4. Лаптев Г. Ф.— Труды геом. семин., 1971, т. 3, с. 29.
5. Лаптев Г. Ф., Остиану Н. М.— Труды геом. семин., 1971, т. 3, с. 49.
6. Бурдун А. А., Иванов В. Г.— Тез. докл. 6-й Всесоюзн. гравит. конф. М., 1984, с. 105.
7. Иванов В. Г.— Тез. докл. 6-й Прибалт. геом. конф. Таллин, 1984, с. 46.
8. Близникас В. И.— Литов. матем. сб., 1971, т. 11, № 1, с. 63.
9. Схоутен И. А., Стройк Д. Дж. Введение в новые методы дифференциальной геометрии.— М., 1948, т. 2 (Пер. с нем.).
10. Бурдун А. А. Геометрия поля 4-скоростей в псевдоримановом пространстве.— Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 1394-76. Деп. от 26.04.76.
11. Бурдун А. А.— Весці АН БССР. Сер. Фіз-матэм. навук, 1966, № 4, с. 10.
12. Бурдун А. А., Иванов В. Г. Инвариантная классификация неизотропных векторных полей в псевдоримановом пространстве.— Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 807-84. Деп. от 09.02.84.

Поступила в редакцию
22.03.84.

*УДК 517.948.32*

*И. Н. ЗАБЕЛЛО, А. А. КИЛБАС*

# О РАЗРЕШИМОСТИ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ЯДРОМ И ВНУТРЕННИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В настоящей работе исследуется разрешимость системы интегральных уравнений первого рода с логарифмическим ядром вида

$$\int_a^x A(t)\psi(t)dt + \int_x^b B(t)\psi(t)dt + \frac{1}{\pi}\int_a^b C(t)\ln|x-t|\,\psi(t)dt = g(x), \qquad (1)$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — $(n\times n)$-матрицы.

Уравнение (1) в случае одной неизвестной функции ($n=1$) изучалось в [1—3]. Различные частные случаи этого уравнения, имеющие обширные приложения, рассматривались многими авторами (библиографию см., например, в [3, 4]). Работа состоит из двух частей. Сначала, следуя [4], мы находим необходимые и достаточные условия разрешимости системы (1) и даем ее общее решение. Затем выводим другую форму условий разрешимости для случая, когда $A$, $B$, $C$ — постоянные матрицы, а коэффициент соответствующей задачи Римана есть матрица простой структуры [5]. Следует отметить, что картина разрешимости системы (1) оказывается гораздо сложнее, чем картина разрешимости уравнения (1) ($n=1$).

Введем некоторые обозначения. Будем говорить, что вектор-функция $\psi=(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ принадлежит $H_*^n \equiv H_*^n(a, b)$, если

$$\psi_j(x) = \frac{\psi_j^*(x)}{(x-a)^{1-\varepsilon_1}(b-x)^{1-\varepsilon_2}},$$

где $\psi_j^*(x) \in H_\mu^n(a, b)$, $0<\mu<1$, $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2>0$. Через $C_*^{1,n} \equiv C_*^{1,n}[a, b]$ обозначим класс дифференцируемых на $[a, b]$ вектор-функций $g(x)$ таких, что $g'(x) \in H_*^n$.

Пусть $S(t)=A(t)-B(t)-iC(t)$, $T(t)=A(t)-B(t)+iC(t)$. Будем искать решение системы (1) в классе $H_*^n$ предполагая, что свободный член $g(x) \in C_*^{1,n}$, а матрицы $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ с элементами из гельдеровых пространств таковы, что имеет место нормальный случай: $\det S(t) \neq 0$, $\det T(t) \neq 0$ для любых $t \in [a, b]$.

Система (1) эквивалентна системе особых интегральных уравнений

$$[A(x)-B(x)]\,\psi(x) - \frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{C(t)\psi(t)dt}{t-x} = g'(x) \qquad (2)$$

с дополнительным условием

$$\int_a^b m(t)\psi(t)dt = \frac{g(a)+g(b)}{2}, \tag{3}$$

где $m(t) = \dfrac{A(t)+B(t)}{2} + \dfrac{C(t)}{2\pi} \ln [(t-a)(b-t)]$.

Без ограничения общности можно считать, что частные индексы системы (2) таковы, что $\varkappa_1 \geqslant \ldots \geqslant \varkappa_l \geqslant 0 > \varkappa_{l+1} \geqslant \ldots \geqslant \varkappa_n$ [6, 7]. Обозначим $l^+ = \varkappa_1 + \ldots + \varkappa_l$, $l^- = -\varkappa_{l+1} - \ldots - \varkappa_n$.

Поставим в соответствие системе (2) однородную задачу Римана

$$\Psi^+(x) = G(x)\Psi^-(x), \tag{4}$$

где $G = ST^{-1}$.

Известно [6, 7], что для разрешимости системы (2) необходимо и достаточно выполнения $l^+$ условий разрешимости

$$\int_a^b \varphi^\alpha(t)g'(t)dt = 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, l^+, \tag{5}$$

где $\varphi^\alpha(t)$ — полная система линейно-независимых решений однородной системы сингулярных интегральных уравнений с внешними коэффициентами, соответствующей (2). При их выполнении решение системы (2) можно представить в виде

$$\psi(x) = A_0(x)g'(x) + \frac{Z(x)}{\pi}\int_a^b \frac{Z^{-1}(t)B_0(t)g'(t)}{t-x}dt + \sum_{\alpha=1}^{l^-} C_\alpha Q_\alpha(x), \tag{6}$$

где $A_0 = \frac{1}{2}(S^{-1}+T^{-1})$, $B_0 = -\frac{1}{2i}(S^{-1}-T^{-1})$, $Z = SX^+ = TX^-$, $X^\pm$ — предельные значения канонической матрицы краевой задачи Римана (4); $C_\alpha$ — произвольные постоянные; $Q_\alpha(t)$ — полная система линейно-независимых решений однородной системы, соответствующей (2). Подставляя решение (6) в (3), преобразуем условие равносильности систем (1) и (2) к виду

$$\int_a^b M(t)g'(t)dt + \sum_{\alpha=1}^{l^-} C_\alpha \tilde{Q}_\alpha = \frac{g(a)+g(b)}{2}, \tag{7}$$

где

$$M(t) = m(t)A_0(t) - \frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{m(\tau)Z(\tau)d\tau}{\tau - t} Z^{-1}(t)B_0(t),$$

$\tilde{Q}_\alpha = \int_a^b m(t)Z(t)\tilde{Q}_\alpha(t)dt$, $\alpha = 1, 2, \ldots, l^-$, $\tilde{Q}_\alpha(t)$ — векторы с полиномиальными компонентами.

Система (7) — система линейных алгебраических уравнений. Отсюда следует

**Теорема 1.** Пусть $\varkappa_1 \geqslant \ldots \geqslant \varkappa_l \geqslant 0 > \varkappa_{l+1} \geqslant \ldots \geqslant \varkappa_n$, $l^+ = \varkappa_1 + \ldots + \varkappa_l$, $l^- = -\varkappa_{l+1} - \ldots - \varkappa_n$. Для разрешимости системы (1) необходимо и достаточно выполнения $l^+$ условий (5) и условия вида

$$\operatorname{rang}\tilde{Q} = \operatorname{rang}\{\tilde{Q}, \tilde{g}\}, \tag{8}$$

где матрица $\tilde{Q}$ имеет своими столбцами векторы $\tilde{Q}_\alpha$, а постоянный вектор $\tilde{g}$ определяется равенством

$$\tilde{g} = \frac{g(a)+g(b)}{2} - \int_a^b M(t)g'(t)dt.$$

При выполнении условий (5) и (8) общее решение системы (1) дается формулой (6) при выборе постоянных $C_\alpha$ из системы (7).

Из теоремы 1 следует, что разрешимость системы (1) зависит, вообще говоря, от разрешимости системы линейных алгебраических уравнений (7). В частном случае одной неизвестной функции ($n=1$) эти условия (7) превращаются в условия «точечно-интегрального» типа (см. [4]).

Пусть теперь матрицы $A$, $B$, $C$ постоянны. Дополнительно предположим, что матрица $G=ST^{-1}$, являющаяся коэффициентом соответствующей системе (2) задачи Римана (4), имеет простую структуру. Тогда условие (7) можно выразить в терминах свободного члена $g(x)$ за счет того, что удается вычислить асимптотические значения матрицы $M(t)$ на концах $a$ и $b$.

Пусть невырожденная матрица $У$ такова, что $У^{-1}GУ$ имеет диагональную форму и $\xi_j$ — собственные значения матрицы $G$. Каноническую матрицу задачи Римана (4) можно представить в виде

$$X(z)=У\{X_1(z), \ldots, X_n(z)\}, \tag{9}$$

где $X_j(z)$ — канонические функции скалярных задач $\Phi_j^+(x)=\zeta_j\Phi_j^-(x)$, где $\Phi=Y^{-1}\psi$, на которые распадается задача (4),

$$X_j(z)=(z-a)^{\nu-\frac{\ln\xi_j}{2\pi i}}(b-z)^{\frac{\ln\xi_j}{2\pi i}-\nu-\varkappa_j},$$

где $\nu=\begin{cases}0, & 0<\operatorname{Arg}\zeta_j<2\pi,\\ 1, & \operatorname{Arg}\zeta_j=2\pi,\end{cases}$

а частные индексы равны

$$\varkappa_j=\begin{cases}1, & 0<\operatorname{Arg}\zeta_j<2\pi,\\ 0, & \operatorname{Arg}\zeta_j=2\pi.\end{cases}$$

Найдем асимптотические представления для матрицы $M(t)$ на концах $a$ и $b$ в классе $H_*^n$ Введем обозначения:

$$\lambda_a=\frac{1}{2\pi i}\ln G, \quad \lambda_b=E-\frac{1}{2\pi i}\ln G$$

и предположим, что $A-B$ и $C$ коммутативны.

Используя соответствующие асимптотические формулы для особых интегралов, полученные в [4], и учитывая, что $\operatorname{ctg}\lambda_a\pi=-\operatorname{ctg}\lambda_b\pi=$ $=B_0^{-1}A_0$, получаем в случае $0<\operatorname{Arg}\zeta_j\leqslant 2\pi$, $j=\overline{1,n}$:

$$M(a)=-\frac{1}{2}CB_0\sin^{-2}\lambda_a\pi, \tag{10}$$

$$M(b)=\frac{1}{2}CB_0\sin^{-2}\lambda_b\pi. \tag{11}$$

Если $\operatorname{Arg}\xi_j=0$, $j=\overline{1,n}$, то, взяв каноническую матрицу в виде (9) с канонической функцией $X_j(z)=(z-a)^{1-\frac{\ln\zeta_j}{2\pi i}}(b-z)^{\frac{\ln\zeta_j}{2\pi i}-1}$ и, используя соответствующие асимптотические формулы из [4], получаем при $t\to a$

$$M(t)=-\frac{(F.\,P.)}{\pi}\int_a^b m(t)(b-t)^{\lambda_a-E}(t-a)^{-\lambda_a}dt\cdot B_0(t-a)^{\lambda_a-E}\times$$
$$\times(b-a)^{E-\lambda_a}-\frac{CB_0}{2}\sin^{-2}\lambda_a\pi. \tag{12}$$

Аналогичная формула имеет место при $t\to b$.

Интегрируя $\int_a^b M(t)g'(t)dt$ по частям и учитывая (10), (11), приводим систему (7) в случае $0<\operatorname{Arg}\xi_j<2\pi$ к виду

$$\int_a^b M'(t)g(t)dt = \sum_{\alpha=1}^{n} C_\alpha \tilde{Q}_\alpha + \frac{1}{2}(CB_0 \sin^{-2}\lambda_b\pi - E)g(b) -$$
$$- \frac{1}{2}(E - CB_0 \sin^{-2}\lambda_a\pi)\, g(a). \qquad (13)$$

Если же $\operatorname{Arg} \xi_j = 0$, то

$$\int_a^b M'(t)\, g(t)\, dt = \left[M(b) - \frac{E}{2}\right] g(b) - \left[M(a) + \frac{E}{2}\right] g(a), \qquad (14)$$

где $M(a)$, $M(b)$ определяются по формулам типа (12). Отсюда вытекает

**Теорема 2.** Пусть $A$, $B$, $C$ — постоянные $(n\times n)$-матрицы такие, что $(A-B+iC)(A-B-iC)^{-1}$ имеет простую структуру с собственными значениями $\xi_j$, а матрицы $A-B$ и $C$ коммутативны. Для разрешимости системы (1) с постоянными коэффициентами необходимо и достаточно:

1) разрешимость системы (13) при $0<\operatorname{Arg} \xi_j<2\pi$;

2) выполнение $n$ условий (5) и условия (13) с $C_\alpha=0$ $(\alpha=\overline{1, n})$ при $\operatorname{Arg} \xi_j=2\pi$;

3) выполнение $n$ условий (5) и условия (14) при $\operatorname{Arg} \xi_j=0$.

При выполнении условий разрешимости общее решение системы определяется формулой (6) при выборе $C_\alpha$ из системы (13) в случае 1). В остальных случаях все $C_\alpha=0$ и полученное решение будет единственным.

Замечание. Если $\det C\neq 0$, то, учитывая соотношения $B_0= =C[(A-B)^2+C^2]^{-1}$, $\sin^{-2}\lambda_a\pi=C^{-2}[(A-B)^2+C^2]$, полученные значения $M(a)$, $M(b)$ можно упростить. В этом случае формулы (10), (11) заменяются, соответственно, на формулы $M(a) = -\frac{1}{2} E$, $M(b) = \frac{1}{2}E$, а условие (13) на условие вида $\int_a^b M'(t)g(t)dt = \sum_{\alpha=1}^{n} C_\alpha \tilde{Q}_\alpha$.

Последнее условие по форме совпадает с условием разрешимости, полученным в [3] для случая уравнения (1) с одной неизвестной функцией при $C(a)\neq 0$. Это показывает, что картина разрешимости систем уравнений вида (1) даже для случая постоянных матриц $A$, $B$, $C$ является более сложной, чем для уравнения (1).

## ЛИТЕРАТУРА


1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи.— М., 1977.
2. Чумаков Ф. В.— Весцi АН БССР. Сер. фiз-мат. навук, 1972, № 6, с. 104.
3. Самко С. Г.— В сб.: Математический анализ и его приложения. Ростовский ун-т, 1978, с. 103.
4. Самко С. Г.— В сб.: Методы отображений. Грозный, 1976, с. 41.
5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.— М., 1966.
6. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения.— М., 1968.
7. Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений.— М., 1970.



Поступила в редакцию
22.03.84.



*УДК 517.944*



*П. П. ЗАБРЕЙКО, С. И. КОСТАДИНОВ*


# О ВРАЩЕНИИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ ЭКВИВАРИАНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Многие важные утверждения нелинейного анализа связаны с вычислением или оценками вращения (степени отображения) $\gamma(\Phi)$ эквивариантных векторных полей $\Phi$ на сфере $S^{n-1}$ конечномерного простран-