

$$\sup_{C \in G} (1 + d^s(0, \partial C)) |P(S_n \in C) - \sum_{r=0}^{s-2} n^{-\frac{r}{2}} P_r(\Theta_1 - \Phi)(C)| = o\left(n^{-\frac{s-2}{2}}\right), \quad (n \rightarrow \infty),$$

где $d(0, \partial C)$ — расстояние от начала координат до границы множества C .

ЛИТЕРАТУРА

1. Л а з а к о в и ч Н.— Лит. матем. сб., 1981, т. 21, № 2, с. 111.
2. Б х а т т а ч а р и я Р. Н., Р а н г а Р а о Р. Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения.— М., 1982.
3. Д у б и н с к а я И. Е.— Лит. матем. сб., 1981, т. 21, № 4, с. 97.

Поступила в редакцию
09.02.84.

УДК 519.27 : 621.391.1

Ю. С. ХАРИН, И. К. ПИРШТУК

ИНВАРИАНТНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ СПЕКТРОГРАММ

Постановка задачи. Пусть в пространстве R_+^N с вероятностями π_1, \dots, π_L ($\pi_i > 0, \pi_1 + \dots + \pi_L = 1$) наблюдаются случайные спектрограммы [1] из $L \geq 2$ классов $\Omega_1, \dots, \Omega_L$. Спектрограмма из класса Ω_i ($i = \overline{1, L}$) описывается случайным N -вектором $X_i = (X_{ik}) \in R_+^N$ с неизвестным распределением вероятностей; причем циклический сдвиг и масштабные преобразования компонент спектрограммы сохраняют ее классификацию неизменной. Имеется классифицирующая случайная выборка спектрограмм, состоящая из L независимых подвыборок: $A = \bigcup_{i=1}^L A_i$, $A_i = \{z_{ij}; z_{ij} = (z_{ijk}) \in R_+^N, j = \overline{1, n_i}\}$ — случайная подвыборка n_i спектрограмм из Ω_i . Задача заключается в построении решающего правила, минимизирующего вероятность ошибочной классификации случайной спектрограммы $X \in R_+^N$, наблюдаемой независимо от A .

Подобная задача возникает при разработке математического обеспечения автоматизированных систем распознавания случайных процессов (случайных сигналов [2, 3], электроэнцефалограмм [4], речевых сигналов [5]), наблюдаемых в виде спектрограмм, в ситуации, когда сдвиг по частоте спектральной плотности случайного процесса и изменение дисперсии не меняют его классификацию.

Пространство инвариантных признаков. Определим в R_+^N группу $G_1 = \{g_1(\cdot; a_1) : a_1 > 0\}$ масштабных преобразований:

$$x' = g_1(x; a_1) = a_1 x, \quad (x, x' \in R_+^N) \quad (1)$$

и группу $G_2 = \{g_2(\cdot; v) : v \in \{0, 1, \dots, N-1\}\}$ преобразований циклического сдвига:

$$x'' = g_2(x; v) = (x_k''), \quad x_k'' = x_{(k+v) \bmod N} \quad (k = \overline{1, N}), \quad (2)$$

где $(t) \bmod N \in \{1, 2, \dots, N\}$ — вычет числа t по модулю N . Умножение преобразований в G_1, G_2 понимается как последовательное применение этих преобразований.

Определим в R_+^N группу преобразований G , элементами $g(\cdot)$ которой являются всевозможные композиции преобразований из G_1 и G_2 . Тогда в силу принятой математической модели $\Omega_1, \dots, \Omega_L$ задача классифи-

кации спектрограммы X инвариантна относительно G [6]. Это означает, что X является спектрограммой из некоторого класса Ω_i тогда и только тогда, когда при любом преобразовании $g(\cdot) \in G$, $g(X)$ является спектрограммой из того же класса Ω_i :

$$X \sim \Omega_i \Leftrightarrow g(X) \sim \Omega_i \quad \forall g(\cdot) \in G. \quad (3)$$

В силу (3) потребуем, чтобы и решающее правило обладало свойством инвариантности относительно G : $d(g(x)) = d(x)$, $x \in R_+^N$, $g(\cdot) \in G$, где $d \in D = \{1, 2, \dots, L\}$ — номер класса, к которому будет отнесена наблюдаемая спектрограмма x . Известен [6] общий вид инвариантного решающего правила:

$$d = d(x) = d_0(z), \quad z = T(x), \quad x \in R_+^N. \quad (4)$$

Здесь $z = (z_k) \in R^n$ — вектор так называемых инвариантных признаков [7]: $T(x) = (T_k(x))$ — особая статистика — максимальный инвариант [7] группы G ; n — число инвариантных признаков.

Обозначим:

$$y_k = x_k / (x_1 + \dots + x_N), \quad k = \overline{1, N}; \quad (5)$$

$$u_k = u_k(x) = y_{(k)}, \quad k = \overline{1, N}, \quad u_1 > u_2 > \dots > u_N, \quad (6)$$

$y_{(k)} = y_{r_k}$ — k -ая порядковая статистика; r_k — ранг $y_{(k)}$;

$$v_j = v_j(x) = (r_j - r_{j+1} + N) \bmod N, \quad j = \overline{1, N-2}. \quad (7)$$

Теорема. Если вероятностные распределения X_1, \dots, X_L абсолютно непрерывны, то $n = 2N - 3$ и инвариантные признаки определяются соотношениями:

$$z_k = T_k(x) = \begin{cases} u_k; & \text{если } k = \overline{1, N-1}, \\ v_{k+1-N}; & \text{если } k = \overline{N, n}. \end{cases} \quad (8)$$

Доказательство основано на методе [6] последовательного определения максимального инварианта для подгрупп G_1, G_2 группы G .

Отметим, что если X_1, \dots, X_L имеют дискретные распределения, то (8) сохраняется; лишь только статистики $\{v_j\}$ вычисляются по более сложной формуле, чем (7).

С целью упрощения решающего правила (4), (8) предусмотрим возможность использования лишь (части) $N_0 \leq n$ инвариантных признаков:

$$z = (z_k) = (u, v), \quad u = (u_i), \quad i = \overline{1, N_1} \leq N - 1, \quad v = (v_j), \\ j = \overline{1, N_2} \leq N - 2. \quad (9)$$

Адаптивное решающее правило. Преобразования (4), (9) над X_i ($i = \overline{1, L}$) порождают случайный N_0 -вектор $Z_i = T(X_i) = (U_i \parallel V_i)$, состоящий из двух подвекторов: $U_i = (U_{ij}), j = \overline{1, N_1}$ — случайный вектор с N_1 -мерной плотностью $q_i(u)$, $u = (u_j) \in R^{N_1}$; $V_i = (V_{ij}), j = \overline{1, N_2}$ — дискретный случайный вектор с N_2 -мерным распределением вероятностей $Q_i(v) = P(V_i = v)$, $v = (v_j) \in R^{N_2}$.

Будем предполагать, что U_i и V_i независимы ($i = \overline{1, L}$). Тогда правило (4), минимизирующее вероятность ошибки, имеет вид:

$$d = d(x) = d_0(u, v) = \arg \max_{i \in D} (\ln \pi_i + \ln q_i(u) + \ln Q_i(v)). \quad (10)$$

Построим статистические оценки $\{q_i(\cdot), Q_i(\cdot)\}$ по выборке A . Оценку $\hat{Q}_i(\cdot)$ ($i = \overline{1, L}$) будем искать в параметрическом семействе распределений:

$$Q_i(v) = \prod_{j=1}^{N_2} Q_{ij}(v_j), \quad Q_{ij}(v_j) = \sum_{k=1}^{N-1} Q_{ijk} \cdot \delta_{v_j, k}, \quad \sum_{k=1}^{N-1} Q_{ijk} \equiv 1, \quad (11)$$

где δ_{ik} — символ Кронекера. Согласно (11), $Q_i(\cdot)$ характеризуется $N_2 \cdot (N-1)$ параметрами $\{Q_{ijk} \geq 0\}$, представляющими собой вероятности значений, принимаемых компонентами V_i . Оценками максимального правдоподобия этих параметров являются частоты:

$$\widehat{Q}_{ijk} = \sum_{l=1}^{n_i} \delta_{k, v_{ilj}} / n_i, \quad (12)$$

где $v_{ilj} = v_j(z_{il})$, $v_{il} = (v_{ilj})$ — N_2 -вектор инвариантных признаков (7) для спектрограммы $z_{il} \in A_i$. Оценка $\widehat{Q}_i(\cdot)$ получается подстановкой $\{\widehat{Q}_{ijk}\}$ в (11).

По формуле умножения плотностей

$$q_i(u) = \prod_{j=1}^{N_1} q_{ij}(u_j | u_1, \dots, u_{j-1}), \quad (13)$$

где при $j \geq 2$ $q_{ij}(u_j | u_1, \dots, u_{j-1})$ — условная плотность для U_{ij} при $U_{i1} = u_1, \dots, U_{i,j-1} = u_{j-1}$, а $q_{i1}(u_1 | u_0) = q_{i1}(u_1)$ — безусловная плотность для U_{i1} . Обозначим:

$$u_i^- = 1/N, \quad u_i^+ = 1,$$

$$u_j^- = \left(1 - \sum_{k=1}^{j-1} u_k\right) / (N - j + 1), \quad u_j^+ = \min\{u_{j-1}, 1 - \sum_{k=1}^{j-1} u_k\}, \quad j \geq 2. \quad (14)$$

Согласно (5)–(6), компоненты вектора U_i зависимы: $0 \leq U_{ij} \leq U_{i,j-1}$, $\sum_{k=1}^{N_1} U_{ik} \leq 1$, поэтому при фиксированных значениях $U_{i1} = u_1, \dots, U_{i,j-1} = u_{j-1}$ компонента $U_{ij} \in [u_j^-, u_j^+]$. В связи с этим оценку $q_{ij}(\cdot)$ будем искать в семействе бета-распределений, сосредоточенных на $[u_j^-, u_j^+]$:

$$U_{ij} = (u_j^+ - u_j^-) \cdot W_{ij} + u_j^-, \quad (15)$$

где W_{ij} имеет стандартное бета-распределение с плотностью

$$f_{ij}(t) = \Gamma(\alpha_{ij} + \beta_{ij}) \cdot (\Gamma(\alpha_{ij}) + \Gamma(\beta_{ij}))^{-1} \cdot t^{\alpha_{ij}-1} \cdot (1-t)^{\beta_{ij}-1}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (16)$$

где $\alpha_{ij}, \beta_{ij} \geq 0$ — параметры. Тогда из (15) имеем:

$$q_{ij}(u_j | u_1, \dots, u_{j-1}) = (u_j^+ - u_j^-)^{-1} \cdot f_{ij}((u_j - u_j^-) / (u_j^+ - u_j^-)). \quad (17)$$

Выбор модели (15)–(17) обоснован еще и успешным использованием бета-распределений для аппроксимации распределения порядковых статистик [8].

Обозначим $u_{ilj} = u_j(z_{il})$, $u_{il} = (u_{ilj})$ — N_1 -вектор инвариантных признаков (5), (6) для спектрограммы $z_{il} \in A$ ($l=1, n_i, i=1, L$). Определим выборочные среднее $\widehat{\mu}_{ij}$ и дисперсию \widehat{D}_{ij} для случайной величины W_{ij} , которая, согласно (15), имеет представление $W_{ij} = (U_{ij} - u_j^-) / (u_j^+ - u_j^-)$:

$$\widehat{\mu}_{ij} = n_i^{-1} \cdot \sum_{l=1}^{n_i} (u_{ilj} - u_{ilj}^-) / (u_{ilj}^+ - u_{ilj}^-), \quad (18)$$

$$\widehat{D}_{ij} = n_i^{-1} \cdot \sum_{l=1}^{n_i} ((u_{ilj} - u_{ilj}^-) / (u_{ilj}^+ - u_{ilj}^-))^2 - \widehat{\mu}_{ij}^2.$$

Тогда справедливы оценки для $\{\alpha_{ij}, \beta_{ij}\}$ по методу моментов:

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha}_{ij} &= \widehat{\mu}_{ij} \cdot (\widehat{\mu}_{ij} \cdot (1 - \widehat{\mu}_{ij}) / \widehat{D}_{ij} - 1) \geq 0, \\ \widehat{\beta}_{ij} &= (1 - \widehat{\mu}_{ij}) \cdot \widehat{\alpha}_{ij} / \widehat{\mu}_{ij}. \end{aligned} \quad (19)$$

Отметим, что вместо $\{\hat{\alpha}_{ij}, \hat{\beta}_{ij}\}$ могут быть использованы более точные оценки максимального правдоподобия.

Подстановка $\{\hat{\alpha}_{ij}, \hat{\beta}_{ij}\}$ в (16), (17) и далее в (13) приводит к оценкам $\{\hat{q}_i(\cdot)\}$. Используя теперь $\{\hat{Q}_i(\cdot), \hat{q}_i(\cdot)\}$ в (10), получаем адаптивное решающее правило:

$$d = d_1(x, A) = \arg \max_{i \in D} (\ln \pi_i + \ln \hat{q}_i(u) + \ln \hat{Q}_i(v)). \quad (20)$$

Это правило оказывается состоятельным и может быть исследовано методом асимптотических разложений [9].

Таблица эффективности адаптивного решающего правила

$N_2 \backslash N_1$	3	4	5	6	7	8	9
1	0,110	0,073	0,063	0,050	0,053	0,070	0,063
2	0,133	0,087	0,060	0,053	0,057	0,073	0,073
3	0,110	0,070	0,043	0,043	0,050	0,060	0,070
4	0,093	0,063	0,053	0,050	0,057	0,063	0,070
5	0,103	0,073	0,067	0,070	0,070	0,087	0,083

Численный пример. Исследование эффективности решающего правила (20) проводилось на ЭВМ в случае шести равновероятных классов ($L=6, \pi_i=1/6$) узкополосных псевдослучайных сигналов, описанных в [2]; размерность пространства наблюдения $N=60$. По обучающим выборкам объема $n_i=50$ построено решающее правило (20). По независимой от A экзаменационной выборке объемом 300 (по 50 реализаций из каждого класса) оценивалась вероятность p ошибочного решения. В таблице представлены точечные оценки $p=p(N_1, N_2)$ в зависимости от числа инвариантных признаков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов.— М., 1980.
2. Омельченко В. А., Матевичкий Е. О.— Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника, 1979, т. 22, № 12, с. 16.
3. Сенни А. Г. Распознавание случайных сигналов.— Новосибирск, 1974.
4. Кокс Д. Р.— В сб.: Распознавание образов при помощи цифровых вычислительных машин. М., 1977.
5. Файн В. С. Опознавание изображений.— М., 1970.
6. Леман Э. Проверка статистических гипотез.— М., 1979.
7. Харин Ю. С.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1977, № 5, с. 158.
8. Дэйвид Г. Порядковые статистики.— М., 1979.
9. Харин Ю. С.— В кн.: Теория вероятностей и ее применение, 1983, т. 28, вып. 3, с. 592.

Поступила в редакцию
24.02.84.

УДК 33.083.722

М. К. БУЗА

АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ КОДИРОВАНИЯ ДАННЫХ С ПОМОЩЬЮ ВЫЧЕТОВ

Эффективность обработки информации на ЭВМ, базирующейся на модулярной арифметике, и сложность основных ее аппаратурных компонент во многом определяет выбор модулей системы в коде вычетов. Из общих соображений можно предположить, что оптимальной в плане