При этих условиях уравнение (4) имеет вид

$$v'' = -3vv' - \left(\frac{a_2}{2} - b_1\right) v' - v^3 - \left(\frac{a_2}{2} - b_1\right) v^2 - \\ - \left(\frac{a_1}{2} - b_2\right) v - \left(\frac{a_0}{2} - b_3\right). \tag{7}$$

Положив в (7) $v = V - \frac{a_2 - 2b_1}{6}$, получаем уравнение

$$V'' = -3VV' - V^3 - V\left[\left(\frac{a_1}{2} - b_2\right) - \left(\frac{a_2}{2} = b_1\right)' - \frac{1}{3}\left(\frac{a_2}{2} - b_1\right)^2\right] - \\ - \frac{2}{27}\left(\frac{a_2}{2} - b_1\right)^3 + \frac{1}{3}\left(\frac{a_2}{2} - b_1\right)\left(\frac{a_1}{2} - b_2\right) - \\ - \left(\frac{a_0}{2} - b_3\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{a_2}{2} - b_1\right)''. \tag{8}$$

Поскольку уравнение (8) не имеет подвижных особых точек [1], то условия (6) являются достаточными и необходимыми, чтобы (1) принадлежало классу M.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений.— М., 1950.

2. Колесникова Н. С., Лукашевич Н. А.— Дифференциальные уравнения, 1972, т. 8, № 11, с. 2082.

Поступила в редакцию
06.04.84.

УДК 517.948.3

В. В. МИТЮШЕВ

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ СО СДВИГОМ В ОБЛАСТЬ, ИМЕЮЩИМ НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ НА ГРАНИЦЕ

Определение. Функция $a(z)$ принадлежит классу $C^m(z_0)$, если она аналитична в области D и представима в виде

$$a(z) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k(z - z_0)^k + (z - z_0)^m a_1(z), \tag{1}$$

причем существует конечный предел $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in D}} a_1(z)$, m — целое неотрицательное число. При $z_0 = \infty$ представление принимает вид $a(z) = \sum\limits_{k=0}^{m-1} a_k z^{-k} + z^{-m} a_1(z)$.

1. Рассматривается следующее функциональное уравнение:

$$\Phi(z) = G(z)\Phi[f(z)] + g(z), \; z \in D, \tag{2}$$

где D — верхняя полуплоскость. Функции $G(z)$ и $g(z)$ аналитичны в верхней полуплоскости. Функция $f(z)$ осуществляет однолистное конформное отображение области D на себя, не имеет неподвижных точек внутри D и имеет единственную неподвижную точку на границе верхней полуплоскости D. Функция $\Phi(z)$ ищется аналитической в верхней полуплоскости. Без ограничения общности при $f(z) \in C^1(\infty)$ можем считать, что $f(z) = Az + B$, $A \geqslant 1$, $\operatorname{Im} B > 0$ [1]. Уравнение (2) в классе функций с некоторым поведением на действительной оси исследовалось в работах [2—3]. Наиболее полные результаты относятся к случаю $A = 1$. Настоящая работа посвящена случаю $A > 1$.

Предполагаем, что $f(z)=Az+B$, коэффициенты $G(z)$ и $g(z)$ принадлежат классу $C^m(\infty)$, где целое число $m\geqslant 0$ удовлетворяет условию

$$|G(\infty)A^{-m}|<1. \tag{3}$$

Неизвестную функцию $\Phi(z)$ ищем также в классе $C^m(\infty)$. Отметим, что класс зависит от коэффициента $G(z)$. Конформным преобразованием переведем верхнюю полуплоскость на круг $|z+1|<1$. Из результатов работы [4] следует, что достаточно рассмотреть локальное уравнение

$$\varphi(z)=H(z)\,\varphi\left(\frac{z}{A}\right)+h(z),\ |z-\varepsilon_0|<\varepsilon_0, \tag{4}$$

где ε_0 — некоторое положительное число; φ, h, $H\in C^m(0)$. Уравнение (4) легко исследуется применением принципа сжимающих отображений.

Теорема 1. а) Если $G(\infty)\neq A^{-k}$ ни при каком целом $k\geqslant 0$, то уравнение (2) в классе $C^m(\infty)$ имеет единственное решение.

б) Если равенство $G(\infty)=A^W$ выполнено для некоторого целого $N\geqslant 0$, то задача (2) имеет решение тогда и только тогда, когда $h_N=0$, где $h(z)=\sum\limits_{k=0}^{m-1} h_k z^k+z^m h_1(z)$. Решение зависит в этом случае от произвольной постоянной.

Решение выписывается в явном виде. Ввиду его громоздкости выпишем только решение уравнения (4) при $H(z)\equiv\lambda\equiv\mathrm{const}$, когда выполняется первый пункт теоремы 1:

$$\varphi(z)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{h_k z^k}{1-\lambda A^{-k}}+z^m\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda A^{-m})^k h_1\left(\frac{z}{A^k}\right),\quad |z-\varepsilon_0|<\varepsilon_0.$$

2. Рассмотрим нелинейное функциональное уравнение

$$\Phi(z)=F(z,\ \Phi[f(z)]),\ z\in D. \tag{5}$$

Область D можно считать кругом $|z+1|<1$, сдвиг $f(z)$ имеет вид $f(z)=sz$, где $0<s<1$ [4]. Функция $F(z,\ w)$ аналитична по z в области D и принадлежит классу $C'(0)$. По переменной w функция $F(z,\ w)$ является целой. Рассмотрим задачу (5) в случае, когда $F(z,\ w)=wF_1(z,\ w)$, причем $|F_1(0,\ 0)|>1$.

Сначала рассмотрим вспомогательное функциональное уравнение:

$$\Psi(z,\ F(z,\ w))=\frac{1}{\sigma}\Psi(sz,w), \tag{6}$$

где $\sigma=(F_1(0,\ 0)^{-1}$. В силу условия $F'_w\ (z,\ 0)\neq 0$ в окрестности нуля существует функция $g(z,\ \zeta)$, такая что $F(z,\ g(z,\ \zeta))\equiv\zeta$, поэтому уравнение (6) равносильно следующему двумерному уравнению Шредера: $\Psi(z,\ \zeta)=\sigma^{-1}\Psi(sz,\ g(z,\ \zeta))$. Решение этого уравнения проводится стандартным способом [5]. Искомая функция имеет вид:

$$\Psi(z,\ \zeta)=\zeta\prod_{k=0}^{\infty} g(s^k z,\ g^k(sz,\ \zeta))\ (\sigma g^k(sz,\ \zeta))^{-1}, \tag{7}$$

где $g^k(sz,\ \zeta)$ — двумерная итерация, т. е. $g^k(sz,\ \zeta)=g(s^{k-1}z,\ g^{k-1}(sz,\ \zeta))$. Функция $\Psi(z,\ w)$ по переменной w осуществляет однолистное конформное отображение окрестности нуля на другую окрестность нуля.

Переходим к решению уравнения (5). Применяя к обеим частям равенства $(z,\ \Phi(z))=(z,\ F(z,\ \Phi(sz)))$ функцию $\Psi(z,\ w)$ и пользуясь соотношением (6), получим равенство $\Psi(z,\ \Phi(z))=\sigma^{-1}\Psi(sz,\ \Phi(sz))$, эквивалентное предыдущему. Пусть $\varphi(z):=\Psi(z,\ \Phi(z))$, тогда последнее соотношение примет вид обычного уравнения Шредера [5]: $\varphi(z)=\sigma^{-1}\varphi(sz)$. Пользуясь результатами [5], получим окончательный результат:

Теорема 2. Задача (5) в случае $F(z,\ w)=wF_1(z,\ w)$, где $|F_1(0,\ 0)|>1$ имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда существует целое $N\geqslant 0$, такое что $F_1(0,\ 0)=s^N$. При выполнении этого условия решение имеет вид: $\Phi(z)=\Psi^{-1}(z, cz^{-N})$, где c — произвольная постоянная, функция $\Psi^{-1}(z, w)$ является обратной к функции $\Psi(z, \zeta)$ по переменной ζ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cowen C.— Trans. Amer. Soc., 1981, v. 265, № 1, p. 69.
2. Песчанский А. И., Шевчик В. В.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1982, № 15, с. 39.
3. Шевчик В. В.— Докл. АН СССР. 1981, т. 256, № 1, с. 51.
4. Митюшев В. В.— Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук, 1983, № 5, с. 131.
5. Küczma M.— Warszawa, 1968.

Поступила в редакцию
06.04.84.

УДК 539.3 : 534.1

Ю. В. ВАСИЛЕВИЧ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ В ВОЛНАХ ЗА ПЛИТОЙ ПРИ ПАДЕНИИ НА НЕЕ ПРОДОЛЬНОЙ ВОЛНЫ

В работе [1] исследованы колебания однослойного ограждения в твердой изотропной среде. В качестве расчетной модели рассмотрена вертикальная неограниченная по протяженности тонкая плита, подверженная воздействию продольной волны.

Настоящая работа посвящена анализу энергии в прошедшей через плиту продольной и трансформированной поперечной волнах.

При падении из левого полупространства (постановку задачи и встречающиеся здесь обозначения см. в [1]) на тонкую вертикальную плиту толщины h продольной волны $\varphi_1\exp[-i(\alpha(z+h)+\xi y-\omega t)-0{,}5\eta_1(\alpha(z+h)+\xi y)]$ в среде за плитой образуются продольная $\varphi=\varphi_2\exp[-(\alpha z+\xi y-\omega t)-0{,}5\eta_1(\alpha z+\xi y)]$ и поперечная $\psi=\psi_2\exp[-i(\beta z+\xi y-\omega t)-0{,}5\eta_2(\beta z+\xi y)]$ волны. Здесь η_1 и η_2 — коэффициенты потерь продольной и поперечной волн.

Плотность упругой энергии в волне складывается из плотностей кинетической и потенциальной энергий. Эти плотности соответственно равны

$$E_k(y, z, t)=\frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{\partial v(y, z, t)}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial w(y, z, t)}{\partial t}\right)^2\right], \quad E_n(y, z, t)=\Phi(y, z, t),$$

где $\Phi(y, z, t)=0{,}5(\sigma_y\varepsilon_y+\sigma_z\varepsilon_z+\tau_{yz}\gamma_{yz})$ — упругий потенциал; $v=\partial\varphi/\partial y-\partial\psi/\partial z$, $w=\partial\varphi/\partial z+\partial\psi/\partial y$. Зависимости между компонентами напряжений σ_y, σ_z, τ_{yz} и деформаций ε_y, ε_z, γ_{yz} определяются уравнениями закона Гука для изотропной среды.

На основании приведенных формул суммарную плотность энергии определим выражением

$$E(y, z, t)=\frac{\rho}{2}\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2+2(c_1^2-2c_2^2)\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\right.$$
$$\left.+c_1^2\left[\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]+c_2^2\left[\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right]^2\right\}. \qquad (1)$$

Воспользовавшись выражениями φ_2, ψ_2 [1] с учетом поперечного колебания w_n плиты и продольного смещения v_0 ее срединной плоскости, определим горизонтальную w и вертикальную v компоненты смещения произвольной точки за плитой. Отделив в формулах для w и v вещественные части, подставим их в (1). Усредняя затем полученное выражение по времени за период и пренебрегая членами, содержащими η_1^2 и η_2^2 среднюю по времени плотность энергии в прошедшей продольной и трансформированной поперечной волнах, отнесенную к средней по времени плотности энергии $E=0{,}5\varphi_1^2\rho\omega^4c_1^{-2}\exp[-\eta_1(\alpha z+\xi y)]$ в падающей продольной волне, запишем в виде