

УСТОЙЧИВОСТЬ НУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ КВАДРАТИЧНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим квадратичную систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_i = & \sum_{j=1}^n p_{ij}(t) x_j + x_i \sum_{j=1}^n l_{ij}(t) x_j + \\ & + \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n b_{ij}(t) x_j^2 + \sum_{\substack{j=2 \\ (j \neq i)}}^n \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^{i-1} c_{ikj}(t) x_k x_j \quad (i = \overline{1, n}) \end{aligned} \quad (1)$$

с непрерывными и 2ω -периодическими коэффициентами (ср. с [2]).

Имеют место следующие утверждения, дающие возможность исследовать в некоторых случаях квадратичную систему (1) по ее линейной части.

Лемма. Система (1) будет иметь линейную диагональную отражающую функцию (ОФ) вида $F_i(t, x_i) = m_i(t) x_i + M_i(t)$ ($i = \overline{1, n}$) тогда и только тогда, когда коэффициенты системы (1) удовлетворяют условиям:

$$\left. \begin{aligned} p_{ij}(t) \exp\left(-\int_{-t}^t p_{ii}(\tau) d\tau\right) + p_{ij}(-t) \exp\left(-\int_{-t}^t p_{jj}(\tau) d\tau\right) &\equiv 0 \quad (i \neq j); \\ l_{ij}(t) + l_{ij}(-t) \exp\left(-\int_{-t}^t p_{jj}(\tau) d\tau\right) &\equiv 0 \quad (i, j = \overline{1, n}); \\ b_{ij}(t) \exp\left(-\int_{-t}^t p_{ii}(\tau) d\tau\right) + b_{ij}(-t) \exp\left(-2 \int_{-t}^t p_{jj}(\tau) d\tau\right) &\equiv 0 \quad (i \neq j); \\ c_{ikj}(t) \exp\left(-\int_{-t}^t p_{ii}(\tau) d\tau\right) + c_{ikj}(-t) \exp\left(-\int_{-t}^t (p_{kk}(\tau) + p_{jj}(\tau)) d\tau\right) &\equiv 0 \\ (k \neq i, j \neq i, k = \overline{1, j-1}, i, j = \overline{1, n}). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

При этом ОФ системы (1) будет иметь вид

$$F(t, x) = \left(x_1 \exp\left(-\int_{-t}^t p_{11}(\tau) d\tau\right), \dots, x_n \exp\left(-\int_{-t}^t p_{nn}(\tau) d\tau\right) \right)^T. \quad (3)$$

(Определение ОФ см. в [1, с. 72], линейной диагональной ОФ — в [2]).

Доказательство аналогично доказательству леммы в [2].

Теорема 1. Пусть непрерывные 2ω -периодические коэффициенты системы (1) удовлетворяют условиям (2). Тогда продолжимое на $[-\omega, \omega]$ решение $x(t)$ системы (1) с начальным условием $x(\omega) = \kappa$ будет 2ω -периодическим в том и только в том случае, когда при всех $i = \overline{1, n}$, выполняется равенство $\kappa_i \left(\exp\left(-\int_{-\omega}^{\omega} p_{ii}(t) dt\right) - 1 \right) = 0$, $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n)^T$.

Доказательство следует из вида (3) для ОФ системы (1) и теоремы 1 из [1, с. 74].

Если $F(t, x)$ — ОФ некоторой 2ω -периодической дифференциальной системы, $\varphi(t; t_0, x_0)$ — общее решение этой системы в форме Коши, $T(x) = \varphi(\omega; -\omega, x)$ — отображение за период 2ω , то (см. [1]):

$$F(-\omega, x) = T(x). \quad (4)$$

Теорема 2. При выполнении условий (2) нулевое решение систе-

мы (1) с непрерывными 2ω -периодическими коэффициентами устойчиво (асимптотически устойчиво) тогда и только тогда, когда для всех $i=\overline{1, n}$ выполняется неравенство

$$\int_{-\omega}^{\omega} p_{ii}(t) dt \leq 0 \quad \left(\int_{-\omega}^{\omega} p_{ii}(t) dt < 0 \right).$$

Доказательство. Так как ОФ системы (1) имеет вид (3), то отображение $T(x)$ за период 2ω , согласно (4), линейно и имеет вид

$$T(x) = \left(x_1 \exp \int_{-\omega}^{\omega} p_{11}(t) dt, \dots, x_n \exp \int_{-\omega}^{\omega} p_{nn}(t) dt \right)^T.$$

Точка $x=0$ является неподвижной точкой отображения $T(x)$. Так как из условия теоремы следует, что для всех $i=\overline{1, n}$ $\exp \int_{-\omega}^{\omega} p_{ii}(t) dt \leq 1$ ($\exp \int_{-\omega}^{\omega} p_{ii}(t) dt < 1$), то неподвижная точка $x=0$ отображения $T(x)$ устойчива (асимптотически устойчива) (см. определение в [3, с. 177]) и $A = \text{diag}(\rho_1, \dots, \rho_n)$, $A^m = \text{diag}(\rho_1^m, \dots, \rho_n^m)$, где $\rho_i = \exp \int_{-\omega}^{\omega} p_{ii}(t) dt$ ($i = \overline{1, n}$) и $\rho_i \leq 1$ ($\rho_i < 1$), а тогда из [3, с. 177] следует справедливость теоремы 2.

Пример. У системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (1 - \sin t)x_1 + a_1(t)x_1x_2 \exp(-\sin t) + a_2(t)x_1x_3 \\ \dot{x}_2 = x_2 \cos t + a_3(t)x_2^2 \exp(-\sin t) + a_4(t)x_2x_3 + a_5(t)x_3^2 \exp(\sin t) \\ \dot{x}_3 = x_3 \sin t \cos t + a_6(t)x_2x_3 \exp(-\sin t) + a_7(t)x_2^2 \exp(-2\sin t) + a_8(t)x_3^2, \end{cases}$$

где $a^i(t)$ ($i=\overline{1, 8}$) — произвольные непрерывные на R 2π -периодические нечетные функции, продолжимое на $[-\pi, \pi]$ решение $x(t)$ будет 2π -периодическим тогда и только тогда, когда $x_1(\pi) = 0$. Нулевое решение $x(t) \equiv 0$ указанной системы неустойчиво.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мироненко В. И. Линейная зависимость функций вдоль решений дифференциальных уравнений.— Минск, 1981.
2. Альсевич Л. А.— Докл. АН БССР, 1983, т. 27, № 1, с. 5.
3. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М., 1971.

Поступила в редакцию
22.02.84