В. Случай осцилляции между исправным и неисправным состоянием прибора ($\varphi_1 \rightarrow +\infty, d_1 \rightarrow 0, \varphi_1 d_1 = c$) — поведение числа требований в рассматриваемой СМО совпадает с поведением числа требований в надежной СМО $M|G|1$ с интенсивностью входящего потока $\bar{A} = (\lambda_1 + c\lambda_2)/\delta_1$ и распределением времени обслуживания $B(\tau)$.

Г. Случай редких поломок прибора и долгих ремонтов ($\varphi_1 \rightarrow 0, d_1 \rightarrow +\infty, \varphi_1 d_1 = c$) — поведение числа требований в рассматриваемой СМО описывается той же надежной СМО, что и в случае В.

ЛИТЕРАТУРА

1. Yechiali U., Naor P.— Oper. Res., 1971, v. 19, № 3, p. 722.
 2. Shogan A. W.— Nav. Res. Log. Quart., 1979, v. 29, № 3, p. 487.

УДК 519.21

Н. В. ЛАЗАКОВИЧ

**АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ
 В ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ ДЛЯ СУММ
 НЕЗАВИСИМЫХ k -РЕШЕТЧАТЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ**

Пусть $\xi_j = (\xi_{j1}, \xi_{j2}, \dots, \xi_{jk}), j = \overline{1, n}$ — независимые k -решетчатые случайные векторы (с. в.), принимающие значения из общей решетки

$$\{(m_1, m_2, \dots, m_k) : m_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; i = \overline{1, k}\}, \quad (1)$$

с функциями распределения (ф. р.) $\bar{V}_j(x)$.

Без существенного ограничения общности предполагаем, что математические ожидания компонент случайного вектора $\xi_j, j = \overline{1, n}$ равны 0.

Введем следующие обозначения:

$$\sigma_{jl}^2 = M\xi_{jl}^2, j = \overline{1, n}, l = \overline{1, k}; B_{nl}^2 = \sum_{j=1}^n \sigma_{jl}^2; B_n = (B_{n1}, \dots, B_{nk});$$

$$\bar{F}_j(x) — \text{ф. р. с. в. } \frac{\xi_j V_n}{B_n};$$

θ — с. в. с ф. р.

$$F(x) = \frac{1}{n} (\bar{F}_1(x) + \bar{F}_2(x) + \dots + \bar{F}_n(x));$$

V_n — ковариационная матрица с. в. Θ , предполагаем, что она положительно определенная;

U — класс всех борелевских множеств в R^k ;

$$F_n(x) — \text{ф. р. суммы } S_n = \frac{1}{B_n} (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n);$$

$$P_n(A) = P(S_n \in A);$$

Λ_n — ковариационная матрица с. в. $Z_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$;

$$\beta_{sj} = M(\xi_j \Lambda_n^{-1} \xi_j')^{\frac{s}{2}}, L_{sn} = \sum_{j=1}^n \beta_{sj};$$

$P_j(\Theta, -\Phi)(x)$ — стандартные многочлены аппроксимации, см., например, [4];

λ_n — наименьшее собственное значение V_n ;

$$G_{\xi_j}^{(i)}(v_i) = \frac{\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} P(\xi_j = (v_1, \dots, v_i + \mu, \dots, v_k)) P(\xi_j = (v_1, \dots, \mu, \dots, v_k))}{\sum_{v_i=-\infty}^{\infty} P(\xi_j = v)}$$

$$\Lambda_{r,n}(F)(x) = \sum_{j(\alpha) < r} (-1)^{|\alpha|} \frac{1}{B_n^\alpha} S_\alpha(B_n x) (D^\alpha F)(x),$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ — произвольный неотрицательный целочисленный вектор, $|\alpha| = |\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_k|$,

$$j(\alpha) = \sum_{\alpha_j > 2} (\alpha_j - 1); \quad j(\alpha) = 0, \text{ если } \alpha_j < 2 \text{ для всех } j;$$

$$S_\alpha(x) = S_{\alpha_1}(x_1) \cdot S_{\alpha_2}(x_2) \dots S_{\alpha_k}(x_k), \quad x = (x_1, \dots, x_k);$$

$$S_j(x) = \begin{cases} (-1)^{j/2-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cos(2\pi n x)}{(2\pi n)^j}, & j \text{ — четно, } j > 0 \\ (-1)^{\frac{j-1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin(2\pi n x)}{(2\pi n)^j}, & j \text{ — нечетно.} \end{cases}$$

Выпишем ряд условий, которые нам понадобятся в дальнейшем:

$$\liminf_n \lambda_n > 0; \quad (2)$$

$$\liminf_n \frac{B_n^2}{n} > 0, \quad i = \overline{1, k} \quad \limsup_n \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n M \|\xi_j\|^s < \infty; \quad (3)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \int_{\|x\| > n^\tau} \|x\|^s dV_j(x) \rightarrow 0, \quad 0 < \tau < \frac{1}{2}. \quad (4)$$

Теорема. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — независимые k -решетчатые с. в., принимающие значения из общей решетки (1), маргинальные распределения координат которых имеют равные 1 максимальные шаги распределения, удовлетворяют условиям (2)–(4) и

$$\frac{1}{\ln n} \min_{1 < i < k} \min_{a/q} \sum_{j=1}^n \frac{1}{q^2} \sum_{-\frac{q}{2} < r \leq \frac{q}{2}} r^2 \times \\ \times \sum_{\substack{av_i \equiv r \pmod{q} \\ \|v_i\| < \frac{1}{2}}} G_{\xi_j}^{(i)}(v_i) \rightarrow \infty,$$

где минимум берется по всем целым a и q таким, что $1 < q \leq 16k \|B_n\| L_{3n}$, $a \leq \frac{1}{2}q$, $(a, q) = 1$, тогда равномерно по $A \in U$ для $s \geq 3$ имеет место следующее соотношение;

$$P_n(A) = \int_A d \sum_{j=0}^{s-2} n^{-\frac{j}{2}} \Lambda_{s-j-1, n}(P_j(\Theta, -\Phi)(x)) + o\left(n^{-\frac{s-2}{2}}\right).$$

Доказательство теоремы проводится по схеме доказательства теоремы 1 из [4] с использованием теоремы А. 4.3. из [2] и леммы 2 из [3].

Следствие. При выполнении условий теоремы

$$\sup_{x \in R^k} |F_n(x) - \sum_{|\alpha| \leq s-2} (-1)^{|\alpha|} B_n^{-\alpha} S_\alpha(B_n x) (D^\alpha \Phi)(x) - \\ - n^{-\frac{1}{2}} \sum_{|\alpha| \leq s-2} (-1)^{|\alpha|} B_n^{-\alpha} S_\alpha(B_n x) (D^\alpha P_1(\Theta, -\Phi)(x)) - \\ - n^{-\frac{s-2}{2}} P_{s-2}(\Theta, -\Phi)(x)| = o\left(n^{-\frac{s-2}{2}}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Полученные результаты обобщают работы [1], [4] и теоремы 23.1, 23.2 из [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бикьялис А.— Теория вероятностей и ее применение, 1969, т. 14, № 3, с. 499.
2. Бхаттачарья Р. Н., Ранга Рао Р. Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения.— М., 1982.
3. Дубинский И.— Лит. матем. сб., 1981, т. 21, № 4, с. 97.
4. Лазакевич Н.— Лит., матем. сб., 1982, т. 22, № 1, с. 86.

УДК 513.83

В. Л. ТИМОХОВИЧ

o -МЕТРИКИ С УСЛОВИЕМ (сК)

В предлагаемой заметке рассматриваются топологические пространства с o -метрикой [1], удовлетворяющей условию (сК) (слабое условие Коши [2]). Внутреннюю и внешнюю характеристики пространств, допускающих симметрику с (сК), дал Я. А. Кофнер [3]. Здесь результаты Я. А. Кофнера обобщаются на случай произвольных o -метризуемых пространств. Все отображения предполагаются непрерывными сюръекциями, все пространства, если это не оговорено особо, T_1 .

1. Для топологического пространства X , $A \subset X$, $x \in X$ обозначим: τ_x — топология на X , $\tau_x(x)$ — семейство всех окрестностей точки x , $[A]_x$ — замыкание A в X .

Вещественно значащая функция $d(x, y)$ на множестве X называется o -метрикой, если для любых $x, y \in X$ $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. o -Метрика d называется симметрикой, если для любых $x, y \in X$ $d(x, y) = d(y, x)$. Говорят, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ сходится к точке $x \in X$ по o -метрике d , если $d(x, x_n) \rightarrow 0$. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называют фундаментальной, если для любого $\varepsilon > 0$ существует n такое, что каковы бы ни были $k \geq n$, $m \geq n$, $d(x_k, x_m) < \varepsilon$. Отметим, что сходящаяся по d последовательность может не быть фундаментальной [4].

Обозначим $B_d(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$, $B_d(A, \varepsilon) = \bigcup_{x \in A} B_d(x, \varepsilon)$, $\text{diam}_d(A) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$. Говорят, что пространство X допускает o -метрику d , или что d согласуется с топологией, если $U \in \tau_x \Leftrightarrow$ для любой точки $x \in U$ можно указать $\varepsilon > 0$ такое, что $B_d(x, \varepsilon) \subset U$. В этом случае из сходимости по d следует сходимость в топологическом смысле, обратное, однако, не всегда верно [1]. Говорят, что согласованная с топологией o -метрика d удовлетворяет условию (сК), если для любого $\varepsilon > 0$ в любом незамкнутом множестве A можно указать точки x, y , $x \neq y$, такие, что $\text{diam}_d(\{x, y\}) < \varepsilon$.

Пусть на X фиксирована некоторая согласованная с топологией o -метрика d . Отображение $f: X \rightarrow Y$ называют Π -отображением, если, каковы бы ни были $y \in Y$, $U \in \tau_Y(y)$, существует $\varepsilon > 0$, для которого $B_d(f^{-1}(y), \varepsilon) \subset f^{-1}(U)$ [5].

И, наконец, обозначим $\langle A \rangle_d = \{x \in X \mid d(x, A) = 0\}$. Ясно, что при согласованности o -метрики d с топологией, $\langle A \rangle_d \subset [A]_x$.

2. **Теорема 1.** Согласованная с топологией o -метрика d удовлетворяет условию (сК) тогда и только тогда, когда из любой сходящейся по d последовательности можно выделить фундаментальную подпоследовательность.

Принципиальная идея доказательства содержится в упомянутой работе Я. А. Кофнера [3].

Пусть X — регулярное пространство, допускающее o -метрику d с условием (сК). Построим метрическое пространство S и факторное Π -отображение $f: S \rightarrow X$. Обозначим γ_n — семейство всех множеств $\alpha_n \subset X$, представимых в виде $\alpha_n = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \cup \{x\}$, $\text{diam}_d(\{x_i\}_{i=1}^{\infty}) < \frac{1}{n}$, $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset B_d(x, \frac{1}{n})$, $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ сходится по d к x , $S = \{\alpha = \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \in$