УДК 513.73

В. Г. ИВАНОВ

ГЕОМЕТРИЯ ПАРЫ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ В ПСЕВДОРИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Широко используемый в теории гравитации диадный формализм [1] связан с рассмотрением в пространстве — времени ортонормированной пары векторных полей (при этом допускаются случаи с одним и двумя пространственно-подобными векторными полями [2]). Ниже методом Г. Ф. Лаптева [3—5] строится геометрия такой векторной пары в 4-мерном псевдоримановом пространстве сигнатуры Минковского (${}^1V_4$). Полученные результаты были анонсированы в [6, 7]. Используемые в работе индексы: a, $b\,(\neq a)$, $i, j, k, l \in \overline{0,3}$; $\alpha, \beta \in \overline{0,3} \setminus \{a, b\}$.

1. Рассматриваем 4-мерное псевдориманово пространство ${}^1V_4$ сигнатуры Минковского $(-\,+\,+\,+)$ со структурными уравнениями: $D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i$, $D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + R^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l$, где R^i_{jkl} — тензор кривизны ${}^1V_4$. Уравнения смещения подвижного репера $(M, \mathbf{e}_i)$ локального касательного пространства ${}^1R_4(M)$ точки $M \in {}^1V_4$ имеют вид: $d\mathbf{M} = \omega^i \mathbf{e}_i$, $d\mathbf{e}_i = \omega_i^j \mathbf{e}_j$. Считаем также, что в каждой точке M векторы $\mathbf{e}_i$ образуют ортонормированный векторный базис (тетраду).

Запишем [7] дифференциальные уравнения пары векторных полей $\{\mathbf{e}_a, \mathbf{e}_b\}$ пространства ${}^1V_4$ (в дальнейшем обозначаемой через П):

$$\omega_\alpha^a = \gamma^a_{\alpha i}\omega^i, \quad \omega_\alpha^b = \gamma^b_{\alpha i}\omega^i, \quad \omega_b^a = \gamma^a_{bi}\omega^i; \tag{1}$$

$$\begin{gathered}
(d\gamma^a_{\alpha i} - \gamma^a_{\alpha j}\omega_i^j - \gamma^a_{\beta i}\omega_\alpha^\beta + \gamma^b_{\alpha i}\gamma^a_{bj}\omega^j + R^a_{\alpha ij}\omega^j) \wedge \omega^i = 0,\\
(d\gamma^b_{\alpha i} - \gamma^b_{\alpha j}\omega_i^j - \gamma^b_{\beta i}\omega_\alpha^\beta + \gamma^a_{\alpha i}\gamma^b_{aj}\omega^j + R^b_{\alpha ij}\omega^j) \wedge \omega^i = 0,\\
(d\gamma^a_{bi} - \gamma^a_{bj}\omega_i^j - \gamma^a_{\alpha i}\gamma^\alpha_{bj}\omega^j + R^a_{bij}\omega^j) \wedge \omega^i = 0.
\end{gathered} \tag{2}$$

Система величин $(\gamma^a_{\alpha i}, \gamma^b_{\alpha i}, \gamma^a_{bi})$ образует основной фундаментальный объект первого порядка П, являющийся тензором (терминология из [3]). Подтензорами будут величины: $\gamma^a_{\alpha\beta}$, $\gamma^a_{\alpha a}$, $\gamma^a_{\alpha b}$, $\gamma^b_{\alpha\beta}$, $\gamma^b_{\alpha b}$, $\gamma^b_{\alpha a}$, $\gamma^a_{b\alpha}$, γ^a_{ba}, γ^a_{bb}. Таким образом, получаем согласие с [1, 2].

Уравнения [4]:

$$\omega^i = \lambda^i\Theta \quad (D\Theta = \Theta \wedge \Theta_1), \tag{3}$$

рассмотренные совместно с (1) и (2), определяют линии, присоединенные к П. Система величин (λ^i) образует относительный тензор [5] этих линий, из которого выделяются подтензоры λ^a, λ^b и λ^α. Условия: $\lambda^a = \lambda^b = 0$, $\lambda^\alpha \neq 0$; $\lambda^a \neq 0$, $\lambda^b = \lambda^\alpha = 0$; $\lambda^b \neq 0$, $\lambda^a = \lambda^\alpha = 0$, определяют ортогональные траектории (ОТ), $\mathbf{e}_a$— и $\mathbf{e}_b$ — линии тока (ЛТ) П. Напомним [8], что касательным вектором линии (3) называется вектор касательной ее развертки на локальное касательное пространство, т. е. вектор $d\mathbf{M}/\Theta = \lambda^i\mathbf{e}_i$.

2. Через S обозначим соприкасающуюся 2-плоскость ОТ П (в точке M). Пусть также N_a и N_b — гиперплоскости пространства ${}^1R_4\,(M)$, ортогональные соответственно векторам $\mathbf{e}_a$ и $\mathbf{e}_b$.

ОТ П будем называть $\mathbf{e}_a$ — ($\mathbf{e}_b$—) асимптотической, если пересечение $S \cap N_b$ $(S \cap N_a)$ ортогонально вектору $\mathbf{e}_q$ (вектору $\mathbf{e}_b$), откуда следует: $\gamma^a_{(\alpha\beta)}\lambda^\alpha\lambda^\beta = 0$ $(\gamma^b_{(\alpha\beta)}\lambda^\alpha\lambda^\beta = 0)$. Тензор $\gamma^a_{(\alpha\beta)}$ $(\gamma^b_{(\alpha\beta)})$ можно назвать $\mathbf{e}_a$—($\mathbf{e}_b$—) асимптотическим тензором ОТ П.

Пересечения $S \cap N_b$ и $S \cap N_a$ коллинеарны соответственно векторам $\mathbf{e}_a$ и $\mathbf{e}_b$ при одном и том же условии: $((d\lambda^\alpha + \lambda^\beta\omega_\beta^\alpha)/\lambda^\alpha) =$. Такие ОТ П договоримся называть геодезическими.

Под $\mathbf{e}_a$—($\mathbf{e}_b$—) линиями кривизны первого рода будем понимать ОТ П, которые направлены вдоль главных направлений $\mathbf{e}_a$—($\mathbf{e}_b$—) асимптотического тензора, так что:

$$(\gamma^a_{(\alpha\beta)}\lambda^\beta/g_{\alpha\beta}\lambda^\beta) = \qquad ((\gamma^b_{\alpha\beta}\lambda^\beta/g_{\alpha\beta}\lambda^\beta) =). \tag{4}$$

Здесь и далее, $g_{\alpha\beta}$ — метрический тензор локального 2-мерного сечения пространства ${}^1V_4$, ортогонального П.

$\mathbf{e}_a$—($\mathbf{e}_b$—) Линией кривизны второго рода назовем ОТ П, вдоль которой ортогональная проекция на N_b (на N_a) дифференциала точки прямой, коллинеарной вектору $\mathbf{e}_a$ (вектору $\mathbf{e}_b$), сама коллинеарна этому вектору. Имеем условия:

$$(\gamma^a_{\alpha\beta}\lambda^\beta/g_{\alpha\beta}\lambda^\beta) = \qquad ((\gamma^b_{\alpha\beta}\lambda^\beta/g_{\alpha\beta}\lambda^\beta) =). \tag{5}$$

Несложно убедиться в том, что данные в этом пункте определения вполне естественно обобщают аналогичные понятия для линий на гиперповерхности и интегральных кривых неголономной гиперповерхности риманова пространства [8, 9], ОТ монады [10].

3. Будем называть П нормальной, если она допускает семейство ортогональных 2-мерных поверхностей, и геодезической, если равны нулю векторы первой кривизны ее ЛТ [6, 7]. Их признаки:

$$\gamma^a_{[\alpha\beta]} = \gamma^b_{[\alpha\beta]} = 0; \tag{6}$$

$$\gamma^a_{\alpha a} = \gamma^b_{\alpha b} = \gamma^a_{bq} = \gamma^a_{bb} = 0. \tag{7}$$

Полезно отметить, что нормальность П сводится к нормальности обеих ее составляющих (векторное поле называется нормальным, если оно допускает семейство ортогональных гиперповерхностей [9]) при дополнительных условиях:

$$\gamma^a_{\alpha b} = \gamma^a_{b\alpha}, \quad \gamma^b_{\alpha a} = \gamma^b_{a\alpha}. \tag{8}$$

Из равенств (4)—(6) также следует, что у нормальной П $\mathbf{e}_a$—($\mathbf{e}_b$—) линии кривизны первого и второго рода совпадают.

Дивергенцию и ротор векторного поля $\{\mathbf{v}\}$ естественно определить в виде: $\mathrm{DiV}\,\mathbf{v} = \nabla\,\mathbf{v}$, $\mathrm{Rot}\,\mathbf{v} = \nabla \wedge \mathbf{v}$, где ∇ — обобщенный дифференциальный оператор относительно подвижного репера $(M, \mathbf{e}_i)$, равный [11]:

$$\nabla = (\omega^0 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3)^{-1}(\mathbf{e}_0(\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3) + \mathbf{e}_1(\omega^0 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3) + \\ + \mathbf{e}_2(\omega^0 \wedge \omega^3 \wedge \omega^1) + \mathbf{e}_3(\omega^0 \wedge \omega^1 \wedge \omega^2)) \wedge d.$$

Будем называть П соленоидальной, если равны нулю дивергенции ее составляющих, и потенциальной (или безвихревой), если равны нулю их роторы [6, 7]. Признаки:

$$\gamma^\alpha_{\alpha a} + \gamma^b_{ab} = \gamma^\alpha_{b\alpha} + \gamma^a_{ba} = 0;$$

$$\gamma^a_{[\alpha\beta]} = \gamma^b_{[\alpha\beta]} = \gamma^a_{\alpha a} = \gamma^b_{\alpha b} = \gamma^a_{ba} = \gamma^a_{bb} = 0, \quad \gamma^a_{\alpha b} = \gamma^a_{b a}, \quad \gamma^b_{\alpha a} = \gamma^b_{a\alpha}. \tag{9}$$

Из условий (6)—(9) следует, что в случае (8) потенциальность диады равносильна ее нормальности и геодезичности.

4. Следуя методам [10, 12], можно предложить для П несколько вариантов полных систем инвариантов первой дифференциальной окрестности. Две такие системы инвариантов обсуждались в [6, 7]. Развернутое изложение этого вопроса предполагается дать особо.

ЛИТЕРАТУРА

1. Владимиров Ю. С. Системы отсчета в теории гравитации.— М., 1982.
2. Владимиров Ю. С. Диадный метод в общей теории относительности.— Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 7228-73. Деп. от 01.11.73.
3. Лаптев Г. Ф.— Труды Москов. матем. об-ва, 1953, т. 2, с. 275.

4. Лаптев Г. Ф.— Труды геом. семин., 1971, т. 3, с. 29.
5. Лаптев Г. Ф., Остиану Н. М.— Труды геом. семин., 1971, т. 3, с. 49.
6. Бурдун А. А., Иванов В. Г.— Тез. докл. 6-й Всесоюзн. гравит. конф. М., 1984, с. 105.
7. Иванов В. Г.— Тез. докл. 6-й Прибалт. геом. конф. Таллин, 1984, с. 46.
8. Близникас В. И.— Литов. матем. сб., 1971, т. 11, № 1, с. 63.
9. Схоутен И. А., Стройк Д. Дж. Введение в новые методы дифференциальной геометрии.— М., 1948, т. 2 (Пер. с нем.).
10. Бурдун А. А. Геометрия поля 4-скоростей в псевдоримановом пространстве.— Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 1394-76. Деп. от 26.04.76.
11. Бурдун А. А.— Весці АН БССР. Сер. Фіз-матэм. навук, 1966, № 4, с. 10.
12. Бурдун А. А., Иванов В. Г. Инвариантная классификация неизотропных векторных полей в псевдоримановом пространстве.— Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 807-84. Деп. от 09.02.84.

Поступила в редакцию
22.03.84.

УДК 517.948.32

И. Н. ЗАБЕЛЛО, А. А. КИЛБАС

О РАЗРЕШИМОСТИ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ЯДРОМ И ВНУТРЕННИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В настоящей работе исследуется разрешимость системы интегральных уравнений первого рода с логарифмическим ядром вида

$$\int_a^x A(t)\psi(t)dt + \int_x^b B(t)\psi(t)dt + \frac{1}{\pi}\int_a^b C(t)\ln|x-t|\,\psi(t)dt = g(x), \qquad (1)$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — $(n\times n)$-матрицы.

Уравнение (1) в случае одной неизвестной функции ($n=1$) изучалось в [1—3]. Различные частные случаи этого уравнения, имеющие обширные приложения, рассматривались многими авторами (библиографию см., например, в [3, 4]). Работа состоит из двух частей. Сначала, следуя [4], мы находим необходимые и достаточные условия разрешимости системы (1) и даем ее общее решение. Затем выводим другую форму условий разрешимости для случая, когда A, B, C — постоянные матрицы, а коэффициент соответствующей задачи Римана есть матрица простой структуры [5]. Следует отметить, что картина разрешимости системы (1) оказывается гораздо сложнее, чем картина разрешимости уравнения (1) ($n=1$).

Введем некоторые обозначения. Будем говорить, что вектор-функция $\psi=(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ принадлежит $H_*^n \equiv H_*^n(a, b)$, если

$$\psi_j(x) = \frac{\psi_j^*(x)}{(x-a)^{1-\varepsilon_1}(b-x)^{1-\varepsilon_2}},$$

где $\psi_j^*(x) \in H_\mu^n(a, b)$, $0<\mu<1$, ε_1, $\varepsilon_2>0$. Через $C_*^{1,n} \equiv C_*^{1,n}[a, b]$ обозначим класс дифференцируемых на $[a, b]$ вектор-функций $g(x)$ таких, что $g'(x) \in H_*^n$.

Пусть $S(t)=A(t)-B(t)-iC(t)$, $T(t)=A(t)-B(t)+iC(t)$. Будем искать решение системы (1) в классе H_*^n предполагая, что свободный член $g(x) \in C_*^{1,n}$, а матрицы $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ с элементами из гельдеровых пространств таковы, что имеет место нормальный случай: $\det S(t) \neq 0$, $\det T(t) \neq 0$ для любых $t \in [a, b]$.

Система (1) эквивалентна системе особых интегральных уравнений

$$[A(x)-B(x)]\,\psi(x) - \frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{C(t)\psi(t)dt}{t-x} = g'(x) \qquad (2)$$