

Очевидно, что уравнение (1) удовлетворяет первому и второму условиям Фукса. Рассмотрим 3-е условие:

$$F(\omega', \omega, z) = \omega'^m - P_{2m}(z, \omega) = 0. \quad (2)$$

Из уравнения (2) получаем:

$$D(\omega, z) = P_{2m}(z, \omega). \quad (3)$$

Из общей теории известно [1], что нули дискриминанта $D(\omega, z)$ должны быть решениями уравнения (1). При $P_{2m}(z, \omega) = 0$ $\frac{\partial P_{2m}}{\partial z} + \frac{\partial P_{2m}}{\partial \omega} \cdot \omega' = 0$, т. е. при $P_{2m}(z, \omega) = 0$ $\frac{\partial P_{2m}}{\partial z} \equiv 0$. Отсюда мы получим, что $P_{2m}(z, \omega) = a_0(z) \cdot P(\omega)$. Тогда уравнение (1) имеет такой вид:

$$\left(\frac{d\omega}{\frac{1}{m} a_0(z) \cdot dz} \right)^m = P(\omega).$$

Пусть $d\tau = \frac{1}{m} a_0(z) dz$, тогда получим

$$\left(\frac{d\omega}{d\tau} \right)^m = P(\omega). \quad (4)$$

Так как уравнения вида (4) уже изучены [2], то можно найти все формы уравнения вида (1) с неподвижными критическими точками и их интегрирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. — М., 1941.

2. Колесникова Н. С., Лукашевич Н. А. — Дифференц. уравнения, 1972, т. 8, № 10, с. 1753.

УДК 519.872

А. Н. ДУДИН

ОБ ОДНОЙ НЕНАДЕЖНОЙ СИСТЕМЕ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ИЗМЕНЯЕМОЙ СКОРОСТЬЮ ВХОДЯЩЕГО ПОТОКА

Рассмотрим следующую математическую модель системы массового обслуживания (СМО) с ожиданием. В систему поступают требования, длина которых имеет распределение $B(\tau)$ с преобразованием Лапласа —

Стилтьеса $\beta(s)$ и конечными моментами $b_j = \int_0^{\infty} \tau^j dB(\tau)$, $j=1, 2$. В течение

времени, имеющего экспоненциальное распределение с параметром ϕ_1 , система функционирует нормально: в систему поступает простейший поток требований интенсивности λ_1 , происходит обслуживание требований с постоянной скоростью δ_1 единиц длины в единицу времени. По истечении времени нормального функционирования системы происходит поломка прибора. Время, затрачиваемое на его ремонт, имеет распределение $D(\tau)$ с преобразованием Лапласа — Стилтьеса $d(s)$ и конечными моментами

$d_j = \int_0^{\infty} \tau^j dD(\tau)$, $j=1, 2$. Во время ремонта в систему поступает

простейший поток требований интенсивности λ_2 , обслуживание требований не производится. После окончания ремонта снова начинается нормальное функционирование СМО, причем требование, находившееся на приборе в момент поломки, дообслуживается. Требуется найти производящую функцию стационарного распределения вероятностей числа требований в данной системе. Эта задача решена в [1], когда распределения $B(\tau)$ и $D(\tau)$ экспоненциальные, в [2], когда эти распределения эрланговские. Решим эту задачу в случае произвольных распределений $B(\tau)$, $D(\tau)$.

Рассмотрим процесс $\xi_t = \{i_t, v_t, \tau_t \theta_t\}$, где i_t — число требований в системе в момент t ; $v_t = 1$, если в момент t система работает нормально, и $v_t = 2$, если в момент t прибор ремонтируется; τ_t — остаточная длина требования, находящегося на приборе в момент t ; θ_t — остаточное время ремонта, если $v_t = 2$. Обозначим: $\pi_t^{(1)}(i, x) = P\{i_t = i, v_t = 1, \tau_t < x\}$, $\pi_t^{(2)}(i, x, y) = P\{i_t = i, v_t = 2, \tau_t < x, \theta_t < y\}$, $i \geq 0, x, y \geq 0$.

Утверждение. Если выполняется условие

$$Ab_1 < 1, \quad (1)$$

где $A = (\lambda_1 + \varphi_1 d_1 \lambda_2) / \delta_1$, то существует стационарное распределение вероятностей состояний СМО:

$$\pi^{(1)}(i, x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \pi_t^{(1)}(i, x), \quad \pi^{(2)}(i, x, y) = \lim_{t \rightarrow \infty} \pi_t^{(2)}(i, x, y), \quad i \geq 0, x, y \geq 0.$$

Введем производящие функции:

$$R_1(z, x) = \pi^{(1)}(0, 0) + \sum_{i=1}^{\infty} \pi^{(1)}(i, x) z^i,$$

$$R_2(z, x, y) = \pi^{(2)}(0, 0, y) + \sum_{i=1}^{\infty} \pi^{(2)}(i, x, y) z^i, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

Поскольку нас интересует производящая функция стационарного распределения вероятностей процесса i_t , для решения задачи достаточно найти вид $R_1(z, +\infty)$, $R_2(z, +\infty, +\infty)$.

Теорема. Производящие функции $R_1(z, +\infty)$, $R_2(z, +\infty, +\infty)$ определяются следующим образом:

$$R_1(z, +\infty) = R_1(0, 0) \frac{\beta(\bar{s}(z))(1-z)}{\beta(\bar{s}(z))-z}, \quad (2)$$

$$R_2(z, +\infty, +\infty) = \varphi_1 \frac{1-d(\lambda_2(1-z))}{\lambda_2(1-z)} R_1(z, +\infty), \quad (3)$$

$$R_1(0, 0) = \pi^{(1)}(0, 0) = (1 - Ab_1) / (1 + \varphi_1 d_1), \quad (4)$$

где $\bar{s}(z) = (\lambda_1(1-z) + \varphi_1(1-d(\lambda_2(1-z)))) / \delta_1$.

Доказательство теоремы проводится путем составления уравнений Чепмена — Колмогорова для стационарных вероятностей марковского процесса ξ_t , получения системы уравнений для их производящих функций, для преобразований Лапласа этих производящих функций, решения этой системы и обратного перехода к производящим функциям.

Используя формулы (2) — (4), можно находить различные характеристики рассматриваемой СМО. Например, выражения для вероятности P_0 того, что система пуста и для среднего числа L требований в системе следующие:

$$P_0 = \pi^{(1)}(0, 0) + \pi^{(2)}(0, 0, +\infty) = \left(1 + \frac{1-d(\lambda_2)}{\varphi_1 \lambda_2}\right) \frac{1 - Ab_1}{1 + \varphi_1 d_1},$$

$$\begin{aligned} L &= R_1'(1, +\infty) + R_2'(1, +\infty, +\infty) = \\ &= Ab_1 + \frac{A^2 b_2 + b_1 \delta_1^{-1} \varphi_1 \lambda_2^2 d_2}{2(1 - Ab_1)} + \frac{\varphi_1 \lambda_2 d_2}{2(1 + \varphi_1 d_1)}. \end{aligned}$$

Отметим некоторые частные случаи рассматриваемой СМО.

А. Случай, когда $B(\tau)$, $D(\tau)$ — экспоненциальные или эрланговские распределения. Результаты данной работы согласуются с [1, 2].

Б. Случай $d_1 \rightarrow 0$ или $\lambda_2 \rightarrow 0$ — поведение числа требований в рассматриваемой СМО совпадает с поведением числа требований в надежной СМО $M|G|1$ с интенсивностью входящего потока λ_1 и распределением времени обслуживания $B(\delta_1 \tau)$.

В. Случай осцилляции между исправным и неисправным состоянием прибора ($\varphi_1 \rightarrow +\infty$, $d_1 \rightarrow 0$, $\varphi_1 d_1 = c$) — поведение числа требований в рассматриваемой СМО совпадает с поведением числа требований в надежной СМО $M|G|1$ с интенсивностью входящего потока $\bar{A} = (\lambda_1 + c\lambda_2)/\delta_1$ и распределением времени обслуживания $B(\tau)$.

Г. Случай редких поломок прибора и долгих ремонтов ($\varphi_1 \rightarrow 0$, $d_1 \rightarrow +\infty$, $\varphi_1 d_1 = c$) — поведение числа требований в рассматриваемой СМО описывается той же надежной СМО, что и в случае В.

ЛИТЕРАТУРА

1. Yechiali U., Naor P. — Oper. Res., 1971, v. 19, № 3, p. 722.
2. Shogan A. W. — Nav. Res. Log. Quart., 1979, v. 29, № 3, p. 487.

УДК 519.21

Н. В. ЛАЗАКОВИЧ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ k -РЕШЕТЧАТЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ

Пусть $\xi_j = (\xi_{j1}, \xi_{j2}, \dots, \xi_{jk})$, $j = \overline{1, n}$ — независимые k -решетчатые случайные векторы (с. в.), принимающие значения из общей решетки

$$\{(m_1, m_2, \dots, m_k) : m_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; i = \overline{1, k}\}, \quad (1)$$

с функциями распределения (ф. р.) $\bar{V}_j(x)$.

Без существенного ограничения общности предполагаем, что математические ожидания компонент случайного вектора ξ_j , $j = \overline{1, n}$ равны 0.

Введем следующие обозначения:

$$\sigma_{jl}^2 = M\xi_{jl}^2, \quad j = \overline{1, n}, \quad l = \overline{1, k}; \quad B_{nl}^2 = \sum_{j=1}^n \sigma_{jl}^2; \quad B_n = (B_{n1}, \dots, B_{nk});$$

$$\bar{F}_j(x) — \text{ф. р. с. в. } \frac{\xi_j V_n}{B_n};$$

θ — с. в. с ф. р.

$$F(x) = \frac{1}{n} (\bar{F}_1(x) + \bar{F}_2(x) + \dots + \bar{F}_n(x));$$

V_n — ковариационная матрица с. в. Θ , предполагаем, что она положительно определенная;

U — класс всех борелевских множеств в R^k ;

$$F_n(x) — \text{ф. р. суммы } S_n = \frac{1}{B_n} (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n);$$

$$P_n(A) = P(S_n \in A);$$

Λ_n — ковариационная матрица с. в. $Z_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$;

$$\beta_{sj} = M(\xi_j \Lambda_n^{-1} \xi_j')^{\frac{s}{2}}, \quad L_{sn} = \sum_{j=1}^n \beta_{sj};$$

$P_j(\Theta, -\Phi)(x)$ — стандартные многочлены аппроксимации, см., например, [4];

λ_n — наименьшее собственное значение V_n ;

$$G_{\xi_j}^{(i)}(v_i) = \sum_{\substack{v_l = -\infty \\ 1 \leq l < k, l \neq i}}^{\infty} \frac{\sum_{\mu = -\infty}^{\infty} P(\xi_j = (v_1, \dots, v_i + \mu, \dots, v_k)) P(\xi_j = (v_1, \dots, \mu, \dots, v_k))}{\sum_{v_l = -\infty}^{\infty} P(\xi_j = v)};$$