ЛИТЕРАТУРА

1. Бикялис А.— Теория вероятностей и ее применение, 1969, т. 14, № 3, с. 499.
2. Бхаттачария Р. Н., Ранга Рао Р. Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения.— М., 1982.
3. Дубинскайте Й.— Лит. матем. сб., 1981, т. 21, № 4, с. 97.
4. Лазакович Н.— Лит., матем. сб., 1982, т. 22, № 1, с. 86.

УДК 513.83

В. Л. ТИМОХОВИЧ

o-МЕТРИКИ С УСЛОВИЕМ (сК)

В предлагаемой заметке рассматриваются топологические пространства с o-метрикой [1], удовлетворяющей условию (сК) (слабое условие Коши [2]). Внутреннюю и внешнюю характеристики пространств, допускающих симметрику с (сК), дал Я. А. Кофнер [3]. Здесь результаты Я. А. Кофнера обобщаются на случай произвольных o-метризуемых пространств. Все отображения предполагаются непрерывными сюрьекциями, все пространства, если это не оговорено особо, T_1.

1. Для топологического пространства X, $A\subset X$, $x\in X$ обозначим: τ_X — топология на X, $\tau_X(x)$ — семейство всех окрестностей точки x, $[A]_X$ — замыкание A в X.

Вещественно значная функция $d(x, y)$ на множестве X называется o-метрикой, если для любых $x, y\in X$ $d(x, y)\geqslant 0$, $d(x, y)=0 \leftrightarrow x=y$. o-Метрика d называется симметрикой, если для любых $x, y\in X$ $d(x, y)=d(y, x)$. Говорят, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$ сходится к точке $x\in X$ по o-метрике d, если $d(x, x_n)\to 0$. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называют фундаментальной, если для любого $\varepsilon>0$ существует n такое, что каковы бы ни были $k\geqslant n$, $m\geqslant n$, $d(x_k, x_m)<\varepsilon$. Отметим, что сходящаяся по d последовательность может не быть фундаментальной [4].

Обозначим $B_d(x, \varepsilon)=\{y\in X \mid d(x, y)<\varepsilon\}$, $B_d(A, \varepsilon)=\bigcup\limits_{x\in A} B_d(x, \varepsilon)$, $\operatorname{diam}_d(A)=\sup\{d(x, y)\mid x, y\in A\}$. Говорят, что пространство X допускает o-метрику d, или что d согласуется с топологией, если $U\in\tau_X \leftrightarrow$ для любой точки $x\in U$ можно указать $\varepsilon>0$ такое, что $B_d(x, \varepsilon)\subset U$. В этом случае из сходимости по d следует сходимость в топологическом смысле, обратное, однако, не всегда верно [1]. Говорят, что согласованная с топологией o-метрика d удовлетворяет условию (сК), если для любого $\varepsilon>0$ в любом незамкнутом множестве A можно указать точки x, y, $x\neq y$, такие, что $\operatorname{diam}_d(\{x, y\})<\varepsilon$.

Пусть на X фиксирована некоторая согласованная с топологией o-метрика d. Отображение $f: X\to Y$ называют П-отображением, если, каковы бы ни были $y\in Y$, $U\in\tau_Y(y)$, существует $\varepsilon>0$, для которого $B_d(f^{-1}(y), \varepsilon)\subset f^{-1}(U)$ [5].

И, наконец, обозначим $\langle A\rangle_d=\{x\in X\mid d(x, A)=0\}$. Ясно, что при согласованности o-метрики d с топологией, $\langle A\rangle_d\subset[A]_X$.

2. **Теорема 1.** Согласованная с топологией o-метрика d удовлетворяет условию (сК) тогда и только тогда, когда из любой сходящейся по d последовательности можно выделить фундаментальную подпоследовательность.

Принципиальная идея доказательства содержится в упомянутой работе Я. А. Кофнера [3].

Пусть X — регулярное пространство, допускающее o-метрику d с условием (сК). Построим метрическое пространство S и факторное П-отображение $f: S\to X$. Обозначим γ_n — семейство всех множеств $\alpha_n\subset X$, представимых в виде $\alpha_n=\{x_i\}_{i=1}^{\infty}\cup\{x\}$, $\operatorname{diam}_d(\{x_i\}_{i=1}^{\infty})<\frac{1}{n}$, $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}\subset B_d(x, \frac{1}{n})$, $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ сходится по d к x, $S=\{\alpha=\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}\in$

$\in \prod_{n=1}^{\infty} \gamma_n \mid \bigcap_{n=1}^{\infty} \alpha_n \neq \varnothing\}$. Ясно, что для любой $\alpha \in S$ $\bigcap_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ — одноточечное множество. Таким образом, имеет место отображение $f: S \to X: \alpha \to x = \bigcap_{n=1}^{\infty} \alpha_n$. На S определим метрику $\rho(\alpha, \beta) = 1/n(\alpha, \beta)$, где $n(\alpha, \beta)$ — первое n, для которого $\alpha_n \neq \beta_n$ или ∞ в случае $\alpha = \beta$. Имеем для любых $\alpha \in S$, $x \in X$:

1) $B_\rho(\alpha, \frac{1}{n}) = (\{\alpha_1\} \times \ldots \times \{\alpha_n\} \times \prod_{i>n} \gamma_i) \cap S$;

2) $f(B_\rho(\alpha, \frac{1}{n})) = \alpha_1 \cap \ldots \cap \alpha_n$;

3) $f(B_\rho(f^{-1}(x), \frac{1}{n})) \subset \langle B_d(x, \frac{1}{n}) \rangle_d \subset [B_d(x, \frac{1}{n})]_X$.

Опираясь на свойства 1)—3) и на теорему 1, нетрудно показать, что f — факторное П-отображение. Таким образом, в силу результатов Я. А. Кофнера [3] справедлива

Теорема 2. Регулярное пространство, допускающее o-метрику с (сК), допускает и симметрику с (сК).

В связи со сказанным представляется интересным вопрос: можно ли в теореме 2 опустить требование регулярности?

ЛИТЕРАТУРА

1. Недев С. Й.— Труды Моск. матем. об-ва, 1971, т. 24.
2. Архангельский А. В.— Докл. АН СССР, 1965, т. 164, № 2.
3. Кофнер Я. А.— Докл. АН СССР, т. 187, № 2.
4. Александров П. С., Немыцкий В. В.— Матем. сб., 1938, т. 3, № 3.
5. Пономарев В. И.— Бюл. Польской АН. Сер. матем., астр. и физ., 1960, т. 8, № 3.