$({}_0)$ $\qquad$ $\bar{}\ ({}_0$ $\qquad$.

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЦЕПИ МАРКОВА УСЛОВНОГО ПОРЯДКА

М. В. Мальцев

1. ВВЕДЕНИЕ

Цепь Маркова [1] – широко используемая в статистическом анализе дискретных временных рядов математическая модель. Для описания процессов с «длинной памятью» применяются цепи Маркова порядка

s, $s \geq 2$. Существенным недостатком данной модели является экспоненциальное возрастание числа параметров при увеличении порядка, что затрудняет использование данной модели в практических приложениях. Поэтому актуальной является задача построения так называемых малопараметрических моделей цепи Маркова высокого порядка, описываемых меньшим числом параметров, чем полносвязная цепь Маркова порядка s. К данному классу моделей относится цепь Маркова условного порядка, рассматриваемая в данной работе.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Примем обозначения: $\mathbf{N}$ – множество натуральных чисел, $A = \{0,1,\ldots,N-1\}$ – пространство состояний мощности $N \in \mathbf{N}$, $2 \leq N < \infty$;

$J_n^m = (j_n, j_{n+1}, \ldots, j_{m-1}, j_m) \in A^{m-n+1}$, $m \geq n$, – мультииндекс; $x_t \in A$, $t \in \mathbf{N}$, – однородная цепь Маркова s-го порядка $(2 \leq s < +\infty)$, заданная на вероятностном пространстве (Ω, F, P), с $(s+1)$-мерной матрицей вероятностей одношаговых переходов $P = (p_{J_1^{s+1}})$, $p_{J_1^{s+1}} = \mathrm{P}\{x_{t+s} = j_{s+1} \mid x_{t+s-1} = j_s, \ldots, x_t = j_1\}$, $\forall t \in \mathbf{N}$; $B_* \in \{1, 2, \ldots, s-1\}$, $K = N^{B_*} - 1$ – целые числа; $Q^{(1)}, \ldots, Q^{(M)}$ – семейство M $(1 \leq M \leq K+1)$ различных квадратных стохастических матриц порядка N: $Q^{(m)} = (q_{i,j}^{(m)})$, $i, j \in A$, $1 \leq m \leq M$; $< J_n^m >= \sum_{k=n}^{m} N^{k-n} j_k \in \{0, 1, \ldots, N^{m-n+1} - 1\}$ – числовое представление мультииндекса J_n^m; $\delta_{J_n^m, I_n^m} = \prod_{k=n}^{\mathrm{m}} \delta_{j_k, i_k}$ – символ Кронекера для мультииндексов $J_n^m, I_n^m \in A^{m-n+1}$.

Цепь Маркова $s-$го порядка $x_t \in A$ называется цепью Маркова условного порядка [2], если ее вероятности одношаговых переходов имеют следующий вид:

$$p_{J_1^{s+1}} = \begin{cases} q_{j_{b_0}, j_{s+1}}^{(m_0)}, \text{ если } < J_{s-B_*+1}^s >= 0, \\ \ldots \\ q_{j_{b_K}, j_{s+1}}^{(m_K)}, \text{ если } < J_{s-B_*+1}^s >= K, \end{cases} = \sum_{k=0}^{K} \delta_{< J_{s-B_*+1}^s >, k} q_{j_{b_k}, j_{s+1}}^{(m_k)}, \tag{1}$$

где $1 \leq m_k \leq M$, $1 \leq b_k \leq s - B_*$, $0 \leq k \leq K$, $\min\limits_{0 \leq k \leq K} b_k = 1$.

Последовательность элементов $J_{s-B_*+1}^s$, определяющая условие в формуле (1), называется базовым фрагментом памяти (БФП). Из (1) видно, что для данной модели состояние x_t процесса в момент времени t зависит не от всех s предыдущих состояний, а от $B_* + 1$ состояний $(j_{b_k},\ J_{s-B_*+1}^s)$. Матрица $P = (p_{J_1^{s+1}})$ вероятностей переходов для цепи Маркова условного порядка определяется $D = 2(N^{B_*} + 1) + MN(N-1)$ независимыми параметрами.

3. ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ И ИХ СВОЙСТВА

Примем обозначения:

$$1 \le l \le s,\ 0 \le l_0 \le s-l,\ A^{s+1}(J_1^l) = \{I_1^{s+1} \in A^{s+1} : I_1^l = J_1^l\},$$

$$A^{1+l_0+l}(j_0^{l_0}, J_1^l) = \{I_1^{1+l_0+l} \in A^{1+l_0+l} : i_1 = j_0,\ I_{2+l_0}^{1+l_0+l} = J_1^l\},$$

$$\nu_{J_1^{s+1}}(n) = \sum_{t=1}^{n-s} \delta_{X_t^{t+s}, J_1^{s+1}},\quad \nu_{J_1^l}(n) = \sum_{I_1^{s+1} \in A^{s+1}(J_1^l)} \nu_{I_1^{s+1}}(n),\ 1 \le l \le s,$$

$$\nu_{j_0, J_1^l}^{(l_0)}(n) = \sum_{I_1^{1+l_0+l} \in A^{1+l_0+l}(j_0^{l_0}, J_1^l)} \nu_{I_1^{1+l_0+l}}(n).$$

В [2] получены оценки максимального правдоподобия вероятностей одношаговых переходов ($\{m_k = k\},\ k = 0, 1, \ldots, K$):

$$\hat{q}_{i,j}^{(m_k)} = \begin{cases} \sum\limits_{w \in A^{B*}} \delta_{<w>,k} \dfrac{\nu_{i,wj}^{(l_k)}(n)}{\nu_{i,w}^{(l_k)}(n)}, \text{если } \nu_{i,w}^{(l_k)}(n) > 0, \\ 1/N, \text{если } \nu_{i,w}^{(l_k)}(n) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где $l_k = s - b_k - B_*$.

Замечание. Если среди параметров $\{m_k\},\ k = 0, 1, \ldots, K$, имеются одинаковые, т.е. одна и та же матрица переходов соответствует нескольким базовым фрагментам памяти и $M \le K$, то ОМП примут вид:

$$\hat{q}_{i,j}^{(m_k)} = \begin{cases} \dfrac{\sum\limits_{w \in M_{m_k}} \nu_{i,wj}^{(l_k)}}{\sum\limits_{w \in M_{m_k}} \nu_{i,w}^{(l_k)}}, \text{если } \sum\limits_{w \in M_{m_k}} \nu_{i,w}^{(l_k)} > 0, \\ 1/N, \text{если } \sum\limits_{w \in M_{m_k}} \nu_{i,w}^{(l_k)} = 0, \end{cases}$$

где $M_i = \{w \in A^{B_*} : m_{<w>} = i\},\ i = 1, \ldots, M,\ \bigcup\limits_{i=1}^{M} M_i = A^{B_*}$.

Как показано в следующих теоремах, построенные оценки являются состоятельными и асимптотически нормальными.

Теорема 1. Если цепь Маркова условного порядка $\{x_t \in A\}, t \in \mathbf{N}$, является стационарной, то при $n \to \infty$ оценки (2) являются состоятельными:

$$\hat{q}_{i,j}^{(m)} \xrightarrow{\mathrm{P}} q_{i,j}^{(m)},\ 1 \le m \le M.$$

Теорема 2. Если цепь Маркова условного порядка $\{x_t \in A\}, t \in \mathbf{N}$, является стационарной, то при $n \to \infty$ нормированные уклонения оценок максимального правдоподобия вероятностей одношаговых переходов $\left\{ \quad \bar{q}_{i,j}^{(m)} = \sqrt{n-s}\left(\hat{q}_{i,j}^{(m)} - q_{i,j}^{(m)}\right)\right\}$ распределены в совокупности асимптотически нормально с нулевым асимптотическим математическим ожиданием и асимптотическими ковариациями:

$$\operatorname{cov}\{\bar{q}_{i_0,i_{B*+1}}^{(m_0)},\ \bar{q}_{j_0,j_{B*+1}}^{(m_1)}\} = \delta_{I_0^{B*},J_0^{B*}} q_{i_0,i_{B*+1}}^{(m_0)} \frac{\delta_{i_{B*+1},j_{B*+1}} - q_{i_0,j_{B*+1}}^{(m_0)}}{\pi(I_0^{B_*})}.$$

где $I_1^{B_*} = \sum_{w \in A^{B*}} w\delta_{<w>,m_0}$, $J_1^{B_*} = \sum_{w \in A^{B*}} w\delta_{<w>,m_1}$, $\pi(I_0^{B_*}) = \mathrm{P}\{x_t = i_0, \ldots, x_{t+B_*} = i_{B_*}\},\ I_0^{B_*} \in A^{B_*+1},\ t \in \mathbf{N}$.

Оценки максимального правдоподобия параметров $\{b_k\}$ имеют следующий вид [2]:

$$\hat{b}_k = \underset{1 \le b \le s - B_*}{\arg\max} \sum_{i,j \in A} \nu_{i,wj}^{s-b-B_*}(n) \ln(\hat{q}_{i,j}^{m_k}),\ k = 1,2,\ldots,K. \tag{3}$$

Оценки порядка цепи Маркова s и длины БФП B_* находим, решая задачу минимизации информационного функционала Байеса [3]:

$$(\hat{s}, \hat{B}_*) = \underset{2 \le s \le \bar{S},\ 1 \le B \le \bar{B}_*}{\arg\min} BIC(s, B),$$

$$BIC(s,B) = -\Big(\sum_{\substack{i,j \in A,\\ w \in A^B}} \sum_{k=0}^{K} \delta_{<w>,k} \nu_{i,wj}^{(s-\hat{b}_k - B)}(n) \ln \hat{q}_{i,j}^{(k)}\Big) + 2N^B \log n,$$

где $\bar{S} \ge 2$, $1 \le \bar{B}_* \le \bar{S} - 1$ – максимально допустимые значения параметров s и B_*, оценки $\hat{Q}^{(i)}, i = 1,\ldots,M$, и $\hat{b}_k, k = 0,\ldots,K$, вычисляются по формулам (2) и (3) соответственно.

Литература

1. *Кемени Дж., Снелл Дж.* Конечные цепи Маркова / М., Наука, 1970.
2. *Харин Ю. С., Мальцев М. В.* Алгоритмы статистического анализа цепей Маркова с условной глубиной памяти // Информатика. 2011. №1. С. 34–43.
3. *Csiszar I., Shields P. C.* Consistency of the BIC order estimator // Electronic research announcements of the American mathematical society. 1999. Vol. 5. P. 123–127.