Краткие сообщения

УДК 517.925

А. КЕССИ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С НЕПОДВИЖНЫМИ КРИТИЧЕСКИМИ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ

Рассмотрим дифференциальные уравнения вида

$$w'''^2 + a_0ww'''' + a_1w'w''' + a_2w''w''' + a_3w''^2 + a_4w'w'' + \\ + a_5ww'' + a_6w'^2 + a_7ww' + a_8w^2 = 0 \tag{1}$$

с аналитическими коэффициентами a_j $(j=0, \ldots, 8)$ в области D и выделим те из них, решения которых имеют лишь однозначные подвижные полярные особенности. Будем говорить, что уравнения, решения которых обладают этим свойством, принадлежат классу M.

Положив в (1) $w'=vw$, получаем уравнение

$$v''^2 + v''[6vv' + a_2v' + 2v^3 + a_2v^2 + a_1v + a_0] + v'^2[9v^2 + 3a_2v + a_3] + \\ + v'[6v^4 + 4a_2v^3 + (3a_1 + 2a_3)v^2 + (3a_0 + a_4)v + a_5] + \\ + v^6 + a_2v^5 + (a_1 + a_3)v^4 + (a_0 + a_4)v^3 + (a_5 + a_6)v^2 + a_7v + a_8 = 0. \tag{2}$$

Чтобы упростить вычисления, напишем уравнение (2) в таком виде

$$v''^2 + 2Av'' + B = 0 \tag{3}$$

Лемма [2]. Для того чтобы (1) принадлежало M, необходимо и достаточно, чтобы любое решение уравнения (3) имело в качестве своих подвижных особых точек только полюсы, вычеты которых — целые числа.

Из (3) мы получаем

$$v'' = -A \pm \sqrt{A^2 - B}. \tag{4}$$

Для того чтобы уравнение (4) не имело подвижных критических особых точек, необходимо, чтобы выражение $\sqrt{A^2 - B}$ имело вид

$$\sqrt{A^2 - B} = \alpha vv' + \alpha_1v' + Bv^3 + b_1v^2 + b_2v + b_3, \tag{5}$$

где α, β — постоянные; α_1, b_i $(i=1, 2, 3)$ — аналитические функции от z. Приравнивая коэффициенты одинаковых степеней, получаем необходимые условия для отсутствия подвижных критических особых точек в уравнении (4)

$$\begin{aligned} &a_2^2 - 4a_3 = 4b_1^2; && a_1a_2 - 2a_4 = 4b_1b_2 \\ &a_0a_2 - 2a_5 = 4b_1b_3; && a_1^2 - 4a_6 = 4b_2^2 \\ &a_0a_1 - 2a_7 = 4b_2b_3; && a_0^2 - 4a_8 = 4b_3^2, \end{aligned} \tag{6}$$

так как очевидно из (5) $\alpha=\beta=0$ и $\alpha_1=\pm b_1$.

При этих условиях уравнение (4) имеет вид

$$v'' = -3vv' - \left(\frac{a_2}{2} - b_1\right) v' - v^3 - \left(\frac{a_2}{2} - b_1\right) v^2 -$$
$$- \left(\frac{a_1}{2} - b_2\right) v - \left(\frac{a_0}{2} - b_3\right). \tag{7}$$

Положив в (7) $v = V - \frac{a_2 - 2b_1}{6}$, получаем уравнение

$$V'' = -3VV' - V^3 - V\left[\left(\frac{a_1}{2} - b_2\right) - \left(\frac{a_2}{2} = b_1\right)' - \frac{1}{3}\left(\frac{a_2}{2} - b_1\right)^2\right] -$$
$$- \frac{2}{27}\left(\frac{a_2}{2} - b_1\right)^3 + \frac{1}{3}\left(\frac{a_2}{2} - b_1\right)\left(\frac{a_1}{2} - b_2\right) -$$
$$- \left(\frac{a_0}{2} - b_3\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{a_2}{2} - b_1\right)''. \tag{8}$$

Поскольку уравнение (8) не имеет подвижных особых точек [1], то условия (6) являются достаточными и необходимыми, чтобы (1) принадлежало классу M.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений.— М., 1950.

2. Колесникова Н. С., Лукашевич Н. А.— Дифференциальные уравнения, 1972, т. 8, № 11, с. 2082.

Поступила в редакцию
06.04.84.

УДК 517.948.3

В. В. МИТЮШЕВ

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ СО СДВИГОМ В ОБЛАСТЬ, ИМЕЮЩИМ НЕПОДВИЖНУЮ ТОЧКУ НА ГРАНИЦЕ

Определение. Функция $a(z)$ принадлежит классу $C^m(z_0)$, если она аналитична в области D и представима в виде

$$a(z) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k(z-z_0)^k + (z-z_0)^m a_1(z), \tag{1}$$

причем существует конечный предел $\lim\limits_{\substack{z\to z_0 \\ z\in D}} a_1(z)$, m — целое неотрицательное число. При $z_0 = \infty$ представление принимает вид $a(z) = \sum\limits_{k=0}^{m-1} a_k z^{-k} + z^{-m} a_1(z)$.

1. Рассматривается следующее функциональное уравнение:

$$\Phi(z) = G(z)\Phi[f(z)] + g(z),\ z\in D, \tag{2}$$

где D — верхняя полуплоскость. Функции $G(z)$ и $g(z)$ аналитичны в верхней полуплоскости. Функция $f(z)$ осуществляет однолистное конформное отображение области D на себя, не имеет неподвижных точек внутри D и имеет единственную неподвижную точку на границе верхней полуплоскости D. Функция $\Phi(z)$ ищется аналитической в верхней полуплоскости. Без ограничения общности при $f(z) \in C^1(\infty)$ можем считать, что $f(z) = Az + B$, $A \geqslant 1$, $\operatorname{Im} B > 0$ [1]. Уравнение (2) в классе функций с некоторым поведением на действительной оси исследовалось в работах [2—3]. Наиболее полные результаты относятся к случаю $A = 1$. Настоящая работа посвящена случаю $A > 1$.