi), \overline{r}}$*; если* $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{r}}$ $(1 \le \overline{r} \le 2)$*, тогда*

$$(\mathfrak{M}\mathbf{M}_\xi f)(\mathbf{s}) = (\mathfrak{M}f)(\mathbf{s} + \xi) \;\; (\mathrm{Re}(\mathbf{s}) = \overline{\nu} - \mathrm{Re}(\xi));$$

(b) $\mathbf{N}_\varrho$ *является ограниченным изоморфизмом* $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{r}}$ *на* $\mathfrak{L}_{\varrho\overline{\nu},\overline{r}}$*; если* $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{r}}$ $(1 \le \overline{r} \le 2)$*, тогда*

$$(\mathfrak{M}\mathbf{N}_\varrho f)(\mathbf{s}) = \frac{1}{|\varrho|}(\mathfrak{M}f)(\frac{\mathbf{s}}{\varrho}) \;\; (\mathrm{Re}(\mathbf{s}) = \varrho\overline{\nu});$$

(c) $\mathbf{R}$ *является изометрическим изоморфизмом* $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{r}}$ *на* $\mathfrak{L}_{1 - \overline{\nu},\overline{r}}$*; если* $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{r}}$ $(1 \le \overline{r} \le 2)$*, тогда*

$$(\mathfrak{M}\mathbf{R}f)(\mathbf{s}) = (\mathfrak{M}f)(1 - \mathbf{s}) \;\; (\mathrm{Re}(\mathbf{s}) = \overline{\nu}).$$

Многомерные аналоги операторов дробного интегрирования $\mathrm{I}^\alpha_{0+;\sigma,\eta}$ и $\mathrm{I}^\alpha_{-;\sigma,\eta}$ типа Эрдейи-Кобера для $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathrm{C}^n$ $(\mathrm{Re}(\alpha) > 0)$, $\sigma > 0$, $\eta \in \mathrm{C}^n$ имеют вид [1; 2]:

$$\left(\mathrm{I}^\alpha_{0+;\sigma,\eta} f\right)(\mathbf{x}) = \frac{\sigma \mathbf{x}^{-\sigma(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^{\mathbf{x}} \left(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma\right)^{\alpha-1} \mathbf{t}^{\sigma\eta+\sigma-1} f(\mathbf{t})\mathbf{dt} \; (\mathbf{x} > 0), \tag{2.6}$$

$$\left(\mathrm{I}^\alpha_{-;\sigma,\eta} f\right)(\mathbf{x}) = \frac{\sigma \mathbf{x}^{\sigma\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{\mathbf{x}}^\infty \left(\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{x}^\sigma\right)^{\alpha-1} \mathbf{t}^{\sigma(1-\alpha-\eta)-1} f(\mathbf{t})\mathbf{dt} \; (\mathbf{x} > 0). \tag{2.7}$$

3. $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$-теория и формулы обращения $\mathrm{H}^1_{\sigma,\kappa}$-преобразования

Для формулировки утверждений, представляющих $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$-теорию и формулы обращения $\mathrm{H}^1_{\sigma,\kappa}$-преобразования (1.1), нам понадобятся следующие постоянные [1, (57)–(60)], определяемые через параметры H-функции (1.6) и являющиеся аналогами соответствующих одномерных параметров [6, (3.4.1), (3.4.2), (1.1.7), (1.1.8), (1.1.10)]:

$$\alpha_1 = \begin{cases} -\min\limits_{1\le j_1\le m_1}\left[\frac{\mathrm{Re}(b_{j_1})}{\beta_{j_1}}\right], & m_1>0,\\ -\infty, & m_1=0, \end{cases} \qquad \beta_1 = \begin{cases} \min\limits_{1\le i_1\le \overline{n}_1}\left[\frac{1-\mathrm{Re}(a_{i_1})}{\alpha_{i_1}}\right], & \overline{n}_1>0,\\ \infty, & \overline{n}_1=0, \end{cases}$$

$$\alpha_2 = \begin{cases} -\min\limits_{1\le j_2\le m_2}\left[\frac{\mathrm{Re}(b_{j_2})}{\beta_{j_2}}\right], & m_2>0,\\ -\infty, & m_2=0, \end{cases} \qquad \beta_2 = \begin{cases} \min\limits_{1\le i_2\le \overline{n}_2}\left[\frac{1-\mathrm{Re}(a_{i_2})}{\alpha_{i_2}}\right], & \overline{n}_2>0,\\ \infty, & \overline{n}_2=0, \end{cases}$$

и так далее

$$\alpha_n = \begin{cases} -\min\limits_{1\le j_n\le m_n}\left[\frac{\mathrm{Re}(b_{j_n})}{\beta_{j_n}}\right], & m_n>0,\\ -\infty, & m_2=0, \end{cases} \qquad \beta_n = \begin{cases} \min\limits_{1\le i_n\le \overline{n}_n}\left[\frac{1-\mathrm{Re}(a_{i_n})}{\alpha_{i_n}}\right], & \overline{n}_n>0,\\ \infty, & \overline{n}_n=0; \end{cases} \tag{3.1}$$

$$a_1^* = \sum_{i=1}^{\overline{n}_1}\alpha_{i_1} - \sum_{i=\overline{n}_1+1}^{p_1}\alpha_{i_1} + \sum_{j=1}^{m_1}\beta_{j_1} - \sum_{j=m_1+1}^{q_1}\beta_{j_1},\ \ \Delta_1 = \sum_{j=1}^{q_1}\beta_{j_1} - \sum_{i=1}^{p_1}\alpha_{i_1},$$

$$a_2^* = \sum_{i=1}^{\overline{n}_2}\alpha_{i_2} - \sum_{i=\overline{n}_2+1}^{p_2}\alpha_{i_2} + \sum_{j=1}^{m_2}\beta_{j_2} - \sum_{j=m_1+1}^{q_2}\beta_{j_2},\ \ \Delta_2 = \sum_{j=1}^{q_2}\beta_{j_2} - \sum_{i=1}^{p_2}\alpha_{i_2},$$

и так далее

$$a_n^* = \sum_{i=1}^{\overline{n}_n}\alpha_{i_n} - \sum_{i=\overline{n}_n+1}^{p_n}\alpha_{i_n} + \sum_{j=1}^{m_n}\beta_{j_n} - \sum_{j=m_n+1}^{q_n}\beta_{j_n},\ \ \Delta_n = \sum_{j=1}^{q_n}\beta_{j_n} - \sum_{i=1}^{p_n}\alpha_{i_n}; \tag{3.2}$$

$$\mu_1 = \sum_{j=1}^{q_1} b_{j_1} - \sum_{i=1}^{p_1} a_{i_1} + \frac{p_1-q_1}{2}, \mu_2 = \sum_{j=1}^{q_2} b_{j_2} - \sum_{i=1}^{p_2} a_{i_2} + \frac{p_2-q_2}{2}, ...,$$

$$\mu_n = \sum_{j=1}^{q_n} b_{j_n} - \sum_{i=1}^{p_n} a_{i_n} + \frac{p_n-q_n}{2}, \tag{3.3}$$

$$\alpha_0^1 = \begin{cases} 1+\max\limits_{m_1+1\le j_1\le q_1}\left[\frac{\mathrm{Re}(b_{j_1})-1}{\beta_{j_1}}\right], & q_1>m_1,\\ -\infty, & q_1=m_1, \end{cases} \qquad \beta_0^1 = \begin{cases} 1+\min\limits_{\overline{n}_1+1\le i_1\le p_1}\left[\frac{\mathrm{Re}(a_{i_1})}{\alpha_{i_1}}\right], & p_1>\overline{n}_1,\\ \infty, & p_1=\overline{n}_1, \end{cases}$$

$$\alpha_0^2 = \begin{cases} 1+\max\limits_{m_2+1\le j_2\le q_2}\left[\frac{\mathrm{Re}(b_{j_2})-1}{\beta_{j_2}}\right], & q_2>m_2,\\ -\infty, & q_2=m_2, \end{cases} \qquad \beta_0^2 = \begin{cases} 1+\min\limits_{\overline{n}_2+1\le i_2\le p_2}\left[\frac{\mathrm{Re}(a_{i_2})}{\alpha_{i_2}}\right], & p_2>\overline{n}_2,\\ \infty, & p_2=\overline{n}_2, \end{cases}$$

и так далее

$$\alpha_0^n = \begin{cases} 1+\max\limits_{m_n+1\le j_n\le q_n}\left[\frac{\mathrm{Re}(b_{j_n})-1}{\beta_{j_n}}\right], & q_n>m_n,\\ -\infty, & q_n=m_n, \end{cases} \qquad \beta_0^n = \begin{cases} 1+\min\limits_{\overline{n}_n+1\le i_n\le p_2}\left[\frac{\mathrm{Re}(a_{i_n})}{\alpha_{i_n}}\right], & p_n>\overline{n}_n,\\ \infty, & p_n=\overline{n}_n. \end{cases} \tag{3.4}$$

Исключительным множеством $\mathcal{E}_{\overline{\mathcal{H}}}$ функции $\overline{\mathcal{H}}^{\mathbf{m},\mathbf{n}}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(\mathbf{s})$:

$$\overline{\mathcal{H}}^{\mathbf{m},\mathbf{n}}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}(\mathbf{s}) \equiv \overline{\mathcal{H}}^{\mathbf{m},\mathbf{n}}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}\left[\begin{matrix}(\mathbf{a}_i,\alpha_i)_{1,\mathbf{p}}\\(\mathbf{b}_j,\beta_j)_{1,\mathbf{q}}\end{matrix}\middle|\mathbf{s}\right] = \prod_{k=1}^{n}\mathcal{H}^{m_k,\overline{n}_k}_{p_k,q_k}\left[\begin{matrix}(a_{i_k},\alpha_{i_k})_{1,p_k}\\(b_{j_k},\beta_{j_k})_{1,q_k}\end{matrix}\middle|s\right], \tag{3.5}$$

назовем множество векторов $\overline{\nu} = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n) \in \mathrm{R}^n$ $(\nu_1 = \nu_2 = ... = \nu_n)$, таких что $\alpha_1 < 1 - \nu_1 < \beta_1$, $\alpha_2 < 1 - \nu_2 < \beta_2$, ..., $\alpha_n < 1 - \nu_n < \beta_n$, и функции $\mathcal{H}^{m_1,\overline{n}_1}_{p_1,q_1}(s_1)$, $\mathcal{H}^{m_2,\overline{n}_2}_{p_2,q_2}(s_2)$,...,$\mathcal{H}^{m_n,\overline{n}_n}_{p_n,q_n}(s_n)$ имеют нули на прямых $\mathrm{Re}(s_1) < 1 - \nu_1$, $\mathrm{Re}(s_2) < 1 - \nu_2$, ..., $\mathrm{Re}(s_n) < 1 - \nu_n$, соответственно [1, пункт 2.1].

Применив многомерное интегральное преобразование Меллина (2.1) к (1.1) с учетом результатов для соответствующего одномерного случая [6, формула (5.1.14)], в работе [1] получили:

$$(\mathfrak{M}\mathrm{H}^1_{\sigma,\kappa} f)(\mathbf{s}) = \overline{\mathcal{H}}^{\mathbf{m},\mathbf{n}}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}\left[\begin{matrix}(\mathbf{a}_i, \alpha_i)_{1,\mathbf{p}}\\(\mathbf{b}_j, \beta_j)_{1,\mathbf{q}}\end{matrix}\middle|\mathbf{s}+\sigma\right](\mathfrak{M}f)(\mathbf{s}+\sigma+\kappa). \tag{3.6}$$

Следующие утверждения, обобщающие одномерный случай в [6, теорема 5.37], представляют $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$- теорию модифицированного $\mathrm{H}^1_{\sigma,\kappa}$- преобразования (1.1).

Т е о р е м а 3.1. [1, теорема 9] *Пусть*

$$\alpha_1 < \nu_1 - \mathrm{Re}(\kappa_1) < \beta_1, \alpha_2 < \nu_2 - \mathrm{Re}(\kappa_2) < \beta_1, \dots, \alpha_n < \nu_n - \mathrm{Re}(\kappa_1) < \beta_n, \nu_1 = \nu_2 = ... = \nu_n;$$

$$a_1^* = 0, a_2^* = 0, ..., a_n^* = 0; \Delta_1[\nu_1 - \mathrm{Re}(\kappa_1)] + \mathrm{Re}(\mu_1) \le 0,$$
$$\Delta_2[\nu_2 - \mathrm{Re}(\kappa_2)] + \mathrm{Re}(\mu_2) \le 0, ..., \Delta_n[\nu_n - \mathrm{Re}(\kappa_n)] + \mathrm{Re}(\mu_n) \le 0. \tag{3.7}$$

Верны следующие утверждения:

(a) Существует взаимно однозначное преобразование $\mathrm{H}^1_{\sigma,\kappa} \in [\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}, \mathfrak{L}_{\overline{\nu}-\mathrm{Re}(\kappa+\sigma),\overline{2}}]$ *такое, что равенство (3.6) выполняется для* $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *и* $\mathrm{Re}(\mathbf{s}) = \overline{\nu} - \mathrm{Re}(\kappa+\sigma)$.
Если $a_1^* = 0$, $a_2^* = 0, ..., a_n^* = 0$; $\Delta_1[\nu_1 - \mathrm{Re}(\kappa_1)] + \mathrm{Re}(\mu_1) = 0, \Delta_2[\nu_2 - \mathrm{Re}(\kappa_2)] + \mathrm{Re}(\mu_2) = 0, ..., \Delta_n[\nu_n - \mathrm{Re}(\kappa_n)] + \mathrm{Re}(\mu_n) = 0$ *и* $1 - \overline{\nu} + \mathrm{Re}(\kappa) \not\in \mathcal{E}_{\overline{\mathcal{H}}}$, *тогда* $\mathrm{H}^1_{\sigma,\kappa}$ *биективно отображает* $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *на* $\mathfrak{L}_{\overline{\nu}-\mathrm{Re}(\kappa+\sigma),\overline{2}}$.

(b) Преобразование $\mathrm{H}^1_{\sigma,\kappa}$ *не зависит от* $\overline{\nu}$ *в том смысле, что если* $\overline{\nu}$ *и* $\widetilde{\overline{\nu}}$ *удовлетворяют условиям (3.7) и если преобразования* $\mathrm{H}^1_{\sigma,\kappa}$ *и* $\widetilde{\mathrm{H}}^1_{\sigma,\kappa}$ *определены в пространствах* $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *и* $\mathfrak{L}_{\widetilde{\overline{\nu}},\overline{2}}$ *равенством (3.6), тогда* $\mathrm{H}^1_{\sigma,\kappa} f = \widetilde{\mathrm{H}}^1_{\sigma,\kappa} f$ *для* $f \in \mathfrak{L}_{\widetilde{\overline{\nu}},\overline{2}} \bigcap \mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$.

(c) Если $a_1^* = 0$, $a_2^* = 0, ..., a_n^* = 0$; $\Delta_1[\nu_1 - \mathrm{Re}(\kappa_1)] + \mathrm{Re}(\mu_1) < 0, \Delta_2[\nu_2 - \mathrm{Re}(\kappa_2)] + \mathrm{Re}(\mu_2) < 0, ..., \Delta_n[\nu_n - \mathrm{Re}(\kappa_n)] + \mathrm{Re}(\mu_n) < 0$*; тогда для* $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *преобразование* $\mathrm{H}^1_{\sigma,\kappa} f$ *дается формулой (1.1).*

(d) Пусть $\overline{\lambda} = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathrm{C}^n$, $\overline{h} = (h_1, ..., h_n) > 0$, *и* $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$. *Если* $\mathrm{Re}(\overline{\lambda}) > (\overline{\nu} - \mathrm{Re}(\kappa))\overline{h} - 1$, *тогда* $\mathrm{H}^1_{\sigma,\kappa} f$ *можно представить в виде*

$$\left(\mathrm{H}^1_{\sigma,\kappa} f\right)(\mathbf{x}) = \overline{h}\mathbf{x}^{\sigma+1-(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}} \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}} \mathbf{x}^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}} \int\limits_0^\infty \mathrm{H}^{\mathbf{m},\mathbf{n}+1}_{\mathbf{p}+1,\mathbf{q}+1}\left[\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}}\middle|\begin{matrix}(-\overline{\lambda}, \overline{h}), (\mathbf{a}_i, \alpha_i)_{1,\mathbf{p}}\\(\mathbf{b}_j, \beta_j)_{1,\mathbf{q}},\ (-\overline{\lambda}-1, \overline{h})\end{matrix}\right]\mathbf{t}^{\kappa-1} f(\mathbf{t})\mathbf{dt}, \tag{3.8}$$

а при $\mathrm{Re}(\overline{\lambda}) < (\overline{\nu} - \mathrm{Re}(k))\overline{h} - 1$ *дается формулой*

$$\left(\mathrm{H}^1_{\sigma,\kappa} f\right)(\mathbf{x}) = -\overline{h}\mathbf{x}^{\sigma+1-(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}} \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}} \mathbf{x}^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}} \int\limits_0^\infty \mathrm{H}^{\mathbf{m}+1,\mathbf{n}}_{\mathbf{p}+1,\mathbf{q}+1}\left[\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}}\middle|\begin{matrix}(\mathbf{a}_i, \alpha_i)_{1,\mathbf{p}}, (-\overline{\lambda}, \overline{h})\\(-\overline{\lambda}-1, \overline{h}), (\mathbf{b}_j, \beta_j)_{1,\mathbf{q}}\end{matrix}\right]\mathbf{t}^{\kappa-1} f(\mathbf{t})\mathbf{dt}. \tag{3.9}$$

(e) Если $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *и* $g \in \mathfrak{L}_{1-\overline{\nu}+\mathrm{Re}(\kappa+\sigma),\overline{2}}$, *то имеет место формула:*

$$\int\limits_0^\infty f(\mathbf{x})\left(\mathrm{H}^1_{\sigma,\kappa} g\right)(\mathbf{x})\mathbf{dx} = \int\limits_0^\infty \left(\mathrm{H}^2_{\sigma,\kappa} f\right)(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \tag{3.10}$$

где

$$\left(\mathrm{H}^2_{\sigma,\kappa} f\right)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\sigma \int\limits_0^\infty \mathrm{H}^{\mathbf{m},\mathbf{n}}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}\left[\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{x}}\middle|\begin{matrix}(\mathbf{a}_i, \alpha_i)_{1,\mathbf{p}}\\(\mathbf{b}_j, \beta_j)_{1,\mathbf{q}}\end{matrix}\right]\mathbf{t}^\kappa f(\mathbf{t})\frac{\mathbf{dt}}{\mathbf{x}}. \tag{3.11}$$

В [1, формулы (68), (69)] были получены формулы обращения для преобразования $\mathrm{H}^1_{\sigma,\kappa}f$, обобщающие соответствующий одномерный случай в [6, (5.5.23) и (5.5.24)]):

$$f(\mathbf{x}) = -\overline{h}\mathbf{x}^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}-\kappa}\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\mathbf{x}^{-(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}}\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty \mathrm{H}^{\mathbf{q-m,p-n}+1}_{\mathbf{p}+1,\mathbf{q}+1}\left[\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{x}}\left|\begin{matrix}(-\overline{\lambda},\overline{h}),(1-\mathbf{a}_i-\alpha_i,\alpha_i)_{\mathbf{n}+1,\mathbf{p}},(1-\mathbf{a}_i-\alpha_i,\alpha_i)_{1,\mathbf{n}}\\(1-\mathbf{b}_j-\beta_j,\beta_j)_{\mathbf{m}+1,\mathbf{q}},(1-\mathbf{b}_j-\beta_j,\beta_j)_{1,\mathbf{m}}\,(-\overline{\lambda}-1,\overline{h})\end{matrix}\right.\right]\mathbf{t}^{-\sigma}(\mathrm{H}^1_{\sigma,\kappa}f)(\mathbf{t})\mathbf{dt} \tag{3.12}$$

или

$$f(\mathbf{x}) = \overline{h}\mathbf{x}^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}-1}\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\mathbf{x}^{-(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}}\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty \mathrm{H}^{\mathbf{q-m}+1,\mathbf{p-n}}_{\mathbf{p}+1,\mathbf{q}+1}\left[\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{x}}\left|\begin{matrix}(1-\mathbf{a}_i-\alpha_i,\alpha_i)_{\mathbf{n}+1,\mathbf{p}},(1-\mathbf{a}_i-\alpha_i,\alpha_i)_{1,\mathbf{n}},\,(-\overline{\lambda},\overline{h})\\(-\overline{\lambda}-1,\overline{h}),(1-\mathbf{b}_j-\beta_j,\beta_j)_{\mathbf{m}+1,\mathbf{q}},(1-\mathbf{b}_j-\beta_j,\beta_j)_{1,\mathbf{m}}\end{matrix}\right.\right]\mathbf{t}^{-\sigma}(\mathrm{H}^1_{\sigma,\kappa}f)(\mathbf{t})\mathbf{dt}. \tag{3.13}$$

Условия справедливости формул (3.12), (3.13) дает следующая теорема, которая обобщает результаты для соответствующего одномерного случая в [6, Теорема 5.47]).

Т е о р е м а 3.2. [1, теорема 10] *Пусть* $a_1^*=0, a_2^*=0,...,a_n^*=0$; $\alpha_1<\nu_1-\mathrm{Re}(\kappa_1)<\beta_1$, $\alpha_2<$ $<\nu_2-\mathrm{Re}(\kappa_2)<\beta_2,...,\ \alpha_n<\nu_n-\mathrm{Re}(\kappa_n)<\beta_n$; $\alpha_0^1<1-\nu_1+\mathrm{Re}(\kappa_1)<\beta_0^1$, $\alpha_0^2<1-\nu_2+\mathrm{Re}(\kappa_2)<\beta_0^2$,..., $\alpha_0^n<1-\nu_n+\mathrm{Re}(\kappa_n)<\beta_0^n$; *и пусть* $\overline{\lambda}\in C^n$, $\overline{h}>0$.

Если $\Delta_1[\nu_1-\mathrm{Re}(\kappa_1)]+\mathrm{Re}(\mu_1)=0$, $\Delta_2[\nu_2-\mathrm{Re}(\kappa_2)]+\mathrm{Re}(\mu_2)=0$,..., $\Delta_n[\nu_n-\mathrm{Re}(\kappa_n)]+\mathrm{Re}(\mu_n)=0$ *и* $f\in\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ $(\nu_1,\nu_2,...,\nu_n)$, *то формулы обращения (3.12) и (3.13) справедливы соответственно при* $\mathrm{Re}(\overline{\lambda})>(1-\overline{\nu}+\mathrm{Re}(\kappa))\overline{h}-1$ *и* $\mathrm{Re}(\overline{\lambda})<(1-\overline{\nu}+\mathrm{Re}(\kappa))\overline{h}-1$.

4. $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$-теории и формулы обращения многомерных $\mathrm{G}^1_{\sigma,\kappa}$-, $\mathrm{G}^1_{\sigma,\kappa;\,\delta}$-преобразований

Модифицированное $\mathrm{G}^1_{\sigma,\kappa}$-преобразование (1.2) является частным случаем модифицированного $\mathrm{H}^1_{\sigma,\kappa}$-преобразования (1.1), когда выполняются условия $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_p=\beta_1=\beta_2=$ $=...=\beta_q=1$. Поэтому $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$- теория для $\mathrm{G}^1_{\sigma,\kappa}$-преобразования (1.2) следует из соответствующих результатов для модифицированного $\mathrm{H}^1_{\sigma,\kappa}$-преобразования (1.1) и изложена в [2].

Исключительным множеством $\mathcal{E}_{\overline{\mathcal{G}}}$ функции $\overline{\mathcal{G}}^{\mathbf{m,n}}_{\mathbf{p,q}}(\mathbf{s})$:

$$\overline{\mathcal{G}}^{\mathbf{m,n}}_{\mathbf{p,\,q}}(\mathbf{s})\equiv\overline{\mathcal{G}}^{\mathbf{m,n}}_{\mathbf{p,\,q}}\left[\begin{matrix}(\mathbf{a}_i)_{1,\mathbf{p}}\\(\mathbf{b}_j)_{1,\mathbf{q}}\end{matrix}\middle|\mathbf{s}\right]=\prod_{k=1}^n\mathcal{G}^{m_k,\overline{n}_k}_{p_k,\,q_k}\left[\begin{matrix}(a_{i_k})_{1,p_k}\\(b_{j_k})_{1,q_k}\end{matrix}\middle|s\right], \tag{4.1}$$

назовем множество векторов $\overline{\nu}=(\nu_1,\nu_2,...,\nu_n)\in\mathrm{R}^n$ $(\nu_1=\nu_2=...=\nu_n)$, таких что $\alpha_1<1-\nu_1<$ $<\beta_1$, $\alpha_2<1-\nu_2<\beta_2$, ..., $\alpha_n<1-\nu_n<\beta_n$, и функции $\mathcal{G}^{m_1,\overline{n}_1}_{p_1,\,q_1}(s_1)$, $\mathcal{G}^{m_2,\overline{n}_2}_{p_2,\,q_2}(s_2)$,...,$\mathcal{G}^{m_n,\overline{n}_n}_{p_n,\,q_n}(s_n)$, имеют нули на прямых $\mathrm{Re}(s_1)<1-\nu_1$, $\mathrm{Re}(s_2)<1-\nu_2$, ..., $\mathrm{Re}(s_n)<1-\nu_n$, соответственно [2, (3.6)].

В [2] было получено представление оператора $\mathrm{G}^1_{\sigma,\kappa;\,\delta}$- преобразования в виде композиции оператора $\mathrm{G}^1_{\sigma/\delta,\kappa/\delta}$-преобразования (1.2) и элементарных операторов вида (2.4) $\mathbf{N}_\varrho$:

$$(\mathrm{G}^1_{\sigma,\kappa;\,\delta}f)(\mathbf{x})=\frac{1}{\delta}(\mathbf{N}_\delta\mathrm{G}^1_{\sigma/\delta,\,\kappa/\delta}\mathbf{N}_{1/\delta}f)(\mathbf{x}). \tag{4.2}$$

Применив преобразование Меллина (2.1) к (1.3), учитывая (3.6), представление (4.2) и утверждения леммы 2.1, в [2, формула 4.3] получили:

$$(\mathfrak{M}\mathrm{G}^1_{\sigma,\kappa;\delta}f)(\mathbf{s})=\frac{1}{\delta}\overline{\mathcal{G}}^{\mathbf{m,n}}_{\mathbf{p,q}}\left[\begin{matrix}(\mathbf{a}_i)_{1,\mathbf{p}}\\(\mathbf{b}_j)_{1,\mathbf{q}}\end{matrix}\middle|\frac{\mathbf{s}+\sigma}{\delta}\right](\mathfrak{M}f)(\mathbf{s}+\sigma+\kappa). \tag{4.3}$$

Справедлива теорема.

Т е о р е м а 4.1.[2, теорема 4.1] *Пусть*

$$\alpha_1<(\nu_1-\mathrm{Re}(\kappa_1))/\delta_1<\beta_1,\alpha_2<(\nu_2-\mathrm{Re}(\kappa_2))/\delta_2<\beta_1,\dots,\alpha_n<(\nu_n-\mathrm{Re}(\kappa_1))/\delta_n<\beta_n,\nu_1=\dots=\nu_n; \tag{4.4}$$

$$a_1^*=0,a_2^*=0,\dots,a_n^*=0;\Delta_1[\nu_1-\mathrm{Re}(\kappa_1)]/\delta_1+\mathrm{Re}(\mu_1)\le 0,$$

$$\Delta_2[\nu_2-\mathrm{Re}(\kappa_2)]/\delta_2+\mathrm{Re}(\mu_2)\le 0,\dots,\Delta_n[\nu_n-\mathrm{Re}(\kappa_n)]/\delta_2+\mathrm{Re}(\mu_n)\le 0. \tag{4.5}$$

Верны следующие утверждения:

(a) Существует взаимно однозначное преобразование $\mathrm{G}^1_{\sigma,\kappa;\delta}\in[\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}},\ \mathfrak{L}_{\overline{\nu}-\mathrm{Re}(\kappa+\sigma),\overline{2}}]$ *такое, что равенство (4.3) выполняется для* $f\in\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *и* $\mathrm{Re}(\mathbf{s})=\overline{\nu}-\mathrm{Re}(\kappa+\sigma)$.
Если $a_1^*=0,\ a_2^*=0,\dots,a_n^*=0;\ \Delta_1[\nu_1-\mathrm{Re}(\kappa_1)]/\delta_1+\mathrm{Re}(\mu_1)=0,\Delta_2[\nu_2-\mathrm{Re}(\kappa_2)]/\delta_2+\mathrm{Re}(\mu_2)==0,\dots,\Delta_n[\nu_n-\mathrm{Re}(\kappa_n)]/\delta_n+\mathrm{Re}(\mu_n)=0$ *и* $1-(\overline{\nu}-\mathrm{Re}(\kappa))/\delta\not\in\mathcal{E}_{\overline{\mathcal{G}}}$, *тогда* $\mathrm{G}^1_{\sigma,\kappa;\delta}$*-преобразование биективно отображает* $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *на* $\mathfrak{L}_{\overline{\nu}-\mathrm{Re}(\kappa+\sigma),\overline{2}}$.

(b) Преобразование $\mathrm{G}^1_{\sigma,\kappa;\delta}f$ *не зависит от* $\overline{\nu}$ *в том смысле, что если* $\overline{\nu}$ *и* $\widetilde{\overline{\nu}}$ *удовлетворяют условиям (4.4)–(4.5) и если преобразования* $\mathrm{G}^1_{\sigma,\kappa;\delta}f$ *и* $\widetilde{\mathrm{G}}^1_{\sigma,\kappa;\delta}f$ *определены в пространствах* $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *и* $\mathfrak{L}_{\widetilde{\overline{\nu}},\overline{2}}$ *равенством (4.3), тогда* $\mathrm{G}^1_{\sigma,\kappa;\delta}f=\widetilde{\mathrm{G}}^1_{\sigma,\kappa;\delta}f$ *для* $f\in\mathfrak{L}_{\widetilde{\overline{\nu}},\overline{2}}\bigcap\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$.

(c) Если $a_1^*=0,\ a_2^*=0,\dots,a_n^*=0;\ \Delta_1[\nu_1-\mathrm{Re}(\kappa_1)]/\delta_1+\mathrm{Re}(\mu_1)<0,\Delta_2[\nu_2-\mathrm{Re}(\kappa_2)]/\delta_2++\mathrm{Re}(\mu_2)<0,\dots,\Delta_n[\nu_n-\mathrm{Re}(\kappa_n)]/\delta_n+\mathrm{Re}(\mu_n)<0$*; тогда для* $f\in\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *преобразование* $\mathrm{G}^1_{\sigma,\kappa;\delta}f$ *дается формулой (1.3).*

(d) Пусть $\overline{\lambda}=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathrm{C}^n$ *и* $f\in\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$. *Если* $\mathrm{Re}(\overline{\lambda})>(\overline{\nu}-\mathrm{Re}(\kappa))/\delta-1$, *тогда* $\mathrm{G}^1_{\sigma,\kappa;\delta}f$ *можно представить в виде*

$$\big(\mathrm{G}^1_{\sigma,\kappa;\delta}f\big)(\mathbf{x})=\frac{1}{\delta}\mathbf{x}^{\sigma+1-\delta(\overline{\lambda}+1)}\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\mathbf{x}^{\delta(\overline{\lambda}+1)}\int\limits_0^\infty \mathrm{G}^{\mathbf{m},\mathbf{n}+1}_{\mathbf{p}+1,\mathbf{q}+1}\left[\frac{\mathbf{x}^\delta}{\mathbf{t}^\delta}\,\middle|\,\begin{matrix}-\overline{\lambda},(\mathbf{a}_i)_{1,\mathbf{p}}\\(\mathbf{b}_j)_{1,\mathbf{q}},\ -\overline{\lambda}-1\end{matrix}\right]\mathbf{t}^{\kappa-1}f(\mathbf{t})\mathbf{dt}, \tag{4.6}$$

а при $\mathrm{Re}(\overline{\lambda})<(\overline{\nu}-\mathrm{Re}(k))/\delta-1$ *дается формулой*

$$\big(\mathrm{G}^1_{\sigma,\kappa;\delta}f\big)(\mathbf{x})=-\frac{1}{\delta}\mathbf{x}^{\sigma+1-\delta(\overline{\lambda}+1)}\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\mathbf{x}^{\delta(\overline{\lambda}+1)}\int\limits_0^\infty \mathrm{G}^{\mathbf{m}+1,\mathbf{n}}_{\mathbf{p}+1,\mathbf{q}+1}\left[\frac{\mathbf{x}^\delta}{\mathbf{t}^\delta}\,\middle|\,\begin{matrix}(\mathbf{a}_i)_{1,\mathbf{p}},-\overline{\lambda}\\-\overline{\lambda}-1,(\mathbf{b}_j)_{1,\mathbf{q}}\end{matrix}\right]\mathbf{t}^{\kappa-1}f(\mathbf{t})\mathbf{dt}. \tag{4.7}$$

(e) Если $f\in\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *и* $g\in\mathfrak{L}_{1-\overline{\nu}+\mathrm{Re}(\kappa+\sigma),\overline{2}}$, *то имеет место формула :*

$$\int\limits_0^\infty f(\mathbf{x})\big(\mathrm{G}^1_{\sigma,\kappa;\delta}g\big)(\mathbf{x})\mathbf{dx}=\int\limits_0^\infty\big(\mathrm{G}^2_{\kappa,\sigma;\delta}f\big)(\mathbf{x})g(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \tag{4.8}$$

где

$$\big(\mathrm{G}^2_{\kappa,\sigma;\delta}f\big)(\mathbf{x})=\mathbf{x}^\kappa\int\limits_0^\infty \mathrm{G}^{\mathbf{m},\mathbf{n}}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}\left[\frac{\mathbf{t}^\delta}{\mathbf{x}^\delta}\,\middle|\,\begin{matrix}(\mathbf{a}_i)_{1,\mathbf{p}}\\(\mathbf{b}_j)_{1,\mathbf{q}}\end{matrix}\right]\mathbf{t}^\sigma f(\mathbf{t})\frac{\mathbf{dt}}{\mathbf{x}}. \tag{4.9}$$

В [2, формулы (4.10), (4.11)] были получены формулы обращения для преобразования $\mathrm{G}^1_{\sigma,\kappa;\delta}f$:

$$f(\mathbf{x})=\delta\mathbf{x}^{\delta-(\kappa-1)-\delta(\overline{\lambda}+1)}\tfrac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\mathbf{x}^{-\delta(\overline{\lambda}+1)}\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty \mathrm{G}^{\mathbf{q}-\mathbf{m},\mathbf{p}-\mathbf{n}+1}_{\mathbf{p}+1,\mathbf{q}+1}\left[\frac{\mathbf{t}^\delta}{\mathbf{x}^\delta}\,\middle|\,\begin{matrix}-\overline{\lambda},-\mathbf{a}_{\mathbf{n}+1},\dots,-\mathbf{a}_{\mathbf{p}},-\mathbf{a}_1,\dots,-\mathbf{a}_{\mathbf{n}}\\-\mathbf{b}_{\mathbf{m}+1},\dots,-\mathbf{b}_{\mathbf{q}},\ -\mathbf{b}_1,\dots,-\mathbf{b}_{\mathbf{m}},\ -\overline{\lambda}-1\end{matrix}\right]\mathbf{t}^{\delta-\sigma-1}(\mathrm{G}^1_{\sigma,\kappa;\delta}f)(\mathbf{t})\mathbf{dt} \tag{4.10}$$

или

$$f(\mathbf{x})=-\delta\mathbf{x}^{\delta-(\kappa-1)-\delta(\overline{\lambda}+1)}\tfrac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\mathbf{x}^{\delta(\overline{\lambda}+1)}\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty \mathrm{G}^{\mathbf{q}-\mathbf{m}+1,\mathbf{p}-\mathbf{n}}_{\mathbf{p}+1,\mathbf{q}+1}\left[\frac{\mathbf{t}^\delta}{\mathbf{x}^\delta}\,\middle|\,\begin{matrix}-\mathbf{a}_{\mathbf{n}+1},\dots,-\mathbf{a}_{\mathbf{p}},-\mathbf{a}_1,\dots,-\mathbf{a}_{\mathbf{n}},\ -\overline{\lambda},\\-\overline{\lambda}-1,\ -\mathbf{b}_{\mathbf{m}+1},\dots,-\mathbf{b}_{\mathbf{q}},\ -\mathbf{b}_1,\dots,-\mathbf{b}_{\mathbf{m}},\end{matrix}\right]\mathbf{t}^{\delta-\sigma-1}(\mathrm{G}^1_{\sigma,\kappa;\delta}f)(\mathbf{t})\mathbf{dt} \tag{4.11}$$

Условия спрадливости формул (4.10), (4.11) приведены в следующей теореме.

Т е о р е м а 4.2. [2, теорема 4.2] *Пусть* $a_1^* = 0, a_2^* = 0, ..., a_n^* = 0$; $\alpha_1 < (\nu_1 - \mathrm{Re}(\kappa_1))/\delta_1 < \beta_1$, $\alpha_2 < (\nu_2 - \mathrm{Re}(\kappa_2))/\delta_2 < \beta_2, ..., \alpha_n < (\nu_n - \mathrm{Re}(\kappa_n))/\delta_n < \beta_n$; $\alpha_0^1 < 1 - (\nu_1 - \mathrm{Re}(\kappa_1))/\delta_1 < \beta_0^1$, $\alpha_0^2 < 1 - (\nu_2 - \mathrm{Re}(\kappa_2))/\delta_2 < \beta_0^2, ..., \alpha_0^n < 1 - (\nu_n - \mathrm{Re}(\kappa_n))/\delta_n < \beta_0^n$; *и пусть* $\overline{\lambda} \in C^n$.

Если $\Delta_1[\nu_1 - \mathrm{Re}(\kappa_1)]/\delta_1 + \mathrm{Re}(\mu_1) = 0$, $\Delta_2[\nu_2 - \mathrm{Re}(\kappa_2)]/\delta_2 + \mathrm{Re}(\mu_2) = 0, ..., \Delta_n[\nu_n - \mathrm{Re}(\kappa_n)]/\delta_n + \mathrm{Re}(\mu_n) = 0$ $(\nu_1 = \nu_2 = ... = \nu_n)$ *и* $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *, то формулы обращения (4.10) и (4.11) справедливы соответственно при* $\mathrm{Re}(\overline{\lambda}) > (-\overline{\nu} + \mathrm{Re}(\kappa))/\delta$ *и* $\mathrm{Re}(\overline{\lambda}) < (-\overline{\nu} + \mathrm{Re}(\kappa))/\delta$.

5. $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$-теория и формула обращения многомерного ${}_1\mathrm{I}^c_{\sigma,\omega;\zeta}$-преобразования

Рассуждая аналогично соответсвующему одномерному случаю, изложенному в [13, пункт 3], в [2, формула (5.1)] вывели формулу многомерного преобразования Меллина (2.1) от преобразования ${}_1\mathrm{I}^c_{\sigma,\omega;\zeta} f$ (1.4)

$$(\mathfrak{M}_1\mathrm{I}^c_{\sigma,\omega;\zeta} f)(\mathbf{s}) = \frac{1}{\zeta}\overline{\mathcal{G}}^{\mathbf{0,2}}_{\mathbf{2,2}}\left[\begin{matrix} c-a & c-b \\ 0 & c-a-b \end{matrix}\middle| \frac{\mathbf{s}+\sigma}{\zeta}\right](\mathfrak{M}f)(\mathbf{s}+\sigma+\omega+\zeta(c-1)+1). \qquad (5.1)$$

Из (5.1) с учетом (4.3) следует, что преобразование (1.4) ${}_1\mathrm{I}^c_{\sigma,\omega;\zeta} f$ является частным случаем преобразования вида (1.3) $\mathrm{G}^1_{\sigma,\kappa;\delta} f$. На основании этого получено представление для преобразования ${}_1\mathrm{I}^c_{\sigma,\omega;\zeta} f$ в следующем виде [2, формула (5.5)]

$$\left({}_1\mathrm{I}^c_{\sigma,\omega;\zeta} f\right)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\sigma \int\limits_{\mathbf{0}}^{\infty} \mathrm{G}^{\mathbf{0,\,2}}_{\mathbf{2,\,2}}\left[\frac{\mathbf{x}^\zeta}{\mathbf{t}^\zeta}\middle| \begin{matrix} c-a & c-b \\ 0 & c-a-b \end{matrix}\right]\mathbf{t}^{\omega+\zeta(c-1)} f(\mathbf{t})\mathbf{dt}. \qquad (5.2)$$

На основании (5.2) и (1.3) $\mathbf{p} = (p_1, p_2, ..., p_n) = (2, 2, ..., 2)$; $\mathbf{q} = (q_1, q_2, ..., q_n) = (2, 2, ..., 2)$, параметры (3.2), (3.3) имеют следующие значения:

$$a_1^* = a_2^* = ... = a_n^* = 0;\ \Delta_1 = \Delta_2 = ... = \Delta_n = 0;\ \mu_1 = -c_1, \mu_2 = -c_2, ..., \mu_n = -c_n. \qquad (5.3)$$

Для удобства введем обозначения

$$\theta = (\theta_1, \theta_1, ..., \theta_n) = \zeta^{-1}[-\overline{\nu} - \mathrm{Re}(\omega) - 1] + 1, \overline{\eta} = (\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n) = \overline{\nu} + \mathrm{Re}(\omega - \sigma) + 1. \qquad (5.4)$$

Параметры $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ и $\alpha = (\alpha_1,\, \alpha_2,\, ..., \alpha_n) \in \mathrm{C}^n$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \in \mathrm{C}^n$ в (3.1) для преобразования (1.4) принимают следующие значения

$$\mathbf{m} = (0, 0, ..., 0),\ \mathbf{n} = (2, 2, ..., 2),\ \alpha = -\infty,\ \beta = 1 - \max[\mathrm{Re}(c, \mathrm{Re}(a+b)]. \qquad (5.5)$$

На основании (5.1) число θ не принадлежит исключительному множеству $\mathcal{E}_{\overline{\mathcal{G}}}$ функции $\overline{\mathcal{G}}^{0,2}_{2,2}$ в правой части (5.1), если :

$$\mathbf{s} \neq m+1,\ \mathbf{s} \neq l+1+a+b-c\,(l = (l_1, l_2, ..., l_n); m = (\overline{m}_1, \overline{m}_2, ..., \overline{m}_n) \in \mathrm{N}_0^n), \qquad (5.6)$$

для $\mathrm{R}e(\mathbf{s}) = 1 - \theta$.

$\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\,\overline{2}}$-теория преобразования (1.4) следует из (5.2) и утверждений теоремы 4.1 для преобразования $\mathrm{G}^1_{\sigma,\kappa;\delta} f$.

Т е о р е м а 5.1. [2, теорема 6.1] *Пусть*

$$\theta > \max[\mathrm{Re}(c-a), \mathrm{Re}(c-b)];\ \mathrm{Re}(c) \geq 0. \qquad (5.7)$$

Верны следующие утверждения:

(a) Существует взаимно однозначное преобразование ${}_1\mathrm{I}^c_{\sigma,\omega;\zeta} \in [\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}, \mathfrak{L}_{\overline{\eta},\overline{2}}]$ *такое, что равенство (5.1) выполняется для* $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *и* $\mathrm{Re}(\mathbf{s}) = \overline{\eta}$. *Если* $\mathrm{Re}(c) = 0$ *и (5.6) имеет место, то преобразование* ${}_1\mathrm{I}^c_{\sigma,\omega;\zeta} f$ *биективно отображает* $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *на* $\mathfrak{L}_{\overline{\eta},\overline{2}}$.

(b) Преобразование ${}_1\mathrm{I}^c_{\sigma,\omega;\zeta} f$ *не зависит от* $\overline{\nu}$ *в том смысле, что если* $\overline{\nu}$ *и* $\widetilde{\overline{\nu}}$ *удовлетворяют условиям (5.7) и если преобразования* ${}_1\mathrm{I}^c_{\sigma,\omega;\,\zeta} f$ *и* ${}_1\widetilde{\mathrm{I}}^c_{\sigma,\omega;\,\zeta} f$ *определены в пространствах* $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *и* $\mathfrak{L}_{\widetilde{\overline{\nu}},\overline{2}}$ *равенством (5.1), тогда* ${}_1\mathrm{I}^c_{\sigma,\omega;\,\zeta} f = {}_1\widetilde{\mathrm{I}}^c_{\sigma,\omega;\,\zeta} f$ *для* $f \in \mathfrak{L}_{\widetilde{\overline{\nu}},\overline{2}} \bigcap \mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$.

(c) Если $\mathrm{Re}(c) > 1$, *тогда для* $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *преобразование* ${}_1\mathrm{I}^c_{\sigma,\omega;\,\zeta} f$ *задается равенством (1.4).*

(d) Пусть $\overline{\lambda} = (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathrm{C}^n$ *и* $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$. *Если* $\mathrm{Re}(\overline{\lambda}) < \theta$, *тогда для преобразования* ${}_1\mathrm{I}^c_{\sigma,\omega;\,\zeta} f$ *справедливо представление*

$$\left({}_1\mathrm{I}^c_{\sigma,\omega;\,\zeta} f\right)(\mathbf{x}) = \frac{1}{\zeta}\mathbf{x}^{\sigma+1-\zeta(\overline{\lambda}+1)}\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\mathbf{x}^{\zeta(\overline{\lambda}+1)}\int\limits_0^\infty \mathrm{G}^{\mathbf{0,3}}_{\mathbf{3,3}}\left[\frac{\mathbf{x}^\zeta}{\mathbf{t}^\zeta}\middle|\begin{array}{c}-\overline{\lambda},\, c-a,\, c-b\\ 0,\, c-a-b,\, -\overline{\lambda}-1\end{array}\right]\mathbf{t}^{\omega+\zeta(c-1)}f(\mathbf{t})\mathbf{dt}. \quad (5.8)$$

Если $\mathrm{Re}(\overline{\lambda}) > \theta$, *тогда*

$$\left({}_1\mathrm{I}^c_{\sigma,\omega;\,\zeta} f\right)(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\zeta}\mathbf{x}^{\sigma+1-\zeta(\overline{\lambda}+1)}\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\mathbf{x}^{\zeta(\overline{\lambda}+1)}\int\limits_0^\infty \mathrm{G}^{\mathbf{1,2}}_{\mathbf{3,3}}\left[\frac{\mathbf{x}^\zeta}{\mathbf{t}^\zeta}\middle|\begin{array}{c}c-a,\, c-b,\, -\overline{\lambda}\\ -\overline{\lambda}-1,\, 0,\, c-a-b\end{array}\right]\mathbf{t}^{\omega+\zeta(c-1)}f(\mathbf{t})\mathbf{dt}. \quad (5.9)$$

(e) Для двух функций $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *и* $g \in \mathfrak{L}_{\overline{k}^*,\overline{2}}$, *где* $\overline{k}^* = -\overline{\nu} + \mathrm{Re}(\omega - \sigma)$, *верно равенство:*

$$\int\limits_0^\infty f(\mathbf{x})\left({}_1\mathrm{I}^c_{\sigma,\omega;\,\zeta} g\right)(\mathbf{x})\mathbf{dx} = \int\limits_0^\infty \left({}_1\mathrm{I}^c_{\omega,\sigma;\,\zeta} f\right)(\mathbf{x})g(\mathbf{x})d\mathbf{x}. \quad (5.10)$$

В [2, формулы (7.5), (7.6)] были получены формулы обращения для преобразования ${}_1\mathrm{I}^c_{\sigma,\omega;\,\zeta} f$, обобщающие соответствующий одномерный случай в [13]:

$$f(\mathbf{x}) = \zeta\mathbf{x}^{\zeta-\omega-\zeta(\overline{\lambda}+1)-\zeta(c-1)}\tfrac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\mathbf{x}^{\zeta(\overline{\lambda}+1)}\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty \mathrm{G}^{\mathbf{2,1}}_{\mathbf{3,3}}\left[\frac{\mathbf{t}^\zeta}{\mathbf{x}^\zeta}\middle|\begin{array}{c}-\overline{\lambda},\, -c+a,\, -c+b\\ 0,\, -c+a+b,\, -\overline{\lambda}-1\end{array}\right]\mathbf{t}^{\zeta-\sigma-1}\left({}_1\mathrm{I}^c_{\sigma,\omega;\,\zeta} f\right)(\mathbf{t})\mathbf{dt} \quad (5.11)$$

или

$$f(\mathbf{x}) = -\zeta\mathbf{x}^{\zeta-\omega-\zeta(\overline{\lambda}+1)-\zeta(c-1)}\tfrac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\mathbf{x}^{\zeta(\overline{\lambda}+1)}\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty \mathrm{G}^{\mathbf{3,0}}_{\mathbf{3,3}}\left[\frac{\mathbf{t}^\zeta}{\mathbf{x}^\zeta}\middle|\begin{array}{c}-c+a,\, -c+b,\, -\overline{\lambda}\\ -\overline{\lambda}-1,\, 0,\, -c+a+b\end{array}\right]\mathbf{t}^{\zeta-\sigma-1}\left({}_1\mathrm{I}^c_{\sigma,\omega;\,\zeta} f\right)(\mathbf{t})\mathbf{dt}. \quad (5.12)$$

Условия спрадливости формул (5.11), (5.12) следуют из теоремы 4.2.

Теорема 5.2. [2, теорема 7.1] *Пусть*

$$\theta > \max[0,\, \mathrm{Re}(c-a-b),\, \mathrm{Re}(c-a),\, \mathrm{Re}(c-b)],\ \ \overline{\lambda} \in \mathrm{C}^n$$

Если $\mathrm{Re}(c) = 0$ *и* $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$, *то при* $\mathrm{Re}(\overline{\lambda}) > \theta - 1$, *верно равенство (5.11), а при* $\mathrm{Re}(\overline{\lambda}) < \theta - 1$ *верно равенство (5.12).*

Аналогичные результаты были получены в [2] для трех модификаций преобразования (1.4).

6. $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$-теория и формула обращения многомерного $\mathrm{P}^{\gamma}_{\delta,1}$-преобразования

Рассуждая аналогично соответсвующему одномерному случаю, изложенному в [14, пункт 3], в [1, формула (81)] получили формулу многомерного преобразования Меллина (2.1) от преобразования (1.5) $\mathrm{P}^{\gamma}_{\delta,1}f$:

$$\left(\mathfrak{M}\mathrm{P}^{\gamma}_{\delta,1}f\right)(\mathbf{s}) = 2^{\gamma-1}\frac{\Gamma\Big((1+\gamma+\delta-\mathbf{s})/2\Big)\Gamma\Big((\gamma-\delta-\mathbf{s})/2\Big)}{\Gamma\Big(1-\mathbf{s}/2\Big)\Gamma\Big((1-\mathbf{s})/2\Big)}\Big(\mathfrak{M}f\Big)(1-\gamma+\mathbf{s}) =$$

$$= 2^{\gamma-1}\overline{\mathcal{H}}^{0,2}_{2,2}\left[\begin{array}{c|} \left(\frac{1-\gamma-\delta}{2},\frac{1}{2}\right),\quad \left(1+\frac{\delta-\gamma}{2},\frac{1}{2}\right) \\ \left(0,\frac{1}{2}\right),\quad \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\end{array}\,\mathbf{s}\right]\Big(\mathfrak{M}f\Big)(\mathbf{s}+1-\gamma). \tag{6.1}$$

Поэтому в силу (3.6) исходное интегральное преобразование (1.5) является модифицированным $\mathrm{H}^{1}_{\sigma,\kappa}$-преобразованием с $\sigma=0,\ \kappa=1-\gamma$ [1, формула (82)]:

$$\left(\mathrm{P}^{\gamma}_{\delta,1}f\right)(\mathbf{s}) = 2^{\gamma-1}\int\limits_0^\infty \mathrm{H}^{0,2}_{2,2}\left[\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}}\,\middle|\begin{array}{c} \left(\frac{1-\gamma-\delta}{2},\frac{1}{2}\right)\ \ \left(1+\frac{\delta-\gamma}{2},\frac{1}{2}\right) \\ \left(0,\frac{1}{2}\right)\ \ \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\end{array}\right]\mathbf{t}^{-\gamma}f(\mathbf{t})d\mathbf{t}. \tag{6.2}$$

Параметры (3.1)–(3.3) для $\mathrm{P}^{\gamma}_{\delta,1}f$ равны соответственно $a_1^*=a_2^*=...=a_n^*=0$; $\Delta_1 = \Delta_2 = ... = \Delta_n = 0$; $\mathbf{p}=(p_1,p_2,...,p_n)=(2,2,...,2)$; $\mathbf{q}=(q_1,q_2,...,q_n)=(2,2,...,2)$, $\alpha_i = (\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},...,\alpha_{i_n})=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},...,\frac{1}{2})$, $\beta_j=(\beta_{j_1},\beta_{j_2},...,\beta_{j_n})=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},...,\frac{1}{2})$ $(i=1,...,p;\ j=1,...,q)$; $\mu=\gamma-1$ и параметры:

$$\mathbf{m}=0,\ \mathbf{n}=2,\ \alpha=-\infty,\ \beta=\min[\mathrm{Re}(1+\gamma+\delta),\ \mathrm{Re}(\gamma-\delta)]; \tag{6.3}$$

На основании (6.1), $1-\overline{\nu}$ не принадлежит исключительному множеству $\mathcal{E}_{\overline{\mathcal{H}}}$ $\overline{\mathcal{H}}^{0,2}_{2,2}$-функции в правой части (6.1), если:

$$\mathbf{s}\neq 2m+1,\ \mathbf{s}\neq 2l+2\,(l=(l_1,l_2,...,l_n);m=(\overline{m}_1,\overline{m}_2,...,\overline{m}_n)\in\mathrm{N}_0^n), \tag{6.4}$$

для $\mathrm{R}e(\mathbf{s})=1-\overline{\nu}$.

$\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$-теория преобразования (1.5) следует из (6.1), (6.2), теоремы 3.1 для $\mathrm{H}^{1}_{\sigma,\kappa}$-преобразования (1.1).

Т е о р е м а 6.1. [1, теорема 11] *Пусть*

$$-\infty<\nu_1-\mathrm{Re}(1-\gamma_1)<\min[\mathrm{Re}(1+\gamma_1+\delta_1),\ \mathrm{Re}(\gamma_1-\delta_1)],\ \mathrm{Re}(\gamma_1-1)\leq 0;$$

$$-\infty<\nu_2-\mathrm{Re}(1-\gamma_2)<\min[\mathrm{Re}(1+\gamma_2+\delta_2),\ \mathrm{Re}(\gamma_2-\delta_2)],\ \mathrm{Re}(\gamma_2-1)\leq 0;...;$$

$$-\infty<\nu_n-\mathrm{Re}(1-\gamma_n)<\min[\mathrm{Re}(1+\gamma_n+\delta_n),\ \mathrm{Re}(\gamma_n-\delta_n)],\ \mathrm{Re}(\gamma_n-1)\leq 0. \tag{6.5}$$

Верны следующие утверждения:

(a) Существует взаимно однозначное преобразование $\mathrm{P}^{\gamma}_{\delta,1}\in[\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}},\ \mathfrak{L}_{\overline{\nu}-\mathrm{Re}(1-\gamma),\overline{2}}]$ *такое, что равенство (6.1) выполняется для* $f\in\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *и* $\mathrm{Re}(\mathbf{s})=\overline{\nu}-\mathrm{Re}(1-\gamma)$. *Если* $\mathrm{Re}(\gamma-1)=0$ *и (6.4) имеет место, то преобразование* $\mathrm{P}^{\gamma}_{\delta,1}$ *биективно на* $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$.

(b) Преобразование $\mathrm{P}^{\gamma}_{\delta,1}f$ *не зависит от* $\overline{\nu}$ *в том смысле, что если* $\overline{\nu}$ *и* $\widetilde{\overline{\nu}}$ *удовлетворяют (6.5) и если преобразования* $\mathrm{P}^{\gamma}_{\delta,1}f$ *и* $\widetilde{\mathrm{P}}^{\gamma}_{\delta,1}f$ *определены в пространствах* $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *и* $\mathfrak{L}_{\widetilde{\overline{\nu}},\overline{2}}$ *равенством (6.1), тогда* $\mathrm{P}^{\gamma}_{\delta,1}f=\widetilde{\mathrm{P}}^{\gamma}_{\delta,1}f$ *для* $f\in\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}\bigcap\mathfrak{L}_{\widetilde{\overline{\nu}},\overline{2}}$.

(c) Если $\mathrm{Re}(\gamma-1)<0$, *тогда для* $f\in\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ $\mathrm{P}^{\gamma}_{\delta,1}f$ *дается формулами (1.5) и (6.2).*

(d) Пусть $\overline{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)\in\mathrm{C}^n$, $\overline{h}=(h_1,...,h_n)>0$, *и* $f\in\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$. *Если* $\mathrm{Re}(\overline{\lambda})>(\overline{\nu}-\mathrm{Re}(1-\gamma))\overline{h}-1$, *тогда преобразование* $\mathrm{P}^{\gamma}_{\delta,1}f$ *представимо в виде*

$$\big(\mathrm{P}^{\gamma}_{\delta,1}f\big)(\mathbf{x}) = 2^{\gamma-1}\overline{h}\mathbf{x}^{1-(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}}\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\mathbf{x}^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}}\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty \mathrm{H}^{0,3}_{3,3}\left[\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}}\middle| \begin{matrix}(-\overline{\lambda},h),\ \big(\frac{1-\gamma-\delta}{2},\frac{1}{2}\big),\ \ \big(1+\frac{\delta-\gamma}{2},\frac{1}{2}\big)\\ \big(0,\frac{1}{2}\big),\ \ \big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\big),\ (-\overline{\lambda}-1,\overline{h})\end{matrix}\right]\mathbf{t}^{-\gamma}f(\mathbf{t})\mathbf{dt}, \tag{6.6}$$

а при $\mathrm{Re}(\overline{\lambda}) < (\overline{\nu}-\mathrm{Re}(1-\gamma))\overline{h}-1$ *дается формулой*

$$\big(\mathrm{P}^{\gamma}_{\delta,1}f\big)(\mathbf{x}) = -2^{\gamma-1}\overline{h}\mathbf{x}^{1-(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}}\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\mathbf{x}^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}}\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty \mathrm{H}^{1,2}_{3,3}\left[\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}}\middle| \begin{matrix}\big(\frac{1-\gamma-\delta}{2},\frac{1}{2}\big),\ \ \big(1+\frac{\delta-\gamma}{2},\frac{1}{2}\big),\ (-\overline{\lambda},\overline{h})\\ (-\overline{\lambda}-1,\overline{h}),\ \big(0,\frac{1}{2}\big),\ \ \big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\big)\end{matrix}\right]\mathbf{t}^{-\gamma}f(\mathbf{t})\mathbf{dt}. \tag{6.7}$$

(e) Если $f\in\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ *и* $g\in\mathfrak{L}_{1-\overline{\nu}+\mathrm{Re}(1-\gamma),\overline{2}}$, *то имеет место формула :*

$$\int\limits_0^\infty f(\mathbf{x})\big(\mathrm{P}^{\gamma}_{\delta,1}g\big)(\mathbf{x})\mathbf{dx} = \int\limits_0^\infty 2^{\gamma-1}\big(\mathrm{P^*}^{\gamma}_{\delta,2}f\big)(\mathbf{x})g(\mathbf{x})\mathbf{dx}, \tag{6.8}$$

где$\big(\mathrm{P^*}^{\gamma}_{\delta,2}f\big)(\mathbf{x})$ *преобразование вида*

$$\big(\mathrm{P^*}^{\gamma}_{\delta,2}f\big)(\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbf{x}}^\infty \big(\mathbf{t}^2-\mathbf{x}^2\big)^{-\gamma/2}\mathrm{P}^{\gamma}_{\delta}\left(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{x}}\right)f(\mathbf{t})\mathbf{dt} = g(\mathbf{x})\ \ (\mathbf{x}>0). \tag{6.9}$$

В [1, формулы (102) и (103)] получены формулы обращения для преобразования (1.5) $\mathrm{P}^{\gamma}_{\delta,1}f$:

$$f(\mathbf{x}) = -2^{1-\gamma}\overline{h}\mathbf{x}^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}-1+\gamma}\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\mathbf{x}^{-(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}}\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty \mathrm{H}^{2,1}_{3,3}\left[\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{x}}\middle| \begin{matrix}-(\overline{\lambda},\overline{h}),\ \big(\frac{\gamma+\delta}{2},\frac{1}{2}\big),\ \ \big(\frac{\gamma-\delta-1}{2},\frac{1}{2}\big)\\ \big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\big),\ \ \big(0,\frac{1}{2}\big),\ (-\overline{\lambda}-1,\overline{h})\end{matrix}\right]\big(\mathrm{P}^{\gamma}_{\delta,1}f\big)(\mathbf{t})\mathbf{dt}, \tag{6.10}$$

или

$$f(\mathbf{x}) = 2^{1-\gamma}\overline{h}\mathbf{x}^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}-1}\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\mathbf{x}^{-(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}}\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty \mathrm{H}^{3,0}_{3,3}\left[\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{x}}\middle| \begin{matrix}\big(\frac{\gamma+\delta}{2},\frac{1}{2}\big),\ \ \big(\frac{\gamma-\delta-1}{2},\frac{1}{2}\big),\ (-\overline{\lambda},\overline{h})\\ (-\overline{\lambda}-1,\overline{h}),\ \big(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\big),\ \ \big(0,\frac{1}{2}\big)\end{matrix}\right]\big(\mathrm{P}^{\gamma}_{\delta,1}f\big)(\mathbf{t})\mathbf{dt}. \tag{6.11}$$

Условия справедливости формул (6.10) и (6.11) приведены в следующем утверждении.

Теорема 6.2. [2, теорема 13] *Пусть* $\mathrm{Re}(\gamma)=1$, $-\infty<\overline{\nu}<\min[1,\ \mathrm{Re}(2+\delta),\ \mathrm{Re}(1-\delta)]$, $\overline{\lambda}\in\mathrm{C}^n$, $\overline{h}>0$.

Если $f\in\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$, *то формула обращения (6.10) справедлива при* $\mathrm{Re}(\overline{\lambda})>(1-\overline{\nu})\overline{h}-1$, *а формула (6.11) справедлива при* $\mathrm{Re}(\overline{\lambda})<(1-\overline{\nu})\overline{h}-1$.

Аналогичные результаты были получены в [1] еще для одной модификации преобразования вида (1.5).

Литература

1. *Sitnik S.M., Skoromnik O.V.* One-dimensional and multi-dimensional integral transforms of Buschman–Erdelyi type with Legendre Functions in kernels. *Transmutation Operators and Applications. Trends in Mathematics.* (2020), 293–319.

2. *Папкович М.В., Скоромник О.В.* Многомерные модифицированные G-преобразования и интегральные преобразование с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах в весовых пространствах суммируемых функций. *Вестник Витебского государственного университета.* №1 (114) (2022), 5–20.

3. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Минск: Наука и техника, 1987.

4. *Ситник С.М, Скоромник О.В., Шлапаков С.А.* Многомерное общее интегральное преобразование со специальными функциями в ядре. *Вестник Витебского государственного университета.* №3 (104) (2019), 18–27.

5. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., and Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations.* Elsevier, Amsterdam, 2006.

6. *Kilbas A. A., Saigo M. H-Transforms. Theory and Applications.* Chapman and Hall, Boca Raton, 2004.

7. *Kiryakova V. Generalized Fractional Calculus and Applications.* Wiley and Son., New York, 1994.

8. *Prudnikov A.P., Brychkov Yu. A., and Marichev O.I. Integrals and Series. More Special Functions.* Vol. 3, Gordon and Breach., New York, 1990.

9. *Mathai A.M. and Saxena R.K. The H-Function with Applications in Statistics and other Disciplines.* Halsted Press, Wiley, New York, 1978.

10. *Srivastava H.M., Gupta K.C., and Goyal S.L. The H-function of One and Two Variables with Applications.* South Asian Publishers., New Delhi, 1982.

11. *Скоромник О.В. Интегральные преобразования с функциями Гаусса и Лежандра в ядрах и интегральные уравнения первого рода.* Полоцкий государственный университет, Новополоцк, 2019.

12. *Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: в 3 т. – Т.1.: Гипергеометрическая функция Гаусса. Функция Лежандра.* М.: Наука, 1973.

13. *Килбас А.А., Скоромник О.В.* $L_{\nu,r}$-теория интегральных преобразований с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах. *Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С, Фундаментальные науки.* №3 (2007), 42–50.

14. *Kilbas A.A., Skoromnik O.V.* Integral transforms with the Legendre function of the first kind in the kernels on $L_{\nu,r}$–spaces. *Integral Transforms and Special Functions.* Vol. 20, №9 (2009), 653–672.

15. *Brychkov Yu. A., Glaeske H.-Y., Prudnikov A. P., and Vu Kim Tuan Multidimensional Integral Transformations.* Gordon And Breach, Philadelphia, 1992.

УДК 517.545+531.2

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Л. А. Хвощинская[1], М. Н. Василевич[2]

e-mail: [1]ludmila.ark@gmail.com, [2]vasilevich.m@gmail.com

Смешанная задача теории упругости сведена к неоднородной краевой задаче Римана для двух функций с кусочно-постоянной матрицей и шестью особыми точками, для решения которой применен “метод логарифмизации”. Построена каноническая матрица задачи, которая позволила найти решение исходной задачи в замкнутой форме.

Ключевые слова: *проблема Римана, группа монодромии, каноническая матрица, дифференциальное уравнение класса Фукса, “метод логарифмизации”.*

ON ONE METHOD SOLVING SOME PROBLEMS OF ELASTICITY THEORY

L. A. Khvoshchinskaya[1], M. N. Vasilevich[2]

e-mail: [1]ludmila.ark@gmail.com, [2]vasilevich.m@gmail.com

The mixed problem of elasticity theory is reduced to the nonhomogeneous boundary value problem of Riemann for two functions with a piecewise constant matrix and six singular points, for the solution of which the “logarithm method” is applied. The canonical matrix of the problem is constructed, which allowed to find the solution of the original problem in closed form.

Keywords: *Riemann problem, monodromy group, canonical matrix, Fuchs class differential equation, “logarithmization method”.*

Mathematics Subject Classification (2020): Primary 30E25, Secondary 30F35, 74B05.

Объект исследования настоящей работы связан с актуальными проблемами теории упругости и гидромеханики, математическими моделями которых служат граничные задачи для различных дифференциальных уравнений: динамических уравнений, уравнений равновесия теории упругости, приближенных уравнений Стокса, а также уравнения Бельтрами.

Важность решения задач определения внутренних характеристик тела по внешним (граничным) воздействиям трудно переоценить. В теории упругости к таким задачам относятся задачи восстановления напряжений или смещений во внутренних точках тела по, соответственно, напряжениям или смещениям в точках поверхности тела. Исследование таких задач ведется с середины 19-го века, но число точных решений в трехмерной постановке очень мало [1]. Соответствующие нестационарные задачи являются еще более сложными и обычно решаются приближенно (например, методом конечных элементов).

При решении так называемых «плоских задач теории упругости» применяются различные методы, начиная с работ Гука, Бернулли, Эйлера, Навье и др. По мере создания более сложных материалов наряду с классическими появлялись и новые методы решения: решения в полиномах и с помощью тригонометрических рядов, методы вариационного исчисления, численные методы решений, метод функций комплексной переменной. Впервые предложенный в работах Г.В. Колосова и Н.И. Мусхелишвили аппарат теории функций комплексного переменного позволил получить точные решения основных задач для достаточно широкого класса областей, в частности, для областей, получаемых при дробно-рациональном отображении круга или его внешности (см., например, работы [2, 3]). Для этого применялись аналитические функции комплексной переменной, представляющие собой напряжения и перемещения и называемые функциями Колосова-Мусхелишвили. Отметим, однако, что способ решения Н.И. Мусхелишвили исключает возможность рассмотрения областей с граничными точками возврата — каспами, в то время, как моделирование процессов разрушения требует описания точного асимптотического поведения граничных напряжений именно вблизи этих точек.

Постановка задачи. Рассматривается смешанная задача теории упругости , которая после отображения круга на верхнюю полуплоскость записывается в виде

$$ImF_1\left(x\right)=-ReF_2\left(x\right),\ x\in(-\infty,-\pi/2)\cup(-\psi,0)\,, \tag{1}$$

$$ImF_1\left(x\right)=ReF_2\left(x\right),\ x\in(0,\psi)\cup(\pi/2,+\infty)\,, \tag{2}$$

$$ReF_1\left(x\right)=f_1\left(x\right),\ x\in(-\pi/2,\pi/2)\,, \tag{3}$$

$$ImF_2\left(x\right)=f_2\left(x\right),\ x\in(-\infty,-\psi)\cup(\psi,+\infty)\,. \tag{4}$$

Необходимо определить функции $F_1\left(z\right)$ и $F_2\left(z\right)$, аналитические в верхней полуплоскости, непрерывно продолжимые на действительную ось и удовлетворяющие условиям (1)–(4) (рис. 1).

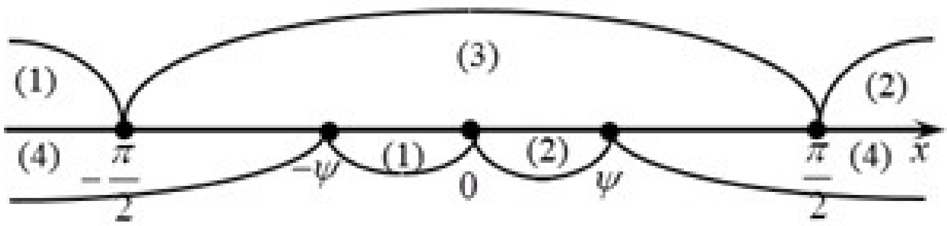

Рис. 1: Условия склейки ветвей многозначных функций F_1, F_2

Решение задачи ищем в классе функций, ограниченных или почти ограниченных (т.е. допускающих логарифмическую особенность) при $z\to 0,\quad z\to\pm\pi/2,\quad z\to\pm\psi,\quad z\to\pm\infty$.

С помощью формул

$$ReF=\frac{1}{2}\left(F+\bar{F}\right),\ ImF=\frac{1}{2i}\left(F-\bar{F}\right)$$

запишем 6 систем уравнений:

$$\begin{cases} F_1\left(x\right)-\bar{F}_1\left(x\right)=-iF_2\left(x\right)-i\bar{F}_2\left(x\right), \\ F_2\left(x\right)-\bar{F}_2\left(x\right)=2if_2\left(x\right), \end{cases} \quad x\in l_1,$$

$$\begin{cases} F_1\left(x\right)+\bar{F}_1\left(x\right)=2f_1\left(x\right), \\ F_2\left(x\right)-\bar{F}_2\left(x\right)=2if_2\left(x\right), \end{cases} \quad x\in l_2,$$

$$\begin{cases} F_1\left(x\right)+\bar{F}_1\left(x\right)=2f_1\left(x\right), \\ F_1\left(x\right)-\bar{F}_1\left(x\right)=-iF_2\left(x\right)-i\bar{F}_2\left(x\right), \end{cases} \quad x\in l_3,$$

$$\begin{cases} F_1\left(x\right)+\bar{F}_1\left(x\right)=2f_1\left(x\right), \\ F_1\left(x\right)-\bar{F}_1\left(x\right)=iF_2\left(x\right)+i\bar{F}_2\left(x\right), \end{cases} \quad x\in l_4,$$

$$\begin{cases} F_1\left(x\right)+\bar{F}_1\left(x\right)=2f_1\left(x\right), \\ F_2\left(x\right)-\bar{F}_2\left(x\right)=2if_2\left(x\right), \end{cases} \quad x\in l_5,$$

$$\begin{cases} F_1\left(x\right)-\bar{F}_1\left(x\right)=-iF_2\left(x\right)-i\bar{F}_2\left(x\right), \\ F_2\left(x\right)-\bar{F}_2\left(x\right)=2if_2\left(x\right), \end{cases} \quad x\in l_6,$$

где $l_1=\left(-\infty,-\frac{\pi}{2}\right),\ \ l_2=\left(-\frac{\pi}{2},-\psi\right),\ \ l_3=\left(-\psi,0\right),\ \ l_4=\left(0,\psi\right),\ \ l_5=\left(\psi,\frac{\pi}{2}\right),\ \ l_6=\left(\frac{\pi}{2},+\infty\right)$.

Введем две новые неизвестные вектор-функции

$$\Phi^+\left(z\right)=\left(F_1\left(z\right),\overline{F_2\left(\bar{z}\right)}\right),\ \Phi^-(z)=\left(\overline{F_1\left(\bar{z}\right)},F_2\left(z\right)\right)$$

и перепишем системы в виде

$$\begin{cases} \Phi_1^+(x) - \Phi_1^-(x) = -i\Phi_2^-(x) - i\Phi_2^+(x), \\ \Phi_2^-(x) - \Phi_2^+(x) = 2if_2(x), \end{cases} \quad x \in l_1,$$

$$\begin{cases} \Phi_1^+(x) + \Phi_1^-(x) = 2f_1(x), \\ \Phi_2^-(x) - \Phi_2^+(x) = 2if_2(x), \end{cases} \quad x \in l_2,$$

$$\begin{cases} \Phi_1^+(x) + \Phi_1^-(x) = 2f_1(x), \\ \Phi_1^+(x) - \Phi_1^-(x) = -i\Phi_2^-(x) - i\Phi_2^+(x), \end{cases} \quad x \in l_3,$$

$$\begin{cases} \Phi_1^+(x) + \Phi_1^-(x) = 2f_1(x), \\ \Phi_1^+(x) - \Phi_1^-(x) = i\Phi_2^-(x) + i\Phi_2^+(x), \end{cases} \quad x \in l_4,$$

$$\begin{cases} \Phi_1^+(x) + \Phi_1^-(x) = 2f_1(x), \\ \Phi_2^-(x) - \Phi_2^+(x) = 2if_2(x), \end{cases} \quad x \in l_5,$$

$$\begin{cases} \Phi_1^+(x) - \Phi_1^-(x) = -i\Phi_2^-(x) - i\Phi_2^+(x), \\ \Phi_2^-(x) - \Phi_2^+(x) = 2if_2(x), \end{cases} \quad x \in l_6,$$

или в матричной форме

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1^+(x) \\ \Phi_2^+(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1^-(x) \\ \Phi_2^-(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2if_1(x) \end{pmatrix}, \quad x \in l_1, \\
&\begin{pmatrix} \Phi_1^+(x) \\ \Phi_2^+(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1^-(x) \\ \Phi_2^-(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2f_1(x) \\ -2if_2(x) \end{pmatrix}, \quad x \in l_2, \\
&\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1^+(x) \\ \Phi_2^+(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1^-(x) \\ \Phi_2^-(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2f_1(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x \in l_3, \\
&\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1^+(x) \\ \Phi_2^+(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1^-(x) \\ \Phi_2^-(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2f_1(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x \in l_4, \qquad (5) \\
&\begin{pmatrix} \Phi_1^+(x) \\ \Phi_2^+(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1^-(x) \\ \Phi_2^-(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2f_1(x) \\ 2if_2(x) \end{pmatrix}, \quad x \in l_5, \\
&\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1^+(x) \\ \Phi_2^+(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1^-(x) \\ \Phi_2^-(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2if_2(x) \end{pmatrix}, \quad x \in l_6.
\end{aligned}$$

Выражая из краевых условий (5) функцию $\Phi^+(x) = \left(\Phi_1^+(x), \Phi_2^+(x)\right)$, приходим к неоднородной краевой задаче Римана с кусочно-постоянной матрицей и шестью особыми точками $-\pi/2,\ -\psi,\ 0,\ \psi,\ \pi/2,\ \infty$:

$$\Phi^+(x) = A_k \Phi^-(x) + G_k(x), \quad x \in l_k, \quad k = 1, ..., 6, \qquad (6)$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = A_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2i & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2i & -1 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$G_1(x) = -2f_1(x) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad G_2(x) = G_5(x) = 2 \begin{pmatrix} f_1(x) \\ -if_2(x) \end{pmatrix}, \quad G_3(x) = 2f_1(x) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix},$$

$$G_4(x) = 2f_1(x) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad G_6(x) = 2f_2(x) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Произведем замену переменной по формулам $\varsigma = \frac{z-\pi/2}{z+\pi/2}$ $\left(z = \frac{\pi}{2}\frac{1+\varsigma}{1-\varsigma}\right)$, $t = \frac{x-\pi/2}{x+\pi/2}$ $\left(x = \frac{\pi}{2}\frac{1+t}{1-t}\right)$ и переведем точки $\pm\pi/2,\ \pm\psi,\ 0,\ \infty$ в точки $-\psi \to \frac{-\psi-\pi/2}{-\psi+\pi/2} =: a,\ \ 0 \to -1,\ \ \psi \to \frac{\psi-\pi/2}{\psi+\pi/2} = = \frac{1}{a} := a',\ \ \frac{\pi}{2} \to 0,\ \infty \to 1,\ \ -\frac{\pi}{2} \to \infty.$

С помощью новой неизвестной функции

$$\Psi(\varsigma) = \begin{cases} \Phi^+(z), & \text{если } \operatorname{Im} z > 0, \\ A_2\Phi^-(z), & \text{если } \operatorname{Im} z < 0, \end{cases}$$

ликвидируем «скачок» на интервале $(-\infty, 0)$ комплексной плоскости ς. Функция $\Psi(\varsigma)$ будет аналитической в плоскости с разрезом вдоль луча $(0, +\infty)$, а краевое условие (6) перепишется в виде

$$\Psi^+(t) = B_k\Psi^-(t) + G_k(t), \quad a_k < t < a_{k+1}, \quad k = 1, \ldots, 5, \tag{7}$$

где $a_1 = a,\ \ a_2 = -1,\ \ a_3 = 1/a = a',\ \ a_4 = 0,\ \ a_5 = 1,\ \ a_6 = \infty$,

$$B_1 = A_3A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2i & -1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = A_4A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2i & -1 \end{pmatrix}, \quad B_3 = A_5A_2^{-1} = E,$$

$$B_4 = A_6A_2^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_5 = A_1A_2^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы решить неоднородную краевую задачу (7), необходимо построить каноническую матрицу $X(\varsigma)$, которая является решением соответствующей однородной краевой задачи [5, 6], т.е.

$$\mathrm{X}^+(t) = B_k\mathrm{X}^-(t), \quad a_k < t < a_{k+1}, \quad k = 1, \ldots, 5. \tag{8}$$

и обладает тремя свойствами:

1. $\det X(z) \neq 0$ для $\forall z \neq a_k$;
2. Столбцы матрицы $X(z)$ принадлежат указанному классу функций;
3. Порядок определителя $X(z)$ на бесконечности равен сумме порядков его столбцов.

Каноническая матрица $\mathrm{X}(\varsigma)$ задачи (7) является решением системы дифференциальных уравнений класса Фукса с шестью особыми точками $a_1, \ldots, a_6 = \infty$ [7]:

$$\frac{dX}{d\varsigma} = X\sum_{k=1}^{5}\frac{U_k}{\varsigma - a_k}, \tag{9}$$

причем матрицы-вычеты U_k подобны матрицам

$$W_k = \frac{1}{2\pi i}\ln B_{k-1}B_k^{-1},\ k = 1, ..., 5, \quad B_0 = B_6 = E,$$

где матрицы $V_k = B_{k-1}B_k^{-1}$, $\quad k = 1, ..., 6$, $\quad B_0 = B_6 = E$, образуют группу монодромии дифференциального уравнения (9). Отметим, что при умножении матрицы $\mathrm{X}(\varsigma)$ справа на диагональную невырожденную матрицу вида $C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$ матрица XC также является канонической матрицей задачи и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d(XC)}{d\varsigma} = (XC)\sum_{k=1}^{5}\frac{C^{-1}U_kC}{\varsigma - a_k}. \tag{10}$$

Поэтому матрицы-вычеты уравнения (9) определяются с точностью до преобразования подобия, т.е. это матрицы-вычеты уравнения (10).

Найдем матрицы-вычеты U_k системы (9) «методом логарифмизации произведения матриц» второго порядка [8], в основе которого лежит следующее утверждение.

У т в е р ж д е н и е. *Пусть* V_1, V_2 — *постоянные невырожденные матрицы 2-го порядка,* $V_3 = V_1 V_2$, α_k, β_k — *характеристические числа матриц* V_k, $\rho_k = \frac{1}{2\pi i}\ln\alpha_k$, $\sigma_k = \frac{1}{2\pi i}\ln\beta_k$ — *характеристические числа матриц* $W_k = \frac{1}{2\pi i}\ln V_k$, $k = 1,2,3$, *причем* $|Re\,(\sigma_k - \rho_k)| \le 1$, $k = 1,2$, $\quad 0 < Re\,(\sigma_3 - \rho_3) \le 1$, $\quad \rho_1 + \sigma_1 + \rho_2 + \sigma_2 = \rho_3 + \sigma_3$.

Тогда с точностью до преобразования подобия диагональной матрицей $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ *матрица* $S_3 = \begin{pmatrix} \rho_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$ *представима в виде суммы двух матриц, а именно, в виде*

$$S_3 = S_1 + S_2 = \begin{pmatrix} s_1 & d \\ c & s_1' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_2 & -d \\ -c & s_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\rho_1\sigma_1 - (\rho_3-\rho_2)(\rho_3-\sigma_2)}{\sigma_3-\rho_3} & \frac{(\rho_3-\rho_1)(\sigma_3-\sigma_1)-\rho_2\sigma_2}{\sigma_3-\rho_3}\, c \\ \frac{\rho_2\sigma_2-(\rho_3-\sigma_1)(\sigma_3-\rho_1)}{c(\sigma_3-\rho_3)} & \frac{(\sigma_3-\rho_2)(\sigma_3-\sigma_2)-\rho_1\sigma_1}{\sigma_3-\rho_3} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \frac{\rho_2\sigma_2+(\rho_3-\rho_1)(\rho_3-\sigma_1)}{\sigma_3-\rho_3} & \frac{\rho_2\sigma_2-(\rho_3-\rho_1)(\sigma_3-\sigma_1)}{\sigma_3-\rho_3}\, c \\ \frac{(\rho_3-\sigma_1)(\sigma_3-\rho_1)-\rho_2\sigma_2}{c(\sigma_3-\rho_3)} & \frac{(\sigma_3-\rho_1)(\sigma_3-\sigma_1)-\rho_2\sigma_2}{\sigma_3-\rho_3} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где $S_k \sim W_k$, $k = 1,2$, c — *произвольная постоянная.*

Если $\rho_3 = \rho_1 + \rho_2$, $\sigma_3 = \sigma_1 + \sigma_2$, т.е. матрицы V_1, V_2 приводятся одним преобразованием подобия к треугольному виду, то $cd = 0$ и имеют место более простые представления матрицы S:

$$\begin{pmatrix} \rho_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 & c \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho_2 & -c \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} \rho_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ c & \sigma_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho_2 & 0 \\ -c & \sigma_2 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицы V_k $(k = 1,...,6)$ группы монодромии, их характеристические числа α_k, β_k и характеристические числа $\rho_k = \frac{1}{2\pi i}\ln\alpha_k$, $\sigma_k = \frac{1}{2\pi i}\ln\beta_k$ матриц $W_k = \frac{1}{2\pi i}\ln V_k$, выбирая ветви логарифмов таким образом, чтобы решение было ограниченным в точках a_k $(k = 1,...,5)$, а ветви ρ_6 и σ_6 удовлетворяли условию $\sum_{k=1}^{5}(\rho_k + \sigma_k) + \rho_6 + \sigma_6 = 0$:

$$V_1 = B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2i & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \alpha_1 = 1, & \beta_1 = -1, \\ \rho_1 = 0, & \sigma_1 = 1/2, \end{matrix}$$

$$V_2 = B_1 B_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4i & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \alpha_2 = \beta_2 = 1, \\ \rho_2 = \sigma_2 = 0, \end{matrix}$$

$$V_3 = B_2 B_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2i & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \alpha_3 = 1, \beta_3 = -1, \\ \rho_3 = 0, \ \sigma_3 = 1/2, \end{matrix}$$

$$V_4 = B_3 B_4^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \alpha_4 = -1, \ \beta_4 = 1, \\ \rho_4 = 1/2, \ \sigma_4 = 0, \end{matrix}$$

$$V_5 = B_4 B_5^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \alpha_5 = \beta_5 = 1, \\ \rho_5 = \sigma_5 = 0, \end{matrix}$$

$$V_6 = B_5 = \begin{pmatrix} -1 & -2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \alpha_6 = -1, & \beta_6 = 1, \\ \rho_6 = -1/2, & \sigma_6 = -1. \end{matrix}$$

Матрица $W_6 = \frac{1}{2\pi i}\ln V_6^{-1}$ приводится к диагональной жордановой форме $S = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Представим матрицу S в виде суммы пяти матриц

$$S = \sum_{k=1}^{5} S_k = \sum_{k=1}^{5} \begin{pmatrix} s_k & d_k \\ c_k & s_k' \end{pmatrix},$$

где $S_k \sim W_k$, $k = 1, ..., 5$. Для этого запишем произведение матриц $V_6^{-1} = V_1 \cdot V_2 \cdot V_3 \cdot V_4 \cdot V_5$ в виде произведений двух матриц следующим образом:

$$\begin{aligned}
V_6^{-1} &= V_1 \cdot (V_2 \cdot V_3 \cdot V_4 \cdot V_5) = V_1 \cdot V_{2345},\\
V_6^{-1} &= (V_1 \cdot V_2) \cdot (V_3 \cdot V_4 \cdot V_5) = V_{12} \cdot V_{345},\\
V_6^{-1} &= (V_1 \cdot V_2 \cdot V_3) \cdot (V_4 \cdot V_5) = V_{123} \cdot V_{45},\\
V_6^{-1} &= (V_1 \cdot V_2 \cdot V_3 \cdot V_4) \cdot V_5 = V_{1234} \cdot V_5.
\end{aligned} \tag{12}$$

Применяя для каждого из произведений (12) формулу (11), мы сможем записать несколько представлений матрицы S в виде суммы двух матриц:

$$S = S_1 + S_{2345} = S_{12} + S_{345} = S_{123} + S_{45} = S_{1234} + S_5, \tag{13}$$

где $S_{1\ldots i} = \frac{1}{2\pi i} \ln V_{1\ldots i}$, $\quad S_{j\ldots 5} = \frac{1}{2\pi i} \ln V_{j\ldots 5}$, $\quad i = 1, ..., 4$, $\quad j = 2, ..., 5$.

Найдем характеристические числа и их логарифмы матриц

$$V_{12} = B_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2i & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \alpha_{12} = 1, & \beta_{12} = -1, \\ \rho_{12} = 0, & \sigma_{12} = 1/2, \end{matrix}$$

$$V_{123} = B_3^{-1} = E, \quad \begin{matrix} \alpha_{123} = 1, & \beta_{123} = 1, \\ \rho_{123} = 0, & \sigma_{123} = 1, \end{matrix}$$

$$V_{1234} = B_4^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \alpha_{1234} = -1, & \beta_{1234} = 1, \\ \rho_{1234} = 1/2, & \sigma_{1234} = 1, \end{matrix}$$

$$V_{45} = B_3 B_5^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \alpha_{45} = -1, & \beta_{45} = 1, \\ \rho_{45} = 1/2, & \sigma_{45} = 0, \end{matrix}$$

$$V_{345} = B_2 B_5^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2i \\ 2i & -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \alpha_{345} = -(\sqrt{2}+1)^2, & \beta_{345} = -(\sqrt{2}-1)^2, \\ \rho_{345} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi i} \ln(\sqrt{2}+1), & \sigma_{345} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi i} \ln(\sqrt{2}+1), \end{matrix}$$

$$V_{2345} = B_1 B_5^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2i \\ -2i & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \alpha_{2345} = 1, & \beta_{2345} = 1, \\ \rho_{2345} = 0, & \sigma_{2345} = 1, \end{matrix}$$

где ветви логарифмов выбирались из условий

$$\rho_{12} + \sigma_{12} = \rho_1 + \sigma_1 + \rho_2 + \sigma_2 = 1/2, \quad \rho_{123} + \sigma_{123} = \rho_1 + \sigma_1 + \rho_2 + \sigma_2 + \rho_3 + \sigma_3 = 1$$

$$\rho_{1234} + \sigma_{1234} = \rho_1 + \sigma_1 + \rho_2 + \sigma_2 + \rho_3 + \sigma_3 + \rho_4 + \sigma_4 = 3/2 \ \text{ и т.д.}$$

Чтобы записать первое из представлений (13), мы полагаем в формуле (11) $\rho_3 = 1/2$, $\sigma_3 = 1$, $\rho_1 = 0$, $\sigma_1 = 1/2$, а числа ρ_2, σ_2 заменяем соответственно на $\rho_{2345} = 0$, $\sigma_{2345} = 1$.

Таким образом мы находим элементы матрицы S_1:

$$s_1 = \frac{\rho_1\sigma_1 - (0.5 - \rho_{2345})\,(0.5 - \sigma_{2345})}{1 - 0.5} = \frac{1}{2}, \quad s_1' = \rho_1 + \sigma_1 - s_1 = (0 + 0.5) - 0.5 = 0,$$

$$c_1 \cdot d_1 = s_1 \cdot s_1' - \rho_1 \cdot \sigma_1 = 0 \ \Rightarrow d_1 = 0,$$

так как матрица B_1 — нижнетреугольная. Следовательно, матрица S_1 имеет вид $S_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ c/2 & 0 \end{pmatrix}$, где $c_1 := c/2$-произвольная постоянная.

Аналогично находим элементы матрицы $S_{12} = \begin{pmatrix} s_{12} & d_{12} \\ c_{12} & s_{12}' \end{pmatrix}$:

$$s_{12} = 2\big(\rho_{12}\sigma_{12} - (0.5 - \rho_{345})\,(0.5 - \sigma_{345})\big) =$$

$$= -2\big(0.25 - 0.5(\rho_{345} + \sigma_{345}) + \rho_{345} \cdot \sigma_{345}\big) = -2(\rho_{345} \cdot \sigma_{345} - 0.25) = (1-\tau)/2,$$

где введено обозначение

$$\tau = 4\rho_{345} \cdot \sigma_{345} = 1 + \frac{4}{\pi^2} \ln^2(\sqrt{2}+1),$$

$$s'_{12} = 0.5 - s_{12} = \tau/2, \quad S_{12} = \begin{pmatrix} (1-\tau)/2 & d_{12} \\ c_{12} & \tau/2 \end{pmatrix},$$

$$c_{12} \cdot d_{12} = s_{12} \cdot s'_{12} - \rho_{12} \cdot \sigma_{12} = \tau(1-\tau)/4.$$

Из (13) следует, что

$$S_2 = S_{12} - S_1 = S_{2345} - S_{345} = \begin{pmatrix} -\tau/2 & d_{12} \\ c_{12} - c_1 & \tau/2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\det S_2 = 0$, то $\tau^2/4 + (c_{12} - c_1) \cdot d_{12} = 0 \Rightarrow c_1 \cdot d_{12} = \tau/4 \Rightarrow d_{12} = \tau/2c$ и

$$S_2 = \begin{pmatrix} -\tau/2 & \tau/2c \\ -\tau c/2 & \tau/2 \end{pmatrix}, S_{12} = \begin{pmatrix} (1-\tau)/2 & \tau/2c \\ (1-\tau)c/2 & \tau/2 \end{pmatrix}.$$

Далее находим элементы матрицы $S_{123} = \begin{pmatrix} s_{123} & d_{123} \\ c_{123} & s'_{123} \end{pmatrix}$:

$$s_{123} = 2\Big(\rho_{123}\sigma_{123} - (0.5 - \rho_{45})\,(0.5 - \sigma_{45})\Big) = 0, \quad s'_{123} = 1 - 0 = 1,$$

$$c_{123} \cdot d_{123} = s_{123} \cdot s'_{123} - \rho_{123} \cdot \sigma_{123} = 0 \Rightarrow c_{123} = 0.$$

Тогда

$$S_3 = S_{123} - S_{12} = \begin{pmatrix} (\tau-1)/2 & d_{123} - \tau/2c \\ (\tau-1)c/2 & 1 - \tau/2 \end{pmatrix}.$$

Так как $\det S_3 = 0$, то

$$1 - \frac{\tau}{2} - c(d_{123} - \frac{\tau}{2c}) = 0 \Rightarrow c \cdot d_{123} = 1$$

и

$$S_{123} = \begin{pmatrix} 0 & 1/c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} (\tau-1)/2 & (1-\tau/2)c \\ (\tau-1)c/2 & 1-\tau/2 \end{pmatrix}.$$

Наконец, находим элементы матрицы $S_{1234} = \begin{pmatrix} s_{1234} & d_{1234} \\ c_{1234} & s'_{1234} \end{pmatrix}$:

$s_{1234} = 2\left(\rho_{1234}\sigma_{1234} - (0.5 - \rho_5)\,(0.5 - \sigma_5)\right) = 0.5, \quad s'_{1234} = 1.5 - 0.5 = 1,$

$S_{1234} = \begin{pmatrix} 1/2 & d_{1234} \\ c_{1234} & 1 \end{pmatrix}, \quad \det S_{1234} = 0.5 \Rightarrow c_{1234} \cdot d_{1234} = 0 \Rightarrow d_{1234} = 0$ и

$S_4 = S_{1234} - S_{123} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/c \\ c_{1234} & 0 \end{pmatrix}, \quad \det S_4 = 0 \Rightarrow c_{1234} = 0.$

Следовательно,

$$S_{1234} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_4 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/c \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а матрицу S_5 можно найти по формуле

$$S_5 = S - S_{1234} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы S_k $(k = 1, ..., 5)$ являются матрицами-вычетами системы (9), которая принимает вид

$$\frac{dX}{d\varsigma} = X \times$$

$$\times\left[\frac{\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ \frac{c}{2} & 0\end{pmatrix}}{\varsigma-a}+\frac{\begin{pmatrix}-\tau/2 & \tau/2c\\ -\tau c/2 & \tau/2\end{pmatrix}}{\varsigma+1}+\frac{\begin{pmatrix}(\tau-1)/2 & (1-\tau/2)/c\\ (\tau-1)c/2 & 1-\tau/2\end{pmatrix}}{\varsigma-a'}+\frac{\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{c}\\ 0 & 0\end{pmatrix}}{\varsigma}\right] \tag{14}$$

где c — произвольная постоянная.

Запишем обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, соответствующее матричному уравнению (14). Пусть

$$X(\varsigma)=\begin{pmatrix}u(\varsigma) & u_1(\varsigma)\\ v(\varsigma) & v_1(\varsigma)\end{pmatrix}.$$

Подставив эту матрицу в уравнение (14), получим систему дифференциальных уравнений, связывающую функции $u(\varsigma)$ и $u_1(\varsigma)$:

$$u'=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varsigma-a}-\frac{\tau}{\varsigma+1}+\frac{\tau-1}{\varsigma-a'}+\frac{1}{\varsigma}\right)u+\frac{c}{2}\left(\frac{1}{\varsigma-a}-\frac{\tau}{\varsigma+1}+\frac{\tau-1}{\varsigma-a'}\right)u_1,$$

$$u_1'=\frac{1}{2c}\left(\frac{\tau}{\varsigma+1}+\frac{2-\tau}{\varsigma-a'}-\frac{2}{\varsigma}\right)u+\frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{\varsigma+1}+\frac{2-\tau}{\varsigma-a'}\right)u_1. \tag{15}$$

Функции $v(\varsigma)$ и $v_1(\varsigma)$также являются решениями системы (15). Выразим из первого уравнения системы (15) функцию $u_1(\varsigma)$, предварительно преобразовав стоящий перед ней множитель:

$$\frac{c}{2}\left(\frac{1}{\varsigma-a}-\frac{\tau}{\varsigma+1}+\frac{\tau-1}{\varsigma-a'}\right)=\frac{1}{c}\frac{(\tau+a+a'(\tau-1))\,\varsigma-(a'+\tau+a(\tau-1))}{(\varsigma+1)(\varsigma-a')\,\varsigma}=$$

$$=\frac{1}{c}\frac{\left(a-\frac{1}{a}+\tau(\frac{1}{a}+1)\right)\varsigma-\left(\frac{1}{a}-a+\tau(a+1)\right)}{(\varsigma+1)(\varsigma-a')\,\varsigma}=\frac{(a+1)}{ca}\cdot\frac{(\tau+a-1)\,\varsigma-(a\tau-a+1)}{(\varsigma+1)(\varsigma-a')\,\varsigma}=$$

$$=\frac{(a+1)(\tau+a-1)}{ca}\cdot\frac{\varsigma-b}{(\varsigma+1)(\varsigma-a')\,\varsigma},$$

где введено обозначение $b:=\frac{\tau a-a+1}{\tau+a-1}$. Поэтому

$$u_1=\frac{2(\varsigma-a)(\varsigma+1)(\varsigma-a')}{c(1+a')(\varsigma-b)}\left[u'-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varsigma-a}-\frac{\tau}{\varsigma+1}+\frac{\tau-1}{\varsigma-a'}+\frac{1}{\varsigma}\right)u\right].$$

Подставляя $u_1(\varsigma)$ во второе уравнение (15), получим дифференциальное уравнение второго порядка, фундаментальной системой решений которой являются функции $u(\varsigma)$и $v(\varsigma)$. Это дифференциальное уравнение класса Фукса с семью особыми точками $a, -1,\ a',\ 0,\ 1,\ b,\ \infty$ [9, 10]:

$$u''+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varsigma-a}+\frac{2}{\varsigma+1}+\frac{1}{\varsigma-a'}-\frac{1}{\varsigma}-\frac{2}{\varsigma-b}\right)u'$$

$$+\frac{1}{2\varsigma}\left(\frac{1+\tau/2}{\varsigma+1}-\frac{1-\tau/2}{\varsigma-a'}+\frac{1}{\varsigma}+\frac{1}{\varsigma-b}\right)u=0. \tag{16}$$

Используя символ Римана, совершим преобразования уравнения (16)

$$P\begin{pmatrix}a & -1 & a' & 0 & 1 & b & \infty\\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & -1/2\\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1 & 0 & 2 & 0\end{pmatrix}\to\sqrt{\varsigma}P\begin{pmatrix}a & -1 & a' & 0 & 1 & b & \infty\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 2 & 1/2\end{pmatrix}$$

и возвратимся к исходной переменной $z=\frac{\pi}{2}\frac{1+\varsigma}{1-\varsigma}$.

Функция $y=\sqrt{\frac{z+\pi/2}{z-\pi/2}}u$ является решением следующего дифференциального уравнения:

$$y''+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+\psi}+\frac{1}{z-\psi}-\frac{1}{z+\pi/2}-\frac{1}{z-\pi/2}+\frac{2}{z}-\frac{2}{z-b}\right)y'+$$
$$+\frac{(\tau-2)z+\psi\tau}{2z(z^2-\psi^2)(z^2-\pi^2/4)}y=0 \qquad (17)$$

Фундаментальная система решений $\tilde{u}_k(z)$ и $\tilde{v}_k(z)$ этого уравнения в окрестности каждой особой точки $b_1=-\pi/2,\ b_2=-\psi,\ b_3=0,\ b_4=\psi,\ b_5=\pi/2,\ b_6=\infty$ представлена в виде рядов [10]:

$$\tilde{u}_k(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n^{(k)}(z-b_k)^n,\ k=1,...,5,\quad \tilde{u}_6(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n^{(6)}z^{-n},$$

$$\tilde{v}_k(z)=\sqrt{z-b_k}\sum_{n=0}^{\infty}D_n^{(k)}(z-b_k)^n,\ k=1,2,4,5,$$

$$\tilde{v}_3(z)=\frac{1}{2\pi i}\ln z\cdot\ u_k(z)+\sum_{n=0}^{\infty}D_n^{(3)}z^n,\qquad \tilde{v}_6(z)=-\frac{1}{2\pi i}\ln z\,\tilde{u}_6(z)+\sum_{n=1}^{\infty}D_n^{(6)}z^{-n},$$

коэффициенты $C_n^{(k)}$, $D_n^{(k)}$ которых находятся из рекуррентных соотношений после подстановки рядов в уравнение (17). В окрестности точки $z=b$ уравнение (17) имеет два линейно независимых решения вида

$$\tilde{u}_b(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n^{(b)}(z-b)^n \quad \text{и} \quad \tilde{v}_b(z)=(z-b)^2\sum_{n=0}^{\infty}D_n^{(b)}(z-b)^n.$$

Каноническая матрица $X(z)$ краевой задачи (7) в окрестности особых точек a_k $(k=1,...,6)$ имеет вид

$$X^+(z)=\sqrt{\frac{z-\pi/2}{z+\pi/2}}\cdot C_k\begin{pmatrix}\tilde{u}_k & \tilde{u}_k'\\ \tilde{v}_k & \tilde{v}_k'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & (1-\tau/2)\psi\\ 0 & z(z^2-\psi^2)/(z-b)\end{pmatrix} \ \text{и}\ \ \mathrm{X}^-(z)=A_2\mathrm{X}^+(z), \qquad (18)$$

где C_k — матрица, приводящая матрицу V_k к нормальной жордановой форме.

Решение задачи (7) находим через интеграл типа Коши по формулам

$$\Phi^{\pm}(z)=\frac{1}{2\pi i}X^{\pm}(z)\sum_{k=0}^{5}\int_{b_k}^{b_{k+1}}\left[X^+(x)\right]^{-1}G_k(x)\frac{dx}{x-z},\quad b_0=-\infty,\quad b_6=+\infty. \qquad (19)$$

Зная функции $\Phi^{\pm}(z)=\left(\Phi_1^{\pm}(z),\Phi_2^{\pm}(z)\right)$, строим решения, удовлетворяющие условиям симметрии $\Phi^*(z)=\frac{1}{2}\left(\Phi(z)+\overline{\Phi(\bar{z})}\right)$. Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема. *Решение задачи* (1)–(4) *имеет вид*

$$F_1(z)=\frac{1}{2}\left(\Phi_1^+(z)+\overline{\Phi_1^-(\bar{z})}\right) \quad \text{и} \quad F_2(z)=\frac{1}{2}\left(\Phi_2^-(z)+\overline{\Phi_2^+(\bar{z})}\right),$$

где функции $\Phi^{\pm}(z)$ определяются по формулам (20), а матрицы $X^{\pm}(z)$ находятся по формулам (18).

Следствие. *Суммарный индекс æ, частные индексы $æ_1, æ_2$ неоднородной краевой задачи* (7) *соответственно равны*

$$æ=-\sum_{k=1}^{6}(\rho_k+\ \ \sigma_k)=-2, æ_1=\left[\frac{1-\chi}{2}\right]=-1, æ_2=\left[\frac{-\chi}{2}\right]=-1.$$

Отсюда следует, что задача (1) *имеет единственное решение при выполнении одного матричного условия разрешимости:*

$$\sum_{k=0}^{5} \int_{b_k}^{b_{k+1}} \left[X^{+}(x)\right]^{-1} G_k(x)\, dx = 0.$$

Литература

1. *Жидков А.В., Леонтьев Н.В. Моделирование поведения гиперупругих материалов: Учебно-методическое пособие.* Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2019.

2. *Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.* М.: Наука, 1966.

3. *Хвощинская Л.А.* Решение одной задачи теории упругости. *Тр. Ин-та математики НАН Беларуси.* Мн., 2000. Т. 5. 136–141.

4. *Амелькин В.В., Василевич М.Н., Хвощинская Л.А.* Об одном подходе к решению смешанных задач теории упругости. *Известия Национальной академии наук Беларуси. Сер.физ.-мат.наук.* 2021. Т. 57, №3. С. 263-273.

5. *Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения.* М.: Наука, 1968, 511 с.

6. *Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом.* М.: Наука, 1977, 448 с.

7. *Еругин Н.П. Проблема Римана.* Мн.: Наука и техника, 1982, 336 с.

8. *Khvoshchinskaya L., Rogosin S.* On a solution method for the Riemann problem with two pairs of unknown functions. *Analytic Methods of Analysis and Differential Equations: AMADE-2018 (M.V. Dubatovskaya, S.V. Rogosin Eds.) Cambridge Scientific Publishers.* 2020. 79–112.

9. *Матвеев П.Н. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений: Учебное пособие.* СПб.: Издательство «Лань», 2008.

10. *Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1971.

УДК 517.956.32

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С МЛАДШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ И ОДНОЙ КРАТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

Е. С. Чеб

e-mail: cheb@bsu.by

В работе рассматривается построение классического решения смешанной задачи для линейного однородного нестрого гиперболического уравнения четвертого порядка, оператор которого представляет собой четырехкратную композицию оператора первого порядка специального вида, с постоянными коэффициентами и одной характеристикой кратности четыре. Для корректной постановки данной задачи граничные условия задаются не на всей боковой границе, что является ее особенностью. Для построения решения используется метод характеристик. Классическое решение построено для случая наличия производных младших порядков.

Получены достаточные условия гладкости и согласований граничных условий с начальными условиями и уравнением. Показано, что требования гладкости для данной задачи повышаются, чем в случае наличия у уравнения четырех разных характеристик. Доказана теорема существования единственного классического решения этой смешанной задачи.

Ключевые слова: *нестрого гиперболическое уравнение четвертого порядка; смешанная задача; классическое решение; метод характеристик; условия гладкости и согласования.*

CLASSICAL SOLUTION OF THE MIXED PROBLEM FOR LINEAR NONSTRICTLY HYPERBOLIC FOURTH-ORDER WITH AND MULTIPLE CHARACTERISTIC

E. S. Cheb

e-mail: cheb@bsu.by

In the work, it is considered the construction of a classical solution to the mixed problem for a linear homogeneous not strictly hyperbolic fourth-order equation whose operator is quadruple composition of the first-order operator of the special type, with constant coefficients and one multiplicity of the characteristic four. We use the method of characteristics to solve this problem. For the correct formulation of this problem, the boundary conditions are not specified on the entire lateral boundary, which is its peculiarity. To construct a solution, the method of characteristics is used. The classical solution is constructed for the case of the presence of derivatives lower orders.

We obtained matching conditions for initial and boundary conditions. Shown, that smoothness requirements for this problem are higher than in the case the equation has four different characteristics. A theorem on the existence of a unique classical solution has been proved.

Keywords: *partial differential hyperbolic equation of the fourth order; initial value problem; boundary value problem; classical solution; method of characteristics; smoothness and matching conditions.*

Mathematics Subject Classification (2020): Primary 35G15, Secondary 35L25.

Введение

Настоящая работа связана с публикацией [6], где авторами построено в явном виде классическое решение корректной по Адамару граничной задачи для нестрого гиперболического однородного уравнения четвертого порядка с постоянными коэффициентами и одной кратной характеристикой в полуполосе плоскости и получены достаточные условия гладкости начальных и граничных функций. В настоящей работе рассматривается уравнение более общего вида. В основу построения решения положен метод характеристик [1], который позволяет не только построить классическое решение, но указать на особенность задания граничных условий. В силу того, что уравнение является нестрого гиперболическим, т.е. имеет кратные характеристики, граничные условия задаются не на всей границе. Такая особенность была подмечена уже для уравнений второго порядка [2, 3]. Кратность характеристик непосредственно влияет и на гладкость входных начальных и граничных данных [5, 6]. Используя метод характеристик, можно получить необходимые и достаточные условия корректной разрешимости смешанных задач для нестрого гиперболических уравнений, как это сделано в [3, 4, 7]. С повышением порядка уравнения, получаемые условия, как правило, являются достаточными [5, 6]. При их выводе существенно используется структура решения уравнения.

1. Постановка начально-краевой задачи

В области $Q = (0, \infty) \times \Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, рассмотрим линейное нестрого гиперболическое уравнение четвертого порядка с постоянными коэффициентами в предположении, что гиперболический оператор уравнения L представим в виде композиции операторов первого порядка специального вида

$$Lu \equiv \prod_{i=1}^{4} \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_i \frac{\partial}{\partial x} + b \right) u(t,x) = 0, \quad a_i = a > 0,\ b > 0, \quad (t,x) \in Q, \tag{1.1}$$

где $\Omega = (0, l)$, $l > 0$.

К уравнению (1.1) присоединим начальные условия

$$\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\Big|_{t=0} = \varphi_j(x), \quad x \in \Omega, \quad j = 0,1,2,3, \tag{1.2}$$

и граничные условия

$$u(t,0) = \mu_1(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \mu_2(t), \quad t \in \left(\frac{l}{a}, +\infty\right), \tag{1.3}$$

$$u(t,l) = \nu_1(t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = \nu_2(t), \quad t \in (0, +\infty). \tag{1.4}$$

Условия (1.3)–(1.4) выбираются таким образом, чтобы смешанная (начально-граничная) задача (1.1)–(1.4) была корректно поставленной по Адамару, т.е. всегда существовало единственное и устойчивое по исходным данным ее классическое решение. Наша задача: построить в явном виде классическое решение $u \in C^{(4)}(\overline{Q})$, $\overline{Q} = [0, \infty) \times [0, l]$, уравнения (1.1) из класса четырежды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих уравнению (1.1) на Q в обычном смысле, а начальным (1.2) и граничным условиям (1.3)–(1.4) в смысле пределов значения решения $u(t,x)$ во внутренних точках $(t,x) \in Q$. Найти достаточные требования гладкости исходных данных φ_j $(j = \overline{0,3})$, $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$ и условия согласования между ними и уравнением для корректной разрешимости поставленной задачи (1.1)–(1.4).

2. Решение начально-краевой задачи

Уравнение (1.1) является нестрого гиперболическим и имеет одно семейство характеристик $x + at = C$, $C \in \mathbb{R}$, кратности четыре. Характеристикой $x + at = l$, которая называется критической [1], область Q разбивается на две подобласти

$$Q^{(0)} = \left\{(t,x):\, 0 < t < \frac{l-x}{a},\ 0 < x < l\right\},\ Q^{(1)} = \left\{(t,x):\, t > \frac{l-x}{a},\ 0 < x < l\right\},$$

$\overline{Q} = \overline{Q^{(0)}} \cup \overline{Q^{(1)}}$.

Определим необходимые требования на гладкость входных функций и соотношения между ними для однозначной разрешимости поставленной задачи. Из определения классического решения $u \in C^{(4)}(\overline{Q})$ задачи (1.1)–(1.4) следует, что

$$\varphi_0 \in C^{(4)}(\overline{\Omega}),\ \varphi_1 \in C^{(3)}(\overline{\Omega}),\ \varphi_2 \in C^{(2)}(\overline{\Omega}),\ \varphi_3 \in C^{(1)}(\overline{\Omega}), \tag{2.1}$$

$$\mu_1 \in C^{(4)}\left[\frac{l}{a}, \infty\right),\ \mu_2 \in C^{(3)}\left[\frac{l}{a}, \infty\right),\ \nu_1 \in C^{(4)}[0,\infty),\ \nu_2 \in C^{(3)}[0,\infty). \tag{2.2}$$

Дополнительные условия получаются, следуя работе [6].

$$\frac{d^s\nu_1(t)}{dt^s}\Big|_{t=0} = \varphi_s(l), \quad \frac{d^s\nu_2(t)}{dt^s}\Big|_{t=0} = \varphi'{}_s(l),\ s = 0,1,2,3, \tag{2.3}$$

$$\nu_1^{(4)}(0) = -b^4\varphi_0(l) - 4b^3\varphi_1(l) - 6b^2\varphi_2(l) - 4b\varphi_3(l) + 4ab^3\varphi_0'(l) + 12ab^2\varphi_1'(l) + 12ab\varphi_2'(l) +$$
$$+4a\varphi_3'(l) - 6a^2b^2\varphi_0''(l) - 12a^2b\varphi_1''(l) - 6a^2\varphi_2''(l) + 4a^3\varphi_0^{(3)}(l) + 4a^3\varphi_1^{(3)}(l) - a^4\varphi_0^{(4)}(l). \tag{2.4}$$

Условие согласования (2.4) при $b = 0$ имеют вид

$$\nu_1^{(4)}(0) = 4a\varphi_3'(l) - 6a^2\varphi_2''(l) + 4a^3\varphi_1^{(3)}(l) - a^4\varphi_0^{(4)}(l). \tag{2.5}$$

и совпадает с аналогичным условием, полученным в [6].

Упростим задачу (1.1)–(1.4), введя замену переменных

$$u(t,x) = e^{-bt}v(t,x). \tag{2.6}$$

С учетом замены переменных (2.6) задача (1.1)–(1.4) примет вид

$$Lv \equiv \prod_{i=1}^{4}\left(\frac{\partial}{\partial t} - a_i\frac{\partial}{\partial x}\right)v(t,x) = 0, \quad a_i = a > 0, \quad (t,x) \in Q, \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial^j v}{\partial t^j}\Big|_{t=0} = \overline{\varphi}_j(x), \quad x \in \Omega, \quad j = 0,1,2,3, \tag{2.8}$$

$$v(t,0) = \overline{\mu}_1(t), \quad \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x=0} = \overline{\mu}_2(t), \quad t \in \left(\frac{l}{a}, +\infty\right), \tag{2.9}$$

$$v(t,l) = \overline{\nu}_1(t), \quad \frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{x=l} = \overline{\nu}_2(t), \quad t \in (0,+\infty). \tag{2.10}$$

Новые граничные и начальные функции определятся формулами

$$\overline{\varphi}_0(x) = \varphi_0(x), \quad \overline{\varphi}_1(x) = \varphi_1(x) + b\varphi_0(x),$$

$$\overline{\varphi}_2(x) = \varphi_2(x) + 2b\varphi_1(x) + b^2\varphi_0(x), \quad \overline{\varphi}_3(x) = \varphi_3(x) + 3b\varphi_2(x) + 3b^2\varphi_1(x) + b^3\varphi_0(x). \tag{2.11}$$

$$\overline{\mu}_i(t) = e^{bt}\mu_i(t), \quad \overline{\nu}_i(t) = e^{bt}\nu_i(t), \quad i = 1,2. \tag{2.12}$$

Разрешимость задачи (2.7)–(2.10) с начальными и граничными условиями задаваемыми функциями (2.11), (2.12), подробно изучена в работе [6]. Выведена формула решения в явном виде задачи Коши (2.7)–(2.8)

$$v_0(t,x)=\overline{\varphi}_0(x+at)+t\big[\overline{\varphi}_1(x+at)-a\overline{\varphi}_0'(x+at)\big]+\frac{1}{2}t^2\big[\overline{\varphi}_2(x+at)-2a\overline{\varphi}_1'(x+at)+a^2\overline{\varphi}_0''(x+at)\big]+$$

$$+\frac{1}{6}t^3\big[\overline{\varphi}_3(x+at)-3a\overline{\varphi}_2'(x+at)+3a^2\overline{\varphi}_1''(x+at)-a^3\overline{\varphi}_0^{(3)}(x+at)\big],\quad (t,x)\in Q^{(0)}, \qquad (2.13)$$

и граничной задачи (2.7)–(2.10) методом характеристик

$$v_1(t,x)=\frac{(l-x)^2(l+2x)}{l^3}\,\overline{\mu}_1\left(t+\frac{l}{a}\right)+\frac{x(l-x)^2}{l^2}\,\overline{\mu}_2\left(t+\frac{l}{a}\right)+\frac{x^2(3l-2x)}{l^3}\,\overline{\nu}_1\left(t-\frac{l-x}{a}\right)-$$

$$-\frac{x^2(l-x)}{l^2}\,\overline{\nu}_2\left(t-\frac{l-x}{a}\right)-\frac{x(l-x)^2}{al^2}\,\overline{\mu}_1'\left(t+\frac{l}{a}\right)+\frac{x^2(l-x)}{al^2}\,\overline{\nu}_1'\left(t-\frac{l-x}{a}\right),\ (t,x)\in Q^{(1)}. \quad (2.14)$$

Из решения задачи Коши (2.13) следует, что если $v_0\in C^{(4)}(\overline{Q^{(0)}})$, то достаточные требования на гладкость начальных функций повышаются по сравнению с (2.1), а именно

$$\varphi_0\in C^{(7)}(\overline{\Omega}),\ \varphi_1\in C^{(6)}(\overline{\Omega}),\ \varphi_2\in C^{(5)}(\overline{\Omega}),\ \varphi_3\in C^{(4)}(\overline{\Omega}). \qquad (2.15)$$

Аналогично повышаются требования и на гладкость граничных функций

$$\mu_1\in C^{(5)}\left[\frac{l}{a},\infty\right),\ \mu_2\in C^{(4)}\left[\frac{l}{a},\infty\right),\ \nu_1\in C^{(5)}[0,\infty),\ \nu_2\in C^{(4)}[0,\infty). \qquad (2.16)$$

Теорема 2.1. *Пусть выполнены требования гладкости начальных и граничных данных (2.15) и (2.16) , и выполнены основные условия согласования (2.3), (2.5) и дополнительные условия согласования*

$$\overline{\mu}_{i+1}\Big(\frac{l}{a}\Big)=\frac{1}{6a^3}\Big[6a^3\overline{\varphi}_0^{(i)}(l)+6a^2l\overline{\varphi}_1^{(i)}(l)+3al^2\overline{\varphi}_2^{(i)}(l)+l^3\overline{\varphi}_3^{(i)}(l)-6a^3\overline{\varphi}_0^{(i+1)}(l)\Big]+$$

$$+\frac{1}{6a^3}\Big[-6a^2l^2\overline{\varphi}_1^{(i+1)}(l)-3al^3\overline{\varphi}_2^{(i+1)}(l)+3a^3l^2\overline{\varphi}_0^{(i+2)}(l)+3a^2l^3\overline{\varphi}_1^{(i+2)}(l)-a^3l^3\overline{\varphi}_0^{(i+3)}(l)\Big],$$

$$\overline{\mu}_{i+1}'\Big(\frac{l}{a}\Big)=\frac{1}{6a^2}\Big[6a^2\overline{\varphi}_1^{(i)}(l)+6al\overline{\varphi}_2^{(i)}(l)+3l^2\overline{\varphi}_3^{(i)}(l)\Big]+\frac{1}{6a^2}\Big[-6a^2l\overline{\varphi}_1^{(i+1)}(l)-6al^2\overline{\varphi}_2^{(i+1)}(l)+l^3\overline{\varphi}_3^{(i+1)}(l)\Big]+$$

$$+\frac{1}{6a^2}\Big[3a^2l^2\overline{\varphi}_1^{(i+2)}(l)-3al^3\overline{\varphi}_2^{(i+2)}(l)+3a^2l^3\overline{\varphi}_1^{(i+3)}(l)-a^3l^3\overline{\varphi}_0^{(i+4)}(l)\Big],$$

$$\overline{\mu}_{i+1}''\Big(\frac{l}{a}\Big)=\frac{1}{6a}\Big[6a\overline{\varphi}_2^{(i)}(l)+6l\overline{\varphi}_3^{(i)}(l)-6al\overline{\varphi}_2^{(i+1)}(l)+6l^2\overline{\varphi}_3^{(i+1)}(l)-15al^2\overline{\varphi}_2^{(i+2)}(l)\Big]+$$

$$+\frac{1}{6a}\Big[l^3\overline{\varphi}_3^{(i+2)}(l)+12a^2l^2\overline{\varphi}_1^{(i+3)}(l)\Big]+$$

$$+\frac{1}{6a}\Big[-3al^3\overline{\varphi}_2^{(i+3)}(l)-3a^3l^2\overline{\varphi}_0^{(i+4)}(l)+3a^2l^3\overline{\varphi}_1^{(i+4)}(l)-a^3l^3\overline{\varphi}_0^{(i+5)}(l)\Big],$$

$$\overline{\mu}_{i+1}^{(3)}\Big(\frac{l}{a}\Big)=\frac{1}{6}\Big[6\overline{\varphi}_3^{(i)}(l)+18l\overline{\varphi}_3^{(i+1)}(l)-36al\overline{\varphi}_2^{(i+2)}(l)+9l^2\overline{\varphi}_3^{(i+2)}(l)+24a^2l\overline{\varphi}_1^{(i+3)}(l)\Big]+$$

$$+\frac{1}{6}\Big[-24al^2\overline{\varphi}_2^{(i+3)}(l)+l^3\overline{\varphi}_3^{(i+3)}(l)-6a^3l\overline{\varphi}_0^{(i+4)}(l)+21a^2l^2\overline{\varphi}_1^{(i+4)}(l)-3al^3\overline{\varphi}_2^{(i+4)}(l)\Big]+$$

$$+\frac{1}{6}\Big[-6a^3l^2\overline{\varphi}_0^{(i+5)}(l)+3a^2l^3\overline{\varphi}_1^{(i+5)}(l)-a^3l^3\overline{\varphi}_0^{(i+6)}(l)\Big],\ i=0,1,$$

$$\overline{\mu}_1^{(4)}\Big(\frac{l}{a}\Big)=\frac{a}{6}\Big[24\overline{\varphi}_3'(l)-36a\overline{\varphi}_2''(l)+36l\overline{\varphi}_3''(l)+24a^2\overline{\varphi}_1^{(3)}(l)-84al\overline{\varphi}_2^{(3)}(l)+12l^2\overline{\varphi}_3^{(3)}(l)\Big]+$$

$$+\frac{a}{6}\Big[-6a^3\overline{\varphi}_0^{(4)}(l)+66a^2l\overline{\varphi}_1^{(4)}(l)-33al^2\overline{\varphi}_2^{(4)}(l)+l^3\overline{\varphi}_3^{(4)}(l)-18a^3l\overline{\varphi}_0^{(5)}(l)\Big]+$$

$$+\frac{a}{6}\Big[30a^2l^2\overline{\varphi}_1^{(5)}(l)-3al\overline{\varphi}_2^{(5)}(l)-9a^3l^2\overline{\varphi}_0^{(6)}(l)+3a^2l^3\overline{\varphi}_1^{(6)}(l)-a^3l^3\overline{\varphi}_0^{(7)}(l)\Big],$$

$$\overline{\mu}_2^{(4)}\Big(\frac{l}{a}\Big)-\frac{1}{a}\overline{\mu}_1^{(5)}\Big(\frac{l}{a}\Big)=\frac{a}{2}\Big[-12\overline{\varphi}_3''(l)+28a\overline{\varphi}_2^{(3)}(l)-8l\overline{\varphi}_3^{(3)}(l)-22a^2\overline{\varphi}_1^{(4)}(l)\Big]+$$

$$+\frac{a}{2}\Big[22al\overline{\varphi}_2^{(4)}(l)-l^2\overline{\varphi}_3^{(4)}(l)+6a^3\overline{\varphi}_0^{(5)}(l)-20a^2l\overline{\varphi}_1^{(5)}(l)+3al\overline{\varphi}_2^{(5)}(l)\Big]+$$

$$+\frac{a}{2}\Big[6a^3l\overline{\varphi}_0^{(6)}(l)-3a^2l^2\overline{\varphi}_1^{(6)}(l)+a^3l^2\overline{\varphi}_0^{(7)}(l)\Big],$$

$$\overline{\nu}_1^{(5)}(0)-a\overline{\nu}_2^{(4)}(0)=6a^2\overline{\varphi}_3''(l)-12a^3\overline{\varphi}_2^{(3)}(l)+11a^4\overline{\varphi}_1^{(4)}(l)-3a^5\overline{\varphi}_0^{(5)}(l). \tag{2.17}$$

Тогда в классе функций $C^{(4)}(\overline{Q})$ смешанная задача (2.7)–(2.10) имеет единственное классическое решение, определяемое формулами (2.13), (2.14).

Доказательство. Доказательство теоремы рассмотрено в работе [5]. Дополнительные условия согласования (2.17) получены из условия непрерывности решения (2.13) и (2.14) и непрерывности их производных до четвертого порядка включительно на характеристике $x+$ $+at=l$. При выводе условий используется тот факт, что решение имеет вид полинома третьей степени.

Перейдем к рассмотрению исходной задачи (1.1)–(1.4). Учитывая замену (2.6), а также вид начальных и граничных условий (2.11), (2.12), сформулированную выше теорему можно представить в виде.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены требования гладкости начальных и граничных данных (2.15) и (2.16) , и выполнены основные условия согласования (2.3), (2.4) и дополнительные условия согласования (2.17) с учетом формул (2.11), (2.12). Тогда в классе функций $C^{(4)}(\overline{Q})$ смешанная задача (1.1)–(1.4) имеет единственное классическое решение*

$$u_0(t,x)=e^{-bt}\Big\{\varphi_0(x+at)+t\big[\varphi_1(x+at)+b\varphi_0(x+at)-a\varphi_0'(x+at)\big]+$$

$$+\frac{1}{2}t^2\big[\varphi_2(x+at)+2b\varphi_1(x+at)+b^2\varphi_0(x+at)-2a\big(\varphi_1'(x+at)+b\varphi_0'(x+at)\big)+a^2\varphi_0''(x+at)\big]+$$

$$+\frac{1}{6}t^3\big[\varphi_3(x+at)+3b\varphi_2(x+at)+3b^2\varphi_1(x+at)+b^3\varphi_0(x+at)-3a\big(\varphi_2'(x+at)+2b\varphi_1'(x+at)+$$

$$+b^2\varphi_0'(x+at)\big)+3a^2\big(\varphi_1''(x+at)+2b\varphi_0''(x+at)-a^3\varphi_0^{(3)}(x+at)\big)\big]\Big\},\quad (t,x)\in Q^{(0)},$$

$$u_1(t,x)=e^{-bt}\Big\{\frac{(l-x)^2(l+2x)}{l^3}\,\mu_1\Big(t+\frac{l}{a}\Big)+\frac{x(l-x)^2}{l^2}\,\mu_2\Big(t+\frac{l}{a}\Big)+\frac{x^2(3l-2x)}{l^3}\,\nu_1\Big(t-\frac{l-x}{a}\Big)-$$

$$-\frac{x^2(l-x)}{l^2}\,\nu_2\Big(t-\frac{l-x}{a}\Big)-\frac{x(l-x)^2}{al^2}\,\mu_1'\Big(t+\frac{l}{a}\Big)+\frac{x^2(l-x)}{al^2}\,\nu_1'\Big(t-\frac{l-x}{a}\Big)\Big\},\ (t,x)\in Q^{(1)}.$$

3. Заключение

В работе построено единственное классическое решение смешанной задачи в полуполосе для линейного нестрого гиперболического однородного уравнения четвертого порядка с постоянными коэффициентами, оператор которого представляет собой произведение одинаковых операторов первого порядка. Получены достаточные требования гладкости входных данных (начальных и граничных функций) и достаточные условия согласования граничных условий с начальными условиями и уравнением. Показано, что при рассмотрении граничной задачи для гиперболического уравнения с кратными характеристиками требования на гладкость начальных и граничных функций повышаются с увеличением кратности характеристик.

Литература

1. *Корзюк В.И. Уравнения математической физики.* М.: ЛЕНАНД, 2021.

2. *Корзюк В.И., Чеб Е.С.* Граничная задача с условиями Неймана для нестрого гиперболического уравнения второго порядка. *Вестник БГУ. Сер.1.* No 2 (2014), 71–76.

3. *Ломовцев Ф.Е., Юрчук Н.И.* Решение начально-краевой задачи для нестрого гиперболического уравнения при смешанных граничных условиях в четверти плоскости. *Весцi НАНБ.* No 3 (2016), 51–57.

4. *Петков В.М., Иврий Н.И.* Необходимые условия корректности задачи Коши для нестрого гиперболических уравнений. *Успехи матем. наук.* Т. 29, No 5 (1974), 3–70.

5. *Чеб Е.С.* Классическое решение смешанной задачи для линейного гиперболического уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками. *Вестник ГГУ. Сер.2.* Т. 7, No 3 (2017), 33–41.

6. *Чеб Е.С., Симинская Е.С.* О классическом решении смешанной задачи для линейного нестрого гиперболического уравнения четвертого порядка с одной кратной характеристикой. *Прикладная математика & Физика.* Т. 1, No 1 (2020), 11–18.

7. *Ломовцев Ф.Е.* Критерий корректности смешанной задачи для одного параболического уравнения на отрезке со смешанными граничными условиями на концах. *Материалы Междунар. конференции “Воронежская зимняя математическая школа”. Воронеж: ВГУ.* (2019), 184–185.

УДК 517.544

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ КЛАССОВ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СТЕПЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Т. А. Чехменок[1], **С. В. Рогозин**[2]

e-mail: [1]tchekhmenok@gmail.com, [2]rogosin@bsu.by

Разрешимость нелинейной степенной краевой задачи определяется некоторым уравнением в целых числах, каковыми являются количества нулей решения в соответсвующих областях. Эти количества определяют классы решений задачи. Тем самым семейство классов решений зависит от целочисленных параметров. В статье дается параметрическое описание классов решений нелинейной степенной краевой задачи.

Ключевые слова: *нелинейная степенная краевая задача; разрешимость; классы решений; параметрическое описание.*

PARAMETRIC DESCRIPTION OF THE CLASSES OF SOLUTIONS TO NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEM OF POWER TYPE

T. A. Chekhmenok[1], **S. V. Rogosin**[2]

e-mail: [1]tchekhmenok@gmail.com, [2]rogosin@bsu.by

Solvability of the nonlinear boundary value problem of power type is determined by certain equation in integer numbers which are quantities of zeros of the solutions in the corresponding domains. These numbers define classes of solutions to the problem. Thus the family of these classes depends on integer parameters. In this article we give a parametric description of the classes of solutions to the nonlinear boundary value problem of power type.

Keywords: *nonlinear boundary value problem of power type; solvability; classes of solutions; parametric description.*

Mathematics Subject Classification (2020): Primary 30E25, Secondary 30H99.

1. Введение

Теория линейных краевых задач для аналитических функций [1] представляет собой глубокое, достаточно полно описанное направление современного математического анализа. Интерес к этому направлению связан прежде всего с тем, что существуют многие задачи математики и математической физики и других наук (см., например, [1, 2, 3]), которые используют при решении разработанный в рамках этой теории математический аппарат. Ф.Д. Гахов (см. [1]) показал, что разрешимость линейной краевой задачи Римана определяется индексом коэффициента задачи, множества решений образуют линейные многообразия (подпространства) пространств ограниченных кусочно-аналитических функций, а возможные условия разрешимости — линейные комбинации некоторых интегральных соотношений. Эти свойства оказались характерными для различных (линейных) обобщений краевой задачи Римана.

Переход к нелинейным аналогам линейных краевых задач был связан прежде всего с тем, что подобные обобщения также возникают в задачах математической физики (см., например, [2, 3, 4]). Несмотря на внешнее сходство соответствующих краевых условий, нелинейные задачи несут в себе новые качества (см., например, [2, 4]). Результаты исследования разрешимости и построения решений нелинейных краевых задач, в частности, так называемой нелинейной краевой задачи степенного типа, представлены во многих монографиях и научных статьях (см., например, [2, 5, 6, 7, 8, 9]), хотя их теория далека от завершения.

Структура множества решений нелинейных краевых задач, в частности нелинейных задач для аналитических функций, является более сложной. Например, множество решений не обладает линейностью. В работе [7] предложен метод описания структуры множества решений одной из простейших нелинейных краевых задач — дробно-линейной краевой задачи. Этот метод, названный *методом расслоения пространства решений* (space foliation), представляет собой организацию пространства в форме объединения непересекающихся подмножеств (слоев), индексированных некоторыми параметрами.

В настоящей статье метод расслоения пространства решений переносится на параметрическое описание множества решений однородной и неоднородной нелинейной степенной краевой задачи. При этом используются конструкции решений, предложенные в серии статей авторов (см. статью [6] и приведенные в ней ссылки на другие работы, а также [9]).

2. Постановка задачи. Классы решений

Пусть L — простой гладкий замкнутый контур, который разбивает комплексную плоскость на две области: внутреннюю $D^+ = int\, L$ и внешнюю $D^- = ext\, L$. Не ограничивая общности, можно считать, что $z = 0 \in D^+$, $z = \infty \in D^-$ (см. Рис. 1)

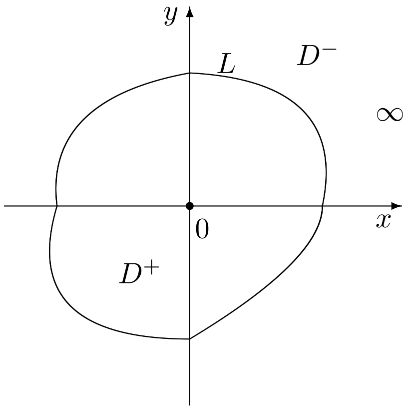

Рис. 1: Контур краевого условия

Пусть на L заданы функции $G(t)$, $g(t) \in H^\mu(L)$, причём $G(t) \neq 0$, $t \in L$. Нелинейная степенная краевая задача состоит в отыскании всех пар функций $\Phi^\pm(z)$, отличных от тождественного нуля, однозначных и аналитических в $D^\pm$ соответственно, непрерывные предельные значения которых $\Phi^\pm(t) \neq 0$ на контуре L удовлетворяют краевому условию:

$$[\Phi^+(t)]^\alpha = G(t)[\Phi^-(t)]^\beta + g(t), \quad t \in L, \tag{2.1}$$

где α, $\beta \in \mathbb{R}_+$ — произвольные положительные действительные числа.

Определение 2.1. Обозначим $\mathcal{A}_{k,l}(L)$ семейство пар функций (φ^+, φ^-), $\varphi^+ : D^+ \to \mathbb{C}$, $\varphi^- : D^+ \to \mathbb{C}$, аналитических в областях D^+, D^-, соответственно, непрерывных вплоть до границы L, имеющих точно k, l нулей (с учетом их кратности) в D^+, D^-.

Обозначим $\mathcal{A}_{k,l}^{m,n}(L)$ семейство пар функций (φ^+, φ^-), $\varphi^+ : D^+ \to \mathbb{C}$, $\varphi^- : D^+ \to \mathbb{C}$, мероморфных в областях D^+, D^-, соответственно, непрерывных вплоть до границы L, имеющих точно k, l нулей (с учетом их кратности) и точно m, n полюсов (с учетом их кратности) в D^+, D^-.

Приведенные в Определении 2.1 семейства пар функций будут использованы ниже для описания классов решений как однородной задачи (т.е. при $g(t) \equiv 0$), так и неоднородной задачи (2.1) (т.е. при $g(t) \not\equiv 0$).

По аналогии с линейной краевой задачей [1], одним из параметров, определяющим разрешимость краевой задачи (2.1), является индекс Коши коэффициента $G(t)$ задачи:

$$æ := ind_L G(t) = \frac{1}{2\pi}\Delta_L \arg G(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L d(\ln G(t)). \qquad (2.2)$$

3. Решение однородной задачи

Рассмотрим однородную нелинейную степенную задачу, соответствующую задаче (2.1)

$$[\Phi^+(t)]^\alpha = G(t)[\Phi^-(t)]^\beta, \quad t \in L. \qquad (3.1)$$

При $æ = 0$ решение задачи (3.1) может быть построено в классе функций $\mathcal{A}_{0,0}(L)$, не имеющих нулей в соответствующих областях, поскольку степени решений $[\Phi^+(t)]^\alpha$, $[\Phi^-(t)]^\beta$ однозначно определены и допускают в этом случае однозначное аналитическое продолжение внутрь областей D^+, D^- соответственно.

Если же компоненты решения допускают наличие нулей в областях их определения, то данное утверждение, вообще говоря, не имеет места. В [5, 6] показано, что задача (3.1) разрешима в классе $\mathcal{A}_{k,l}(L)$ кусочно-аналитических функций, имеющих k нулей в области D^+ и l нулей в области D^- (с учетом их кратности), тогда и только тогда, когда параметры k, l удовлетворяют следующему равенству

$$\alpha k + \beta l = æ, \qquad (3.2)$$

где $æ := ind_L G(t)$. При этом расположение нулей в соответствующих областях не имеет значения, т.е. для каждой пары чисел k, l, удовлетворяющей (3.2), любые k точек области D^+ и l точек области D^- могут быть нулями решения задачи.

Заметим, что уравнение в целых неотрицательных числах (3.2) может иметь единственное решение (например, $k = l = 3$ при $\alpha = \sqrt{2}, \beta = 2 - \sqrt{2}$ и $æ = 6$), несколько решений (например, $k = 5 - 2m$, $l = 5 + m$, $m = 0, 1, 2$, а также $k = 5 + 2m$, $l = 5 - m$, $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, при $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{2}{3}$ и $æ = 5$), а также может не иметь решений (например, при $\alpha = \sqrt{2}$, $\beta = 2$ и $æ = 3$).

Можно также заметить, что для любого фиксированного $æ \geq 0$ существует лишь конечное число классов $\mathcal{A}_{k,l}(L)$, параметры которых k, l удовлетворяют условию (3.2), т.е. в любом случае задача (3.1) имеет решения только в конечном числе классов $\mathcal{A}_{k,l}(L)$.

Наконец отметим, что при $æ<0$ уравнение (3.2) неразрешимо в целых неотрицательных числах. Следовательно, в этом случае задача (3.1) не имеет решений ни в одном из классов $\mathcal{A}_{k,l}(L)$.

Если показатели степени α, β рациональные числа, то уравнение (3.2) сводится к линейному диофантову уравнению с целочисленными коэффициентами, методы решения которых достаточно хорошо разработаны (см., например, [10, 11]). Если же хотя бы один из параметров α, β — иррациональное число, то не существует общего подхода к исследованию разрешимости и построению решений уравнения (3.2).

Следуя [1, 2], будем говорить, что пара функций $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$ является решением задачи (3.1), если существуют однозначные ветви многозначных функций $[\Phi^+(z)]^\alpha$, $[\Phi^-(z)]^\beta$, аналитические вне пары разрезов, проходящих через все нули функций $\Phi^\pm(z)$, граничные значения которых удовлетворяют условию (3.1), соответственно.

Предположим, что $\Phi^\pm(z) \in \mathcal{A}_{k,l}$ — решение задачи (3.1). Тогда введём новые функции [1, 2]:

$$\begin{cases} \Phi^+(z) = P_k(z)\Phi_1^+(z), \ z \in D^+, \\ \Phi^-(z) = P_l\left(\frac{1}{z}\right)\Phi_1^-(z), \ z \in D^-, \end{cases} \qquad (3.3)$$

где $P_k(z)$ — многочлен степени k, все нули которого лежат в области D^+, $P_l\left(\frac{1}{z}\right)$ — многочлен степени l, все нули которого лежат в области D^- (включая, возможно, нуль в точке $z = \infty$). Функции $\Phi_1^\pm(z)$ не имеют нулей в областях $D^\pm$ соответственно, то есть $\Phi_1^\pm(z) \in \mathcal{A}_{0,0}$. Обозначим через $z_1^+,\ldots, z_k^+$ и $z_1^-,\ldots, z_{l_1}^-$ нули многочленов $P_k(z)$ и $P_l\left(\frac{1}{z}\right)$ соответственно, полагая, что $P_l\left(\frac{1}{z}\right)$ имеет нуль порядка l_0 в точке $z=\infty$, $l_1+l_0=l$. Тогда равенства (3.3) принимают вид:

$$\begin{cases} \Phi^+(z) = \prod\limits_{j=1}^{k}(z-z_j^+)\Phi_1^+(z),\ z\in D^+, \\ \Phi^-(z) = z^{-l_0}\prod\limits_{i=1}^{l_1}\left(1-\frac{z_i^-}{z}\right)\Phi_1^-(z),\ z\in D^-. \end{cases} \tag{3.4}$$

Так как $\Phi_1^\pm(z)\in\mathcal{A}_{0,0}$, то для любой пары решений $\Phi^\pm(z)$ и любого произвольного набора нулей z_j^+, $j=\overline{1,k}$, z_i^-, $i=\overline{1,l_1}$, существуют однозначные ветви функций $[\Phi_1^+(z)]^\alpha$, $[\Phi_1^-(z)]^\beta$, непрерывные вплоть до границы, граничные значения которых удовлетворяют краевому условию.

Подставляя (3.4) в (3.1), запишем последнее краевое условие в следующей эквивалентной форме:

$$[\Phi_1^+(t)]^\alpha = G(t)t^{-\beta l_0}\frac{\left[\prod\limits_{i=1}^{l_1}\left(1-\frac{z_i^-}{t}\right)\right]^\beta}{\left[\prod\limits_{j=1}^{k}\left(t-z_j^+\right)\right]^\alpha}[\Phi_1^-(t)]^\beta,\ \ t\in L. \tag{3.5}$$

Задача (3.5) рассматривается в классе $\mathcal{A}_{0,0}$.

Определим смысл граничных функций

$$\left[\prod_{j=1}^{k}(t-z_j^+)\right]^\alpha;\ \left[\prod_{i=1}^{l_1}\left(1-\frac{z_i^-}{t}\right)\right]^\beta.$$

Для этого зафиксируем однозначные ветви многозначных функций

$$\left[\prod_{j=1}^{k}(z-z_j^+)\right]^\alpha;\ \left[\prod_{i=1}^{l_1}\left(1-\frac{z_i^-}{z}\right)\right]^\beta. \tag{3.6}$$

Каждому допустимому выбору однозначных ветвей соответствует краевое условие (3.5). Так как указанный выбор, вообще говоря, не является единственным, то следует говорить не об одном краевом условии, а о целом семействе краевых условий (3.5) с непрерывным коэффициентом.

Опишем множество выборов ветвей многозначных функций, предельные значения которых представлены в (3.5), таких, что каждому из этих выборов соответствует краевая задача с непрерывным коэффициентом.

З а м е ч а н и е. Если коэффициент задачи (3.5) разрывен на контуре, то задача (3.5) не имеет решения в классе $\mathcal{A}_{0,0}$. Следовательно, задача (3.1) в этом случае не имеет решения в классе $\mathcal{A}_{k,l}$.

Зафиксируем разрез $L_{0,\infty}$, соединяющий точки 0, $z_1^+,\ldots, z_k^+$, t_0, $z_1^-,\ldots, z_{l_1}^-$, ∞, для которого t_0 — единственная точка пересечения $L_{0,\infty}$ и L (см., Рис. 2).

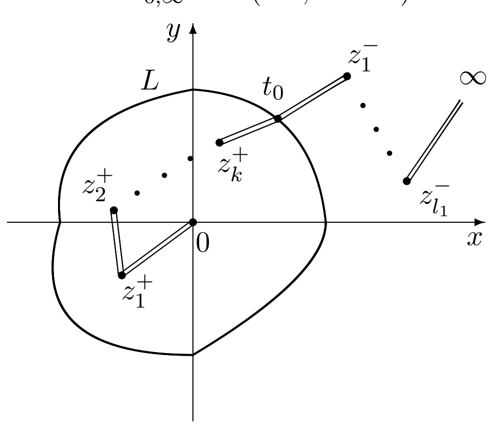

Рис. 2: Разрез, определяющий однозначные ветви.

Зафиксируем однозначные ветви многозначных функций

$$\left[\prod_{j=1}^{k}\left(1-\frac{z_j^+}{z}\right)\right]^{\alpha};\ \left[\prod_{i=1}^{l_1}\left(z-z_i^-\right)\right]^{\beta}. \tag{3.7}$$

Тогда справедлива следующая

Лемма 3.1. [12] *Пусть L — гладкий замкнутый контур, $z_j^+\in int\,L$, $j=\overline{1,k}$, $z_i^-\in ext\,L$, $i=\overline{1,l_1}$, α, $\beta\in\mathbb{R}_+\backslash\mathbb{Z}$. Тогда для многозначных функций (3.6) и (3.7) существует выбор однозначных ветвей такой, что для любого $t\in L\backslash\{t_0\}$*

$$\left[\prod_{j=1}^{k}(t-z_j^+)\right]^{\alpha}=\left[\prod_{j=1}^{k}\left(1-\frac{z_j^+}{t}\right)\right]^{\alpha}t^{\alpha k}, \tag{3.8}$$

$$\left[\prod_{i=1}^{l_1}\left(1-\frac{z_i^-}{t}\right)\right]^{\beta}=\left[\prod_{i=1}^{l_1}\left(t-z_i^-\right)\right]^{\beta}t^{-\beta l_1}, \tag{3.9}$$

где t_0 — некоторая фиксированная точка контура L.

При других выборах ветвей коэффициенты краевых условий отличаются друг от друга постоянным множителем. Данная константа не влияет на разрешимость краевой задачи и на процедуру решения, более того, различным выборам ветвей функций (3.6) и (3.7) в силу (3.2) соответствуют одинаковые решения исходной задачи. Поэтому достаточно рассмотреть однозначные ветви многозначных функций, предельные значения которых удовлетворяют (3.8) и (3.9), а также исследовать разрешимость только той из краевых задач семейства (3.5), которая соответствует выбору ветвей, указанному в лемме 3.1. Вследствие этого всюду ниже речь идёт об одной задаче (3.5).

Пользуясь (3.8) и (3.9) представим краевое условие (3.5) в виде

$$[\Phi_1^+(t)]^{\alpha}=G(t)t^{-\alpha k-\beta l}\frac{\left[\prod\limits_{i=1}^{l_1}\left(t-z_i^-\right)\right]^{\beta}}{\left[\prod\limits_{j=1}^{k}\left(1-\frac{z_j^+}{t}\right)\right]^{\alpha}}[\Phi_1^-(t)]^{\beta},\ \ t\in L. \tag{3.10}$$

Заметим, что выбор ветвей многозначных функций, описанный в Лемме 3.1, гарантирует, что точка t_0 не является точкой разрыва коэффициента задачи (3.10).

Введём новые функции (см. [6]):

$$\begin{cases}\Phi_2^+(z)=\left[\prod\limits_{i=1}^{l_1}(z-z_i^-)\right]^{-\beta}[\Phi_1^+(z)]^{\alpha},\ z\in D^+,\\ \Phi_2^-(z)=\left[\prod\limits_{j=1}^{k}\left(1-\frac{z_j^+}{z}\right)\right]^{-\alpha}[\Phi_1^-(z)]^{\beta},\ z\in D^-.\end{cases} \tag{3.11}$$

Формулы (3.11) задают однозначные аналитические функции в соответствующих областях. Таким образом, исходная задача (3.1) сводится к линейной краевой задаче с непрерывным коэффициентом:

$$\Phi_2^+(t)=t^{-æ}G(t)t^{æ-\alpha k-\beta l}\Phi_2^-(t),\ t\in L. \tag{3.12}$$

При выполнении условия (3.2) краевое условие (3.12) принимает вид

$$\Phi_2^+(t)=t^{-æ}G(t)\Phi_2^-(t),\ t\in L. \tag{3.13}$$

Индекс коэффициента задачи (3.13) равен 0: $æ_0 = ind_L[t^{-æ}G(t)] = 0$.

Заметим также, что при выполнении (3.2) каждое решение линейной задачи с непрерывным коэффициентом вида (3.12) порождает решение задачи (3.1) с помощью (3.4) и (3.11). Следовательно, при выполнении (3.2) краевая задача (3.1) в классе функций $\mathcal{A}_{k,l}$ и краевая задача (3.13) с непрерывным коэффициентом в классе $\mathcal{A}_{0,0}$ эквивалентны.

Факторизуем коэффициент $t^{-æ}G(t)$ задачи (3.13), т.е. найдем по формулам Гахова [1] кусочно-аналитическую функцию $X_0^{\pm}(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\ln[\tau^{-æ}G(\tau)]d\tau}{\tau - z}\right\}, z \in D^{\pm}$, предельные значения которой удволетворяют равенству

$$t^{-æ}G(t) = \frac{X_0^+(t)}{X_0^-(t)}, \quad t \in L.$$

Поскольку индекс функции $t^{-æ}G(t)$ равен нулю, то $X_0^{\pm}(z) \neq 0,\ z \in D^{\pm}$. Тогда любое решение данной задачи в рассматриваемом классе функций $\mathcal{A}_{0,0}$ может быть представлено в виде

$$\begin{cases} \Phi_2^+(z) = CX_0^+(z),\ z \in D^+, \\ \Phi_2^-(z) = CX_0^-(z),\ z \in D^-, \end{cases} \tag{3.14}$$

где $C \in \mathbb{C}$ — произвольная константа.

Отсюда получаем следующее представление общего решения задачи (3.1).

Т е о р е м а 3.1. [12] *Пусть в краевом условии (3.1) $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}_+$. Задача (3.1) разрешима в классе функций $\mathcal{A}_{k,l}$ тогда и только тогда, когда уравнение (3.2) разрешимо в целых неотрицательных числах. В случае разрешимости решение задачи (3.1) в соответствующем классе функций $\mathcal{A}_{k,l}$ имеет вид*

$$\begin{cases} \Phi^+(z) = C^{\frac{1}{\alpha}} \prod\limits_{j=1}^{k}(z - z_j^+)[X_0^+(z)]^{\frac{1}{\alpha}} \left[\prod\limits_{i=1}^{l_1}(z - z_i^-)\right]^{\frac{\beta}{\alpha}},\ z \in D^+, \\ \Phi^-(z) = C^{\frac{1}{\beta}} z^{-l_0} \prod\limits_{i=1}^{l_1}\left(1 - \frac{z_i^-}{z}\right)[X_0^-(z)]^{\frac{1}{\beta}} \left[\prod\limits_{j=1}^{k}\left(1 - \frac{z_j^+}{z}\right)\right]^{\frac{\alpha}{\beta}},\ z \in D^-, \end{cases} \tag{3.15}$$

где $C \neq 0$ — произвольная константа, а произвольные фиксированные ветви многозначных функций (3.6) и (3.7) и функции z^{γ} определены выше в плоскости с разрезом $L_{0,\infty}$.

Результат теоремы 3.1 отличается от аналогичного результата для линейных краевых задач. Из представлений (3.15) вытекает, что функции $\Phi^+(z), \Phi^-(z)$ являются однозначными аналитическими функциями в соответствующих областях в силу выбора ветвей многозначных функций в правых частях равенств (3.15). Тем не менее, функции $[\Phi^+(z)]^{\alpha}, [\Phi^-(z)]^{\beta}$ многозначны и их предельные значения на контуре L разрывны в точках пересечения L с соответствующими разрезами. Лемма 3.1 показывает, что при этом равенство (3.1) выполнено, поскольку $[\Phi^+(t)]^{\alpha}, [\Phi^-(t)]^{\beta}$ имеют согласованные разрывы в одних и тех же точках.

Множество пар аналитических функций $(\Phi^+(z), \Phi^-(z))$, задаваемых формулами (3.15), при каждом фиксированном наборе $k,\ l$, удовлетворяющем (3.2), образует собственое подмножество $\mathcal{A}_{k,l}^{(0)}$ класса $\mathcal{A}_{k,l}$. Таким образом, множество решений $\mathcal{A}$ задачи (3.1) представляют собой объединение непересекающихся множеств

$$\mathcal{A} = \bigcup_{k,l:\alpha k + \beta l = æ} \mathcal{A}_{k,l}^{(0)},$$

где

$$\mathcal{A}_{k,l}^{(0)} := \left\{ \left(\Phi^+(z), \Phi^-(z)\right) \in \mathcal{A}_{k,l} : \left(\Phi^+(z), \Phi^-(z)\right) \text{ в } (3.15) \right\}.$$

Если допустить решение задачи (3.1) в более широких классах $\mathcal{A}_{k,l}^{m,n}$ кусочно-мероморфных функций, то разрешимость задачи в этих классах возможна тогда и только тогда, когда параметры удовлетворяют соотношению

$$\alpha(k - m) + \beta(l - n) = æ. \tag{3.16}$$

Построение решений в этих классах в целом аналогично приведенной выше процедуре для решения задачи (3.1) в классах $\mathcal{A}_{k,l}$. Новым является то, что уравнение (3.16) может быть разрешимо для любых æ. Кроме того, множество классов $\mathcal{A}_{k,l}^{m,n}$, в которых задача (3.1) разрешима, может оказаться бесконечным. Например, для любых α, β и æ $= 0$ уравнению (3.16) удовлетворюют параметры $k = m \in \mathbb{N}_0, l = n \in \mathbb{N}_0$ (и не только они).

4. Решение неоднородной задачи

Данный раздел посвящен анализу структуры множества решений неоднородной нелинейной степенной краевой задачи

$$[\Phi^+(t)]^\alpha = G(t)[\Phi^-(t)]^\beta + g(t), \tag{4.1}$$

где $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}_+$ — произвольные действительные положительные числа, а заданные на на L функции $G(t),\ g(t) \in H^\mu(L)$ таковы, что $G(t) \neq 0,\ t \in L$. Решения будем рассматривать в классах функций $\mathcal{A}_{k,l}$, где k — количество нулей в области D^+, l — количество нулей в области D^-, при этом будем рассматривать только такие значения параметров $k, l \in \mathbb{N}_0$, которые удовлетворяют дополнительному условию (3.2). Это связано с тем, что частным случаем задачи (4.1) является однородная нелинейная степенная краевая задача (3.1) (т.е. задача (4.1) при $g(t) \equiv 0$). Как было указано в предыдущем разделе, критерием разрешимости задачи (3.1) является условие (3.2).

В отличие от линейных задач нелинейные краевые задачи обладают обладают существенно более сложной стрктурой. Суть этой сложности состоит в следующем. Факторизуя коэффициент $G(t)$ задачи (4.1), т.е. представляя его в виде

$$G(t) = \frac{X^+(t)}{X^-(t)}, \quad t \in L,$$

приходим к необходимости анализа возможности представления функции $g_1(t) = \frac{g(t)}{X^+(t)}$ в следующем виде

$$g_1(t) = \frac{[\Phi^+(t)]^\alpha}{X^+(t)} - \frac{[\Phi^-(t)]^\beta}{X^-(t)}. \tag{4.2}$$

Если, например, æ $= ind_L G(t) = 0$, то функции $X^\pm(z)$ не имеют нулей в областях своего определения. Тогда условие (4.2) может быть записано в виде

$$g_1(t) = [\widetilde{\Phi}^+(t)]^\alpha - [\widetilde{\Phi}^-(t)]^\beta, \tag{4.3}$$

где $\widetilde{\Phi}^+(z) = \frac{\Phi^+(z)}{[X^+(z)]^{\frac{1}{\alpha}}}, \widetilde{\Phi}^-(z) = \frac{\Phi^-(z)}{[X^-(z)]^{\frac{1}{\beta}}}$ — неизвестные аналитические функции, имеющие тоже количество нулей, что и $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$. Заметим, что в силу условия (3.2) искомое решение не может иметь нулей, т.е. задача может быть рассмотрена только в классе $\mathcal{A}_{0,0}$.

Таким образом, в случае æ $= ind_L G(t) = 0$ метод построения решения неоднородной степенной краевой задачи (4.1) сводится к факторизации коэффициента $G(t)$ и последующего решения задачи о скачке (4.3), т.е. фактически совпадает с алгоритмом решения линейной краевой задачи.

Данная ситуация существенно меняется, если æ $= ind_L G(t) \neq 0$. Во-первых, при использовании стандартного построения канонической функции (см. [1]) функция $X^-(z)$ имеет нуль порядка æ при æ > 0 и полюс порядка $-$æ при æ < 0 на бесконечности. Во-вторых, задача (4.2) не сводится к задаче о скачке.

Рассмотрим алгоритм построения решения неоднородной задачи (4.1) в классах $\mathcal{A}_{k,l}$ следуя [6, 13]. Остановимся при этом только на случае æ $= ind_L G(t) > 0$.

Пусть $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$ — решение задачи (2.1) в классе $\mathcal{A}_{k,l}$. Обозначим через $z_1^+, \ldots, z_k^+$ нули $\Phi^+(z)$ в области D^+ и как $z_1^-, \ldots, z_{l_1}^-$, $l_1 \leq l$ нули $\Phi^-(z)$ в области $D^- \backslash \{\infty\}$, решение имеет нуль порядка $l_0 = l - l_1$ на бесконечности.

Введём новые функции по формулам (3.4) [2]. Имеем

$$[\Phi_1^+(t)]^\alpha = \frac{\left[\prod\limits_{i=1}^{l_1}\left(1-\frac{z_i^-}{t}\right)\right]^\beta}{\left[\prod\limits_{j=1}^{k}(t-z_j^+)\right]^\alpha} t^{-\beta l_0} G(t)[\Phi_1^-(t)]^\beta + \frac{g(t)}{\left[\prod\limits_{j=1}^{k}(t-z_j^+)\right]^\alpha},\ t\in L. \tag{4.4}$$

Аналогично случаю однородной задачи получим, что при соответствующем выборе однозначных ветвей многозначных функций задача (4.1) равносильна задаче с непрерывным коэффициентом:

$$[\Phi_1^+(t)]^\alpha = \frac{\left[\prod\limits_{i=1}^{l_1}(t-z_i^-)\right]^\beta}{\left[\prod\limits_{j=1}^{k}\left(1-\frac{z_j^+}{t}\right)\right]^\alpha} t^{-\alpha k-\beta l} G(t)[\Phi_1^-(t)]^\beta + \frac{g(t)}{\left[\prod\limits_{j=1}^{k}(1-\frac{z_j^+}{t})\right]^\alpha t^{\alpha k}},\ t\in L. \tag{4.5}$$

Функции $\left[\prod\limits_{j=1}^{k}(1-\frac{z_j^+}{t})\right]^\alpha$, $\left[\prod\limits_{1=1}^{l_1}(t-z_i^-)\right]^\beta$ и $t^{-\alpha k-\beta l}$ являются непрерывными граничными значениями однозначных аналитических функций в областях D^+, D^- и $\mathbb{C}$ соответственно (последнее благодаря условию (3.2)). В противном случае правая сторона условия (4.5) является разрывной в точке t_0, которая является точкой пересечения разреза для ветви функции $z^{\alpha k}$ и контура L. Следует отметить, что правая сторона условия (4.5) становится непрерывной, если $\alpha k = 0$.

Вводя новые неизвестные функции (3.11), получим следующую задачу $\mathbb{C}$–линейного сопряжения, эквивалентную задаче (4.5) [2]:

$$\Phi_2^+(t) = G(t)t^{-\alpha k-\beta l}\Phi_2^-(t) + \frac{g(t)}{\left[\prod\limits_{i=1}^{l_1}(t-z_i^-)\right]^\beta \left[\prod\limits_{j=1}^{k}(1-\frac{z_j^+}{t})\right]^\alpha t^{\alpha k}},\ t\in L. \tag{4.6}$$

Так как индекс этой задачи равен нулю, что обусловлено равенством (3.2), то в стандартной факторизации

$$G(t)t^{-\alpha k-\beta l} = \frac{X_0^+(t)}{X_0^-(t)}$$

где $X_0^\pm(z)$ — каноническая функция соответствующей линейной однородной задачи [1]. Тогда имеем

$$\frac{\Phi_2^+(t)}{X_0^+(t)} - \frac{\Phi_2^-(t)}{X_0^-(t)} = \frac{g(t)}{\left[\prod\limits_{i=1}^{l_1}(t-z_i^-)\right]^\beta \left[\prod\limits_{j=1}^{k}(1-\frac{z_j^+}{t})\right]^\alpha t^{\alpha k}X_0^+(t)},\ t\in L. \tag{4.7}$$

Теорема 4.1. [13] *Пусть $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}_+,\ k,l\in\mathbb{N}_0$, удовлетворяющие (3.2). При $\text{æ}\ge 0$ задача (4.1) имеет решение в классе функций $\mathcal{A}_{k,l}$ в каждом из следующих случаев:*
a) $\alpha k\in\mathbb{N}_0$;
b) $g(t)=0$ по крайней мере в одной точке контура L.
В этих случаях решение задачи (2.1) задаётся формулой

$$\begin{cases} \Phi^+(z) = \prod\limits_{j=1}^{k}(z-z_j^+)\left[\prod\limits_{i=1}^{l_1}(z-z_i^-)\right]^{\frac{\beta}{\alpha}}[X_0^+(z)]^{\frac{1}{\alpha}}[\Psi^+(z)+C_0]^{\frac{1}{\alpha}},\ z\in D^+, \\ \Phi^-(z) = z^{-l_0}\prod\limits_{i=1}^{l_1}\left(1-\frac{z_i^-}{z}\right)\left[\prod\limits_{j=1}^{k}\left(1-\frac{z_j^+}{z}\right)\right]^{\frac{\alpha}{\beta}}[X_0^-(z)]^{\frac{1}{\beta}}[\Psi^-(z)+C_0]^{\frac{1}{\beta}},\ z\in D^-, \end{cases} \tag{4.8}$$

где

$$\Psi^{\pm}(z)=\frac{1}{2\pi\iota}\int\limits_{L}\frac{g(\tau)}{\left[\prod\limits_{i=1}^{l_1}(\tau-z_i^-)\right]^{\beta}\left[\prod\limits_{j=1}^{k}(1-\frac{z_j^+}{\tau})\right]^{\alpha}\tau^{\alpha k}X_0^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-z},\ z\in D^{\pm},\tag{4.9}$$

константа C_0 *выбирается исходя из условия*

$$-C_0\not\in\Psi^+(D^+)\cup\Psi^-(D^-).\tag{4.10}$$

Если ни одно из условий a) и b) не выполнено, то задача (2.1) не имеет решений в классе функций $\mathcal{A}_{k,l}$.

Обсудим условия a) и b). При выполнении условия a) функция $z^{\alpha k}$ является однозначной аналитической функцией и ее сужение на L — непрерывная функция $\neq 0\in L$, удовлетворяющая условию Гельдера. Если условие a) не выполнено, то для многозначной функции $z^{\alpha k}$ следует выделить однозначную ветвь. Поскольку точки ветвления этой функции $z=0$ и $z=\infty$, то разрез, фиксирующий любую из однозначных ветвей пересекает контур интегрирования в интеграле (4.9) (например в точке $t_*\in L$). Из свойств интегралов типа Коши (см. [1]) вытекает, что предельные значения интеграла (4.9) имеют логарифмическую особенность в точке t_*. Другими словами, пара функций $\Phi^+(z),\Phi^-(z)$, задаваемая равенствами (4.8), удовлетворяет краевому условию (2.1), имеет нужное количество нулей в соответствующих областях, но обе эти функциии не являются непрерывными вплоть до границы.

Если же условие a) не выполнено, но выполнено условие b), то разрез, фиксирующий однозначную веть многозначной функции $z^{\alpha k}$ следует провести через точку, в которой функция $g(t)$ обращается в нуль, т.е. $g(t_*)=0$. В этом случае (см. [1]) предельные значения интеграла (4.9) непрерывны в точке t_*.

Структура решений вида (4.8) в целом аналогична структуре решений (3.15) однородной задачи (3.1). Отличие состоит в том, что в формулах общего решения появляются множители $[\Psi^+(z)+C_0]^{\frac{1}{\alpha}}$, $[\Psi^-(z)+C_0]^{\frac{1}{\beta}}$, наличие нулей у которых может нарушить аналитичность соответствующей компоненты решения (4.8) задачи (4.1). Важным отличием решения неоднородной задачи от аналогичного решения однородной задачи является несимметрия в структуре интеграла (4.9).

Заметим, что в силу аналитичности функций $\Psi^+(z)$, $\Psi^-(z)$ и равенства $\Psi^-(\infty)=0$, множества $\Psi^+(D^+)$, $\Psi^-(D^-)$ ограничены на комплексной плоскости. Поэтому выбор константы C_0, удовлетворяющей условию (4.10) всегда возможен.

Работа выполнена при поддержке Государственной программы научных исследований "Конвергенция-2025"(проект 1.7.01.4).

Литература

1. *Гахов Ф.Д. Краевые задачи, 3-е изд.* М.: Наука, 1977.

2. *Mityushev V.V., Rogosin C.V. Constructive Methods for Linear and Nonlinear Boundary Value Problems for Analytic Functions: Theory and Applications.* Boca Raton-London-New York-Washington: Chapman & Hall / CRC, 1999.

3. *Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.* М.: Наука, 1966.

4. *Wegert E. Nonlinear Boundary Value Problems for Holomorphic Functions and Singular Integral Equations.* Berlin: Akademie Verlag, 1992.

5. *Комяк И.И.* Нелинейная краевая задача типа Римана с положительными показателями. *Изв. АН БССР, сер. физ.-мат. наук.* №6 (1970), 83–87.

6. *Rogosin S.V., Chakhmianok T.A.* On solvability of inhomogeneous nonlinear power-type boundary value problem. *Complex Variables and Elliptic Equations.* Vol. 52, №10-11 (2007), 933–943.

7. *Rogosin S., Speck F.-O.* On the analytical solution of the linear-fractional Riemann problem. *Mathematische Nachrichten.* Vol. 284, №4 (2011), 543–559.

8. *Обносов, Ю.В.* Некоторые нелинейные краевые задачи теории аналитических функций, разрешимые в замкнутой форме. *Научные труды Юбилейного научного семинара по краевым задачам, посвященные 75-летию со дня рождения академика АН БССР Ф.Д.Гахова. Минск: Из-во Университетское.* (1985), 86–95.

9. *Чехменок, Т.А.* О классах разрешимости нелинейной степенной краевой задачи. *Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: материалы 10-го международного семинара 13-17 сентября 2021 г., Минск, Беларусь: ИВЦ Минфина.* (2021), 91–92.

10. *Гельфонд А.О. Решение уравнений в целых числах.* М.: Наука, 1978.

11. *Виноградов И.М. Основы теории чисел.* М.:Наука, 2020.

12. *Чехменок, Т.А.* О разрешимости однородной нелинейной краевой задачи сопряжения в классе мероморфных функций.. *Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: труды 6-й междунар. конф., Минск, 12-17 сентября 2011 г.: в 2 т. / Институт матем. НАН Беларуси, Минск,.* Т. 1 (2012), 132–135.

13. *Барановская (Чехменок) Т.А.* О построении решений неоднородной степенной краевой задачи в специальных классах функций. *Изв. АН БССР, сер. физ.-мат. наук.* №1 (2005), 45–49.

Научное издание

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА
И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Труды 10-го международного научного семинара АМАДЕ-2021
Минск, 13–17 сентября 2021 г.

На русском и английском языках

Редактор *С.В. Рогозин*
Компьютерная верстка *О.В. Дубровина*

Подписано в печать 17.05.2022. Формат $60\times84/8$.
Бумага офсетная. Печать цифровая. Усл. печ. л.
Уч.-изд. л. . Тираж 50 экз. Заказ

Республиканское унитарное предприятие
«Информационно-вычислительный центр
Министерства финансов Республики Беларусь»
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№1/161 от 27.01.2014, №2/41 от 29.01.2014
ул. Кальварийская, 17, 220004, г. Минск.