6. Коротаев Н. А., Люлькин А. Е. Автоматизация тестового диагностирования дискретных устройств.—Минск, 1983.
7. Закревский А. Д. Логический синтез каскадных схем.— М., 1981.
8. Закревский А. Д. Алгоритмы синтеза дискретных автоматов.— М., 1971.
9. Eichelberger E. B., Lindbloom E. L.— IBM J. Res. Developm., 1980, v. 24, № 1, p. 15.

Поступила в редакцию
28.12.83.

УДК 517.9

Б. С. КАЛИТИН

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕИЗОЛИРОВАННОЙ ТОЧКИ ПОКОЯ

Пусть X — метрическое пространство, на котором заданы две динамические системы $\pi(x, t)$ и $\sigma(x, t)$ [1, 2]. Рассмотрим ситуацию, когда первая из этих систем получена из второй методом «замораживания» [1], а именно: пусть M — множество точек покоя системы π и $a \in M$. Предположим, что для некоторой окрестности U точки a и числа $T > 0$ имеют место следующие условия:

1) множество $\Pi = \sigma(M \cap U, [-T, T])$ является окрестностью точки a;
2) $\forall x \in \Pi \cap M \quad \sigma(x, [-T, T]) \cap M = x$;
3) отрезки траекторий $\sigma(x, [-T, 0[)$, $\sigma(x.]0, T])$ совпадают соответственно с полутраекториями

$$\pi(\sigma(x, T), R^{\pm}), \pi(\sigma(x, -T), R^{\pm})$$

системы π для всех $x \in \Pi \cap M$, причем знак «$+$», или «$-$» берется постоянным в каждой из областей

$$\Pi^+ = \sigma(M \cap U,]0, T]) \text{ и } \Pi^- = \sigma(M \cap U, [-T, 0[).$$

Последнее в силу свойств точек покоя означает, в частности, что $\lim\limits_{t \to +\infty} \pi(\sigma(x, -T), t) \in M$, либо $\lim\limits_{t \to -\infty} \pi(\sigma(x, -T), t) \in M$ сразу для всех начальных состояний $\sigma(x, -T) \in \Pi^-$.

Аналогичное свойство справедливо и для состояний $\sigma(x, T) \in \Pi^+$.

Поэтому естественным является следующее определение. Будем говорить, что направление движений динамических систем π и σ совпадает в Π^+ (Π^-), если $\sigma(x,]0, T]) = \pi(\sigma(x, T), R^+)$ (соответственно $\sigma(x, [-T, 0[) = \pi(\sigma(x, -T), R^+)$), и противоположно, если вместо R^+ берется R^-.

Теперь при выполнении условий 1)—3) нетрудно доказать следующее утверждение.

Лемма 1. 1^0) Если направление движений динамических систем π и σ совпадает в Π^- и противоположно в Π^+, то точка покоя a динамической системы π устойчива по Ляпунову.

2^0) Если направление движений противоположно в Π^- или совпадает в Π^+, то точка покоя a системы π неустойчива.

Рассмотрим пример использования леммы 1 при исследовании задачи устойчивости неизолированной точки покоя. Пусть X — открытое подмножество R^n, $f: X \to R^n$ — непрерывная, а $\varphi: X \to R$ — непрерывно дифференцируемая функция. Предположим, что дифференциальные системы

$$\dot{x} = [\varphi(x)]^{\frac{p}{2q+1}} f(x), \quad x \in X, \tag{1}$$

и

$$\dot{y} = f(y), \quad y \in X, \tag{2}$$

где p и q — натуральные числа (возможно, $q = 0$) обладают свойством существования и единственности решений. Кроме того, пусть $a \in X$ точка, где $\varphi(a)=0$, и существует окрестность U точки $a \in X$, для которой поверхность

$$\varphi(x)=0 \tag{3}$$

делит U на два непустых связных множества

$$\{x \in U \mid \varphi(x)>0\} \text{ и } \{x \in U \mid \varphi(x)<0\}.$$

Отметим, что поверхность (3) задает множество точек покоя системы (1) и a — неизолированная точка этого множества. Задача об устойчивости точки a в близкой постановке решалась в [3] для случая аналитических функций f и φ.

Теорема 1. Точка покоя a системы (1) устойчива по Ляпунову, если p — нечетное число и скалярное произведение

$$f'(a) \frac{\partial \varphi(a)}{\partial x}<0, \tag{4}$$

и неустойчива в каждом из следующих случаев:

(i) $p>0$, p — четное число и $f(a) \neq 0$;

(ii) p — нечетное число и

$$f'(a) \frac{\partial \varphi(a)}{\partial x}>0. \tag{5}$$

Случай равенства нулю скалярного произведения в левой части (4) будем именовать в дальнейшем критическим. Начнем исследование критического случая «первого приближения» при $a=0$, а именно: пусть (1) имеет вид

$$\dot{x}=(c'x)^{\frac{p}{2q+1}}[b+Ax], \ x \in R^n, \ c \neq 0, \tag{6}$$

где b, c — постоянные n-мерные векторы, а A — $(n \times n)$ — постоянная матрица.

Отметим, что (6) является частным случаем системы, изученной в работе [3], где приведен алгоритм исследования устойчивости нулевого решения. Поскольку проверка условий устойчивости в [3] использует, например, такую операцию, как последовательный просчет коэффициентов в разложении определенного ряда Тейлора, причем необходимое количество коэффициентов заранее не ограничено, то такой критерий обычно называют неявным. Ниже мы приводим явный критерий устойчивости для системы (6), опирающийся на исходные параметры системы.

Теорема 2. Для того чтобы нулевое решение системы (6) при $b \neq 0$ было устойчивым по Ляпунову, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

а) p — нечетное число;

б) существует четное число $k \in \{0, 1, 2, \ldots, (n-1)\}$ такое, что $c'A^j b=0$ для всех $j=0, 1, \ldots, (k-1)$ и $c'A^k b<0$.

Для исследования случая $b=0$ предварительно сформулируем следующий результат:

Предложение. Пусть c — ненулевой вектор R^n и все различные собственные значения матрицы A разделены на две группы $\nu_1, \ldots, \nu_s$ и $\mu_1, \ldots, \mu_r$ так, что выполняются условия:

1) все серии векторов с собственными значениями $\nu_1, \ldots, \nu_s$ относительно матрицы A (см. [4, с. 96]) ортогональны вектору c;

2) $\forall j=1, 2, \ldots, r$ хотя бы один вектор из серии векторов с собственными значениями μ_j относительно матрицы A не ортогонален вектору c.

Тогда для того, чтобы всякое решение линейной системы

$$\dot{y}=Ay, \ y \in R^n, \tag{7}$$

за конечное время попадало на гиперплоскость

$$c'x=0, \tag{8}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{Im}\mu_j \neq 0 \quad \forall j=1, 2, \ldots, r. \tag{9}$$

Следствие. При выполнении всех требований предложения всякое решение системы (7) попадает за конечное время на гиперплоскость (8) как при $t>0$, так и при $t<0$.

Лемма 2. Если каждое решение системы (7) пересекает в конечное время при $t>0$ ($t<0$) гиперплоскость (8), то $\exists T>0$ такое, что всякое решение (7) пересечет поверхность (8) на интервале $[0, T]$ (соответственно на интервале $[-T, 0]$).

Разобьем все различные собственные значения матрицы A на две группы $\nu_1, \ldots, \nu_s$ и $\mu_1, \ldots, \mu_r$ так, чтобы выполнялись условия 1) и 2) предложения. Очевидно, это всегда можно сделать, причем может случиться, что первая группа чисел не содержит ни одного элемента ($s=0$). Обозначим через L_ν и L_μ подпространства решений уравнения (2), отвечающие соответственно группам собственных чисел ν_j и μ_j [4]. Известно, что при этом пространство L всех решений уравнения (2) разлагается в прямую сумму подпространств L_ν и L_μ.

Далее, выделим в L_μ подпространство L_μ' устойчивых по Ляпунову решений уравнения (2) (возможно L_μ' содержит лишь нулевое решение) и положим $L_\mu'' = L_\mu \setminus L_\mu'$ (может случиться, что $L_\mu'' = \varnothing$).

Таким образом, пространство L разбивается на прямую сумму инвариантных подпространств L_ν, L_μ' и L_μ''. Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_l$ ($1 \leqslant l \leqslant r$) подмножество чисел из группы $\mu_1, \ldots, \mu_r$, соответствующих подпространству L_μ'.

Теорема 3. Нулевое решение уравнения (6) при $b=0$ устойчиво по Ляпунову в том и только том случае, когда выполняется одно из условий:

а) p — четное число и $\operatorname{Im}\mu_j \neq 0$ $\forall j=l+1, \ldots, r$;

б) p — нечетное число и $\operatorname{Im}\mu_j \neq 0$ $\forall j=1, \ldots, r$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Немыцкий В. В.— УМН, 1949, т. IV, вып. 6, с. 91.
2. Сибирский К. С. Введение в топологическую динамику.— Кишинев, 1970.
3. Абаньшин А. М.— Вестн. ЛГУ, 1968, № 7, с. 5.
4. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М., 1970.

Поступила в редакцию
03.01.84.

УДК 519.21

Н. В. ЛАЗАКОВИЧ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ 0-РЕШЕТЧАТЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ

В настоящей работе исследуются достаточные условия и остаточный член в интегральной предельной теореме для сумм независимых 0-решетчатых случайных векторов (с. в.) $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ со значениями из R^k. Полученные результаты обобщают теорему 1 из [1] и теоремы 20.1, 20.6, следствия 20.2—20.5 из [2].

Введем следующие обозначения: $V_j(\mathbf{x})$, $p_j(\mathbf{x})$, V_j — соответственно функция распределения (ф. р.), плотность и ковариационная матрица с. в. ξ_j, $j=\overline{1, n}$; $\sigma_{jl}^2 = M\xi_{jl}^2$, $j=\overline{1, n}$, $l=\overline{1, k}$; $\overline{V}_n = \frac{1}{n}(V_1+\ldots+V_n)$; $\overline{F}_j(\mathbf{x})$, $j=\overline{1, n}$ — ф. р. с. в. $B_n\xi_j$, где $B_n^2 = \overline{V}_n^{-1}$; $\Theta =$ с. в. из R^k с ф. р. $F(\mathbf{x}) =$