в сторону более высоких температур. С ростом степени деформации увеличивается перекрытие этапов отжига.

Для выяснения природы процессов, протекающих на первом и втором этапах, определялась энергия активации методом угловых коэффициентов по кривым изотермического отжига. На первом этапе отжига энергия активации равна $0{,}5\pm0{,}1$ эВ. Это значение близко к значениям энергий активаций миграции (0,35 эВ) и образования (0,47 эВ) вакансий в висмуте [3, 4]. Можно предположить, что на данном этапе происходит отжиг дефектов типа вакансионных скоплений.

На втором этапе отжига энергия активации принимает значение $0{,}85\pm0{,}15$ эВ, что примерно равно сумме энергий активаций образования и миграции вакансий. Энергия активации переползания дислокаций в деформированном металле равна сумме энергий активаций образования и миграции вакансий [5], поэтому второй этап восстановления удельного электросопротивления, наблюдаемый при изохронном отжиге, целесообразно связать с полигонизационными процессами, протекающими при нагреве деформированных сплавов.

Значительная часть изменения удельного электросопротивления при отжиге деформированных сплавов висмут — сурьма наблюдается на третьем этапе. Рентгеноструктурные исследования показали, что отжиг при $t>190\,°$C вызывает изменение полюсных плотностей дифракционых линий. Так как значение полюсных плотностей дифракционных линий определяется ориентировкой кристаллитов, то третий этап изохронного отжига необходимо связать с рекристаллизационными процессами, происходящими в деформированном материале при нагреве.

ЛИТЕРАТУРА

1. Прокошин В. И., Шепелевич В. Г.— Докл. АН БССР, 1980, т. 24, № 5, с. 430.
2. Прокошин В. И., Шепелевич В. Г.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1982, № 1, с. 35.
3. Otake S., Ishi Y., Matsuno N.— Iap. I. Appl. Phys., 1981, т. 20, № 6, с. 1037.
4. Шепелевич В. Г., Прокошин В. И.— Докл. АН БССР, 1977, т. 21, № 3, с. 218.
5. Фридель Ж. Дислокации.— М., 1967.

УДК 517.977

О. Н. БУДЬКО

ОДНО ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СИЛЬНОЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОСТИ ВТОРОЙ ВАРИАЦИИ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО УПРАВЛЕНИЮ

Пусть на траекториях управляемой системы

$$\frac{d}{dt}x(t)=f(x(t),\ u(t),\ u(t-h),\ t),\quad t\in T=[t_0,\ t_1];$$

$$x(t_0)=x_0;\ u(\cdot)=\{\varphi_1(\tau),\ \tau\in[t_0-h,\ t_0)\};\tag{1}$$

$$u(t)\in U,\ t\in T,\tag{2}$$

требуется минимизировать функционал

$$I(u)=\varphi(x(t_1)),\tag{3}$$

где $x\in R^n$; $u\in R^m$ — управление из класса дифференцируемых функций с ограниченной производной; $U\subset R^m$ — открытое множество; функционал φ и функция $f(x,\ u,\ u(t-h),\ t)$ обладают достаточными аналитическими свойствами для дальнейших исследований; h — постоянное запаздывание, $h>0$.

Пусть $u^0(t)$, $t\in T$,— управление, удовлетворяющее принципу максимума. Вдоль таких управлений будем исследовать вторую вариацию функционала (3). Известно [1], что сильная положительность второй вариации является достаточным условием слабого локального минимума функционала. Для задачи (1)—(3) вторая вариация имеет вид

$$\delta^2 I(u^0)=\bar{x}^T(t_1)Q_1(t_1)\bar{x}(t_1)+\int_{t_0}^{t_1}[\bar{x}^T(t)Q(t)\bar{x}(t)+\bar{u}^T(t)R(t)\bar{u}(t)+2\bar{x}^T(t)\times$$

$$\times D_1(t)\bar{u}(t)+2\bar{x}^T(t)D_2(t)\bar{u}(t-h)+2\bar{u}^T(t)R_2(t)\bar{u}(t-h)]dt; \qquad (4)$$

$$\frac{d}{dt}\bar{x}(t)=A(t)\bar{x}(t)+B(t)\bar{u}(t)+C(t)\bar{u}(t-h),\quad t\in T; \qquad (5)$$

$$\bar{x}(t_0)=0;\ \bar{u}(\tau)=0,\ \tau\in[t_0-h,\ t_0), \qquad (6)$$

где $\bar{x}(t)=\delta x(t)$ — вариация траектории; $\bar{u}(t)=\delta u(t)$ — вариация управления из класса дифференцируемых функций с ограниченной производной. В дальнейшем будем считать, что $R(t)>0$; $R_2(t)=0$; $t\in T$.

Рассмотрим тождество

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\Big\{\bar{x}^T(t)M(t)\bar{x}(t)+\bar{x}^T(t)\int_{-h}^{0}M(t,\ s)\bar{u}(t+s)ds+$$

$$+\Big(\int_{-h}^{0}\bar{u}^T(t+s)M^T(t,\ s)\,ds\Big)\bar{x}(t)+\int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0}\bar{u}^T(t+s)M(t,\ s,\ r)\bar{u}(t+r)dsdr\Big\}dt-$$

$$-\bar{x}^T(t_1)M(t_1)\bar{x}(t_1)-\bar{x}^T(t_1)\int_{-h}^{0}M(t_1,\ s)\bar{u}(t_1+s)ds-$$

$$-\Big(\int_{-h}^{0}\bar{u}^T(t_1+s)M^T(t_1,\ s)ds\Big)\bar{x}(t_1)-\int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0}\bar{u}^T(t_1+s)M(t_1,s,r)\bar{u}(t_1+r)dsdr+$$

$$+\bar{x}^T(t_0)M(t_0)\bar{x}(t_0)+\bar{x}^T(t_0)\int_{-h}^{0}M(t_0,\ s)\bar{u}(t_0+s)ds+$$

$$+\Big(\int_{-h}^{0}\bar{u}^T(t_0+s)M^T(t_0,\ s)ds\Big)\bar{x}(t_0)+$$

$$+\int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0}\bar{u}^T(t_0+s)M(t_0,\ s,\ r)\bar{u}(t_0+r)dsdr=0 \qquad (7)$$

для любых $\bar{x}(t_0)$; $\bar{u}(\tau)$, $\tau\in[t_0-h,\ t_0)$. На траекториях системы (5) рассмотрим функционал $\delta^2\bar{I}(u^0)$, полученный добавлением тождества (7) к функционалу (4) с учетом начальных условий (6).

Поступая аналогично [2], получаем следующую систему матричных дифференциальных уравнений Риккати (СМДУР):

$$\frac{d}{dt}\bar{K}(t)=-A^T(t)\bar{K}(t)-\bar{K}(t)A(t)-\bar{Q}(t)+\bar{F}(t)R^{-1}(t)\bar{F}^T(t);$$

$$\bar{K}(t_1)=Q_1(t_1)-M(t_1); \qquad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{K}(t,\ s)=\frac{\partial}{\partial s}\bar{K}(t,\ s)-[A^T(t)-\bar{F}(t)R^{-1}(t)B^T(t)]\bar{K}(t,\ s)+$$

$$+\bar{F}(t)R^{-1}(t)\bar{K}^T(t,\ s,\ 0)+\sum\nolimits_2(t,\ s);$$

$$\bar{K}(t,\ -h)=\bar{K}(t)C(t)+\bar{D}_2(t);\qquad \bar{K}(t_1,\ s)=-M(t_1,\ s); \qquad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{K}(t,s,r)=\Big[\frac{\partial}{\partial s}+\frac{\partial}{\partial r}\Big]\bar{K}(t,\ s,\ r)+[\bar{K}^T(t,\ s)B(t)+$$

$$+\bar{K}(t,s,0)+M^T(t,\ s)B(t)+M(t,\ s,\ 0)]R^{-1}(t)[B^T(t)\bar{K}(t,\ r)+$$

$$+\bar{K}(t,\ 0,\ r)+B^T(t)M(t,\ r)+M(t,\ 0,\ r)]+\sum\nolimits_3(t,\ s,\ r);$$

$$\bar{K}(t,-h,\ r)=C^T(t)\bar{K}(t,\ r)+\sum\nolimits_{31}(t,\ r);\qquad \bar{K}(t_1,\ s,\ r)=-M(t_1,s,r), \qquad (10)$$

для всех $t \in T,\ s,\ r \in [-h,\ 0]$, где

$$\overline{F}(t) = \overline{K}(t)\,B(t) + \overline{K}(t,\ 0) + \overline{D}_1(t);\quad \overline{D}_1(t) = D_1(t) + M(t)B(t) + M(t,\ 0);$$

$$\overline{Q}(t) = Q(t) + A^T(t)\,M(t) + M(t)A(t) + \frac{d}{dt}M(t);$$

$$D_2(t) = D_2(t) + M(t)C(t) - M(t,\ -h);$$

$$\sum\nolimits_2(t,\ s) = \left[\frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial t}\right]M(t,\ s) - A^T(t)\,M(t,\ s) +$$

$$+ \overline{F}(t)R^{-1}(t)[B^T(t)\,M(t,\ s) + M^T(t,\ s,\ 0)];$$

$$\sum\nolimits_3(t,\ s,\ r) = \left[\frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial t}\right]M(t,\ s,\ r) + [M(t,\ s)\,B(t) + M(t,s,0)]\times$$

$$\times R^{-1}(t)\,[B^T(t)M(t,\ r) + M(t,\ 0,\ r)];\quad \sum\nolimits_{31}(t,\ r) = C^T(t)M(t,\ r) - M(t,\ -h,\ r).$$

Предположим, что СМДУР (8)—(10) имеет решение. Тогда, используя (5)—(7), (8)—(10), функционал (4) можно преобразовать к виду:

$$\delta^2 I(u^0) = \int_{t_0}^{t_1}\Big\{\overline{u}(t) + R^{-1}(t)\overline{F}(t)\overline{x}(t) + R^{-1}(t)\int_{-h}^{0}[B^T(t)\overline{K}(t,\ s) +$$

$$+ \overline{K}^T(t,\ s,\ 0)]\,\overline{u}(t+s)ds + R^{-1}(t)\int_{-h}^{0}[B^T(t)\,M(t,\ s) + M^T(t,\ s,\ 0)]\times$$

$$\times\overline{u}(t+s)ds\Big\}^T R(t)\Big\{\overline{u}(t) + R^{-1}(t)\,\overline{F}(t)\overline{x}(t) + R^{-1}(t)\int_{-h}^{0}[B^T(t)\overline{K}(t,\ s) +$$

$$+ \overline{K}^T(t,\ s,\ 0)]\,\overline{u}(t+s)ds + R^{-1}(t)\int_{-h}^{0}[B^T(t)M(t,\ s) +$$

$$+ M^T(t,\ s,\ 0)]\,\overline{u}(t+s)ds\Big\}\,dt. \tag{11}$$

Похожие преобразования проделаны в [2, 3]. Отсюда $\delta^2 I(u^0) > 0$ для любых $\overline{u}(t) \neq 0$, $t \in T$, т. е. вторая вариация определенно положительная. Вдоль траекторий системы (5) рассмотрим функционал

$$I(\overline{u},\ \varepsilon) = \delta^2\overline{I}(u^0) + \int_{t_0}^{t_1}\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\,\overline{u}^T(t)\,R(t)\,\overline{u}(t)\,dt. \tag{12}$$

Функционал (12) определенно положителен, если имеет решение СМДУР (8)—(10) при $R(t,\ \varepsilon) = \frac{1}{1-\varepsilon}R(t)$. Следуя [4], можно показать, что СМДУР ε действительно имеет решение. Тогда $I(\overline{u},\ \varepsilon) \geqslant 0$ для любых $\overline{u}(t)$, $t \in T$. Преобразовав (12), получим $\delta^2 I(\overline{u}^0) \geqslant k_2\,\|u(\cdot)\|^2_{L_2}$ для любых $\overline{u}(t)$, $t \in T$. Таким образом, справедлива

Теорема. Для того чтобы вторая вариация $\delta^2 I(u^0)$ (4) была сильно положительной, достаточно, чтобы для любых $t \in T$, s, $r \in [-h,\ 0]$ существовало решение СМДУР (8)—(10).

ЛИТЕРАТУРА

1. Soliman M. A., Ray W. H.— Int. J. Control, 1972, v. 15, № 4, p. 609.
2. Забелло Л. Е. Минимизация квадратичных функционалов и проблема второй вариации для управляемых систем с запаздыванием.— Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 505-83. Деп. от 27.01.83.
3. Bell D. J., Jacobson D. H.— Academic Press, London: New York: San-Francisco, 1975.
4. Колмановский В. Б., Майзенберг Т. Л.— Автоматика и телемеханика, 1973, № 1, с. 47.
5. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление.— М., 1961.