

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ
БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра теории функций**

Логиновская
Мария Михайловна

Измерения размеров графиков функций

Дипломная работа

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук
профессор В.Г. Кротов

Допущена к защите

” ____ ” _____ 2022 г.

Заведующая кафедрой теории функций,
доктор пед. наук, профессор Н.Б.Бровка

Минск, 2022

Реферат

Дипломная работа содержит

- 23 страницы,
- 2 иллюстрации (рисунка),
- 6 использованных источников.

Ключевые слова: ГРАФИК ФУНКЦИИ, МОДУЛЬ НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИИ, ДУБЛИНГ-ПРОСТРАНСТВА, ФУНКЦИЯ ТАКАГИ - ВАН ДЕР ВАРДЕНА, ФУНКЦИЯ ХАУСДОРФА, МОДИФИЦИРОВАННАЯ ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ВОХ-МЕРА ХАУСДОРФА, МОДИФИЦИРОВАННАЯ ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ВОХ-РАЗМЕРНОСТЬ ХАУСДОРФА.

Цель дипломной работы — показать, что функция Хаусдорфа

$$h_{\omega}(t) = \frac{t^2}{\omega(t, f)}.$$

является точной верхней оценкой для функциональной модифицированной вох-размерности Хаусдорфа графика функций в классе

$$\Omega = \left\{ f \in C([0, 1], \mathbb{R}) : \omega(t, f) \asymp t \ln \frac{1}{t}, t \in (0, 1) \right\},$$

где ω — модуль непрерывности функции f .

Для достижения данной цели были поставлены следующие задачи:

- 1) Изучить понятия функциональной меры и размерности Хаусдорфа, а также функции Хаусдорфа.
- 2) Получить оценки сверху для функциональных размерностей графиков непрерывных функций, действующих из одного дублинг-пространства в другое;
- 3) Исследовать вопрос о точности верхней оценки функциональной размерности Хаусдорфа графика функции из класса Липшица;
- 4) Исследовать вопрос о точности верхней оценки функциональной размерности Хаусдорфа графика функции из класса Ω .

Основной результат, полученный в дипломной работе — показано, что для графика функции Такаги – Ван Дер Вардена, функция $h_{\omega}(t) = \frac{t^2}{\omega(t, f)}$ является функциональной модифицированной вох-размерностью Хаусдорфа; тем самым доказано что, она является точной верхней оценкой размерности в классе Ω .

Рэферат

Дыпломная праца змяшчае

- 23 старонкі,
- 2 ілюстрацыі (малюнка),
- 6 выкарыстаных крыніц.

Ключевые слова: ГРАФИК ФУНКЦИИ, МОДУЛЬ НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИИ, ДУБЛИНГ-ПРОСТРАНСТВА, ФУНКЦИЯ ТАКАГИ - ВАН ДЕР ВАРДЕНА, ФУНКЦИЯ ХАУСДОРФА, МОДИФИЦИРОВАННАЯ ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ВОХ-МЕРА ХАУСДОРФА, МОДИФИЦИРОВАННАЯ ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ВОХ-РАЗМЕРНОСТЬ ХАУСДОРФА.

Мэта дыпломнай працы — паказаць, што функцыя Хаўсдорфа

$$h_{\omega}(t) = \frac{t^2}{\omega(t, f)}.$$

з’яўляецца дакладнай верхняй ацэнкай для функцыянальнай мадыфікаванай вох-размернасці Хаўсдорфа графіка функцый у класе

$$\Omega = \left\{ f \in C([0, 1], \mathbb{R}) : \omega(t, f) \asymp t \ln \frac{1}{t}, t \in (0, 1) \right\},$$

дзе ω — модуль бесперапыннасці функцыі f .

Для дасягнення гэтай мэты былі пастаўлены наступныя задачы:

- 1) Вывучыць паняцці функцыянальнай меры і памернасці Хаўсдорфа, а таксама функцыі Хаўсдорфа.
- 2) Атрымаць адзнакі зверху для функцыянальных памернасцяў графікаў бесперапынных функцый, якія дзейнічаюць з аднаго дублінг-прасторы ў іншае;
- 3) Даследаваць пытанне аб дакладнасці верхняй ацэнкі функцыянальнай памернасці Хаўсдорфа графіка функцыі з класа Липшица;
- 4) Даследаваць пытанне аб дакладнасці верхняй ацэнкі функцыянальнай памернасці Хаўсдорфа графіка функцыі з класа Ω .

Асноўны вынік, атрыманы ў дыпломнай працы — паказана, што для графіка функцыі Такагі – Ван Дэр Вардэна, функцыя $h_{\omega}(t) = \frac{t^2}{\omega(t, f)}$ з’яўляецца функцыянальнай мадыфікаванай вох-размернасцю Хаўсдорфа; тым самым даказана што, яна з’яўляецца дакладнай верхняй ацэнкай памернасці ў класе Ω .

Abstract

The thesis contains

- 23 pages,
- 2 illustrations (drawings),
- 6 used sources.

Keywords: GRAPH OF A FUNCTION, MODULUS OF CONTINUITY OF A FUNCTION, DUBLING SPACES, TAKAGI-VAN DER WADEN FUNCTION, HAUSDORF FUNCTION, MODIFIED FUNCTIONAL HAUSDORF BOX MEASURE, MODIFIED FUNCTIONAL HAUSDORF BOX DIMENSION.

The purpose of the thesis is to show that the Hausdorff function

$$h_{\omega}(t) = \frac{t^2}{\omega(t, f)}.$$

is an exact upper bound for the functional modified Hausdorff box-dimension of the graph of functions in the class

$$\Omega = \left\{ f \in C([0, 1], \mathbb{R}) : \omega(t, f) \asymp t \ln \frac{1}{t}, t \in (0, 1) \right\},$$

where ω is the modulus of continuity of the function f .

To achieve this goal, the following tasks were set:

- 1) Study the concepts of the Hausdorff function measure and dimension, as well as the Hausdorff function.
- 2) Obtain upper bounds for functional dimensions of graphs of continuous functions acting from one doubling space to another;
- 3) Investigate the question of the accuracy of the upper bound for the functional Hausdorff dimension of the graph of a function from the Lipschitz class;
- 4) Investigate the question of the accuracy of the upper estimate for the functional Hausdorff dimension of the graph of a function from the class Ω .

The main result obtained in the thesis — shows that for the graph of the Takagi – Van Der Waerden function, the function $h_{\omega}(t) = \frac{t^2}{w(t, f)}$ is a functional modified Hausdorff box-dimension; this proves that it is an exact upper estimate of the dimension in the class Ω .