$$\int_a^b M'(t)g(t)dt = \sum_{\alpha=1}^{n} C_\alpha \widetilde{Q}_\alpha + \frac{1}{2}(CB_0 \sin^{-2}\lambda_b\pi - E)g(b) -$$
$$- \frac{1}{2}(E - CB_0 \sin^{-2}\lambda_a\pi)\, g(a). \qquad (13)$$

Если же $\operatorname{Arg}\xi_j = 0$, то

$$\int_a^b M'(t)\, g(t)\, dt = \left[M(b) - \frac{E}{2}\right] g(b) - \left[M(a) + \frac{E}{2}\right] g(a), \qquad (14)$$

где $M(a)$, $M(b)$ определяются по формулам типа (12). Отсюда вытекает

Теорема 2. Пусть A, B, C — постоянные $(n\times n)$-матрицы такие, что $(A-B+iC)(A-B-iC)^{-1}$ имеет простую структуру с собственными значениями ξ_j, а матрицы $A-B$ и C коммутативны. Для разрешимости системы (1) с постоянными коэффициентами необходимо и достаточно:

1) разрешимость системы (13) при $0<\operatorname{Arg}\xi_j<2\pi$;

2) выполнение n условий (5) и условия (13) с $C_\alpha=0$ $(\alpha=\overline{1, n})$ при $\operatorname{Arg}\xi_j=2\pi$;

3) выполнение n условий (5) и условия (14) при $\operatorname{Arg}\xi_j=0$.

При выполнении условий разрешимости общее решение системы определяется формулой (6) при выборе C_α из системы (13) в случае 1). В остальных случаях все $C_\alpha=0$ и полученное решение будет единственным.

Замечание. Если $\det C\neq 0$, то, учитывая соотношения $B_0= =C[(A-B)^2+C^2]^{-1}$, $\sin^{-2}\lambda_a\pi=C^{-2}[(A-B)^2+C^2]$, полученные значения $M(a)$, $M(b)$ можно упростить. В этом случае формулы (10), (11) заменяются, соответственно, на формулы $M(a) = -\frac{1}{2}E$, $M(b) = \frac{1}{2}E$, а условие (13) на условие вида $\int_a^b M'(t)g(t)dt = \sum_{\alpha=1}^{n} C_\alpha \widetilde{Q}_\alpha$.

Последнее условие по форме совпадает с условием разрешимости, полученным в [3] для случая уравнения (1) с одной неизвестной функцией при $C(a)\neq 0$. Это показывает, что картина разрешимости систем уравнений вида (1) даже для случая постоянных матриц A, B, C является более сложной, чем для уравнения (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи.— М., 1977.
2. Чумаков Ф. В.— Весцi АН БССР. Сер. фiз-мат. навук, 1972, № 6, с. 104.
3. Самко С. Г.— В сб.: Математический анализ и его приложения. Ростовский ун-т, 1978, с. 103.
4. Самко С. Г.— В сб.: Методы отображений. Грозный, 1976, с. 41.
5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.— М., 1966.
6. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения.— М., 1968.
7. Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений.— М., 1970.

Поступила в редакцию
22.03.84.

УДК 517.944

П. П. ЗАБРЕЙКО, С. И. КОСТАДИНОВ

О ВРАЩЕНИИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ ЭКВИВАРИАНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Многие важные утверждения нелинейного анализа связаны с вычислением или оценками вращения (степени отображения) $\gamma(\Phi)$ эквивариантных векторных полей Φ на сфере S^{n-1} конечномерного пространства R^n. Напомним, что векторное поле Φ: $S^{n-1} \to S^{n-1}$ называется эквивариантным относительно гомоморфизма T группы G преобразований сферы S^{n-1} в себя, в ту же или в другую группу G' преобразований сферы S^{n-1} в себя, если

$$\Phi U = T(U)\Phi \qquad (U \in G). \tag{1}$$

Одной из первых теорем в этом направлении была классическая теорема Борсука [1] о нечетности вращения нечетных векторных полей. В этом случае G — это группа, состоящая из двух преобразований I и $-I$, $G'=G$, $T=T$. Более общий случай, когда G является циклической группой простого порядка p (т. е. состоит из элементов I, U. ... U^{p-1}), $G'=G$, $T=I$, исследовал П. Смит [2]. В предположении, что группа G действует на S^{n-1} свободно (т. е. U не имеет неподвижных точек), он показал, что $\gamma(\Phi)$ по модулю p равно 1. Дальнейшие продвижения для случая, когда G и G' являются циклическими группами порядков p и q соответственно, получены М. А. Красносельским [3]; в предположении, что группа G действует на S^{n-1} свободно, им было показано, что вращение $\gamma(\Phi)$ по модулю p однозначно определяется гомоморфизмом T; им же для ряда частных случаев был вычислен соответствующий элемент кольца Z_p. Наконец, в работах [4, 5] элемент кольца был посчитан для всех случаев свободного действия группы G.

Значительно более сложный случай несвободного действия группы G также изучался в [2, 3]. Полученные в этих работах результаты первоначально носили более частный характер; при этом обычно предполагалось, что группа G действует на S^{n-1} полусвободно (т. е. множество неподвижных точек у степеней U^k, $k=1, \ldots, p-1$ одно и то же). П. П. Забрейко [6] предложено понятие полугомотопных эквивариантных векторных полей и соответствующее понятие плугомотопического типа эквивариантного векторного поля, а затем им и независимо от него авторами [5] и Т. Н. Щелоковой [7], с одной стороны, и С. И. Костадиновым, с другой, показано, что вращение $\gamma(\Phi)$ по модулю p эквивариантного векторного поля Φ определяется гомоморфизмом T и полугомотопическим типом Φ. Формулы для вычисления соответствующего кольца Z_p практически во всех возможных случаях предложены в [8].

Наконец, С. И. Костадиновым и независимо от него З. И. Балановым и С. Д. Бродским [9] было показано, что $\gamma(\Phi)$ по модулю p (p — порядок группы G) определяется гомоморфизмом T и полугомотопическим типом Φ и в случае произвольных конечных групп. Соответствующие результаты о вычислении элемента кольца Z_p носят совершенно частный характер.

Естественно возникает вопрос о том, насколько описанные результаты справедливы для случая бесконечных групп G и G', в частности групп Ли. Ряд результатов в этом направлении получен в работах [9 и 10]. Ниже показывается, что основные утверждения в этом направлении совсем просто могут быть получены из соответствующих утверждений для конечных групп.

1. Пусть G — произвольная группа преобразований сферы S^{n-1} в себя, $\mathrm{Fi}\times G$ — замыкание объединения множеств $\mathrm{Fix}\,U$ неподвижных точек, отличных от тождественного преобразования U группы G (возможен случай, когда $\mathrm{Fi}\times G = S^{n-1}$, но в этом случае проводимые ниже рассуждения не представляют интереса). Пусть далее G' — вторая группа преобразований сферы S^{n-1} в себя, и T — некоторый гомоморфизм G в G'. Два эквивариантных векторных поля Φ, Ψ: $S^{n-1} \to S^{n-1}$ называются полугомотопными, если на $\mathrm{Fi}\times G\times[0, 1]$ определено отображение $X(x, \lambda)$ со значениями в S^{n-1}, для которого

$$X(Ux, \lambda) = T(U)X(x, \lambda) \quad (x \in \mathrm{Fi}\times G, \lambda \in [0, 1],$$
$$X(x, 0) = \Phi x, \quad X(x, 1) = \Psi x \quad (x \in \mathrm{Fi}\times G).$$

Отношение полугомотопности для эквивариантных векторных полей является отношением эквивалентности и поэтому эквивариантные векторные поля распадаются на классы полугомотопных друг другу; полугомотопический тип, содержащий векторное поле Φ, ниже обозначается через $\varkappa(\Phi)$. Отметим, что множество полугомотопических типов изучено лишь в самых простейших ситуациях.

Введем еще одно понятие. Пусть G — произвольная группа. Назовем ее π-характеристикой $\pi(G)$, наибольшей из порядков конечных подгрупп G, если эти порядки ограничены сверху, и число 0, если эти порядки не ограничены сверху. Как известно, для многих бесконечных групп G π-характеристика равна нулю. В частности, равна нулю (см., например, [11]) π-характеристика компактных групп Ли ненулевой размерности. Известно, что существуют бесконечные группы с ненулевой характеристикой (впрочем, неясно, есть ли среди них группы преобразований).

Теорема 1. Пусть G и G' — произвольные группы преобразований S^{n-1} в себя; T — некоторый гомоморфизм G в G', Φ и Ψ — два полугомотопных и эквивариантных векторных поля. Тогда

$$\gamma(\Phi) = \gamma(\Psi) \pmod{\pi(G)}. \tag{2}$$

Доказательство этой теоремы следует из упоминавшегося выше соответствующего результата для конечных групп и того простого замечания, что полугомотопные и эквивариантные относительно гомоморфизма T группы G в группу G' векторные поля будут полугомотопными и эвивариантными и относительно гомоморфизма T на любую конечную подгруппу G.

Из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. Пусть G и G' — компактные группы Ли положительной размерности; T — гомоморфизм G в G'; Φ, Ψ — два полугомотопных эквивариантных векторных поля. Тогда

$$\gamma(\Phi) = \gamma(\Psi). \tag{3}$$

2. В качестве примера применения теорем 1—2 рассмотрим случай, когда группа G является группой T вращений сферы S^{n-1} пространства $R^n = C \dot{+} R^{n-2}$ (C — поле комплексных чисел, рассматриваемое как двумерное вещественное пространство):

$$U(t)(z, w) = (e^{it}z, w) \quad (t \in R, \ (z, w) \in R^n), \tag{4}$$

$G' = G$, $T(U) = U^k$, где k — некоторое целое число.

Группа G является, очевидно, компактной одномерной группой Ли. При $n=2$ она действует свободно; при $n>2$ — полусвободно: каждое ее отличное от тождественного преобразование имеет неподвижные точки, множество которых образует $(n-3)$-мерную сферу S^{n-3}, совпадающую с пересечением сферы S^{n-1} пространства R^n с $(n-2)$-мерной плоскостью R^{n-2}.

Теорема 3. Пусть Φ — эквивалентное векторное поле. Тогда справедливо равенство

$$\gamma(\Phi) = \begin{cases} k, & \text{если } n = 2, \\ k\gamma(\Phi_0), & \text{если } n > 2, \end{cases} \tag{5}$$

где $\gamma(\Phi_0)$ — вращение сужения Φ_0 векторного поля Φ на сферу S^{n-3}.

Доказательство теоремы следует из теорем 1 и 2. Действительно, в силу эквивариантности поле Φ преобразует S^{n-3} в себя, и поэтому сужение Φ_0 поля Φ на S^{n-3} является векторным полем в S^{n-3}. Далее, определенное равенством $\Psi z = z^k$ при $n=2$ и равенством $\Psi(z, w) = \|(z^k, \|w\|\Phi_0(\|w\|^{-1}w))\|^{-1}(z^k, \|w\|\Phi_0(\|w\|^{-1}w))$ при $n>2$ векторное поле Ψ также является эквивариантным в S^{n-1}; при этом поля Φ и Ψ совпадают на S^{n-3} и поэтому являются полугомотопными. Остается заметить, что вращение $\gamma(\Psi)$ поля Ψ определяется равенством (5) в силу теоремы о произведении вращений (см., например, [12]).

Рассмотрим еще случай, когда G — это группа всех вращений вокруг всех $(n-2)$-мерных плоскостей $(n-1)$-мерной сферы S^{n-1} пространства R^n $(n>2)$. В этом случае условие эквивариантности, в частности, означает, что Φ отображает каждую $(n-3)$-мерную сферу в себя. Но отсюда следует, что для каждого $x \in S^{n-1}$ элемент Φx равен либо x, либо $-x$. Однако из соображений непрерывности вытекает, что в этом случае либо $\Phi = I$ либо $\Phi = -I$. Таким образом, множество эквивариантных отображений в этом случае сводится к двум (не полугомотопным друг другу) отображениям I и $-I$, и теоремы 1 и 2 для этого случая оказываются тривиальными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Borsuk K.— Fund. Math., 1933, v. 21, p. 177.
2. Смит П. А.— В кн.: Лефшец С. Алгебраическая топология. М., 1949, с. 454.
3. Красносельский М. А.— Докл. АН СССР, 1955, т. 101, № 3, с. 401.
4. Щелокова Т. Н.— Труды НИИМ ВГУ, Воронеж, 1975, вып. 20, с. 51.
5. Борисович Ю. Г., Израилевич Я. А., Щелокова Т. Н.—УМН, 1977, т. 32, вып. 1, с. 161.
6. Забрейко П. П.— Вестн. Ярославск. ун-та. Ярославль, 1973, вып. 2, с. 24.
7. Забрейко П. П.— В сб.: Геом. мет. в задачах алгебры и анал. Ярославль, 1980, с. 116.
8. Щелокова Т. Н.— Сиб. матем. ж., 1978, т. 19, № 2, с. 426.
9. Баланов З. И., Бродский С. Д.— В сб.: Функциональный анализ. Ульяновск, 1984, с. 14.
10. Баланов З. И., Винниченко С. В.— В сб.: Топологические отображения и их применение. Рига, 1984, с. 79.
11. Бредон Г. Введение в теорию компактных групп преобразований.— М., 1980.
12. Красносельский М. А., Забрейко П. П. Геометрические методы нелинейного анализа.— М., 1975.

Поступила в редакцию
06.04.84.