Теорема 8. Пусть $E_0^* = R^1$ и $Q_1^*, \ldots, Q_n^*$ — параллелепипеды из R^s. Мультинапряжения $x^* \in X_0^*$ с $x_i^* \in Q_i^*$ существуют тогда и только тогда, когда для всех элементарных циклов μ имеет место

$$0 \in \langle e_j, \sum_{i \in \mu^+} Q_i^* - \sum_{i \in \mu^-} Q_i^* \rangle, \; j = 1, \ldots, s.$$

Для выпуклых многогранников $Z_i \subset R^1$, $i = 1, \ldots, n$ доказано, что условие $0 \in \sum_{i \in \omega^+} Z_i - \sum_{i \in \omega^-} Z_i$ для всех элементарных коциклов ω является необходимым и достаточным для существования мультипотока $x \in X_0$, $x_i \in Z_i$. Этот результат можно усилить.

Теорема 9. Пусть $E_0 = R^1$, $C_1, \ldots, C_n$ — выпуклые, компактные множества из R^1. Мультипоток $x \in X_0$ с $x_i \in C_i$ существует тогда и только тогда, когда для всех элементарных коциклов ω и для всех $a_0 \in R$, $a_0 \neq 0$ имеет место

$$0 \in \langle a_0, \sum_{i \in \omega^+} C_i - \sum_{i \in \omega^-} C_i \rangle.$$

На основе исследований, проведенных в этой статье, можно сформулировать динамические оптимизационные задачи об обобщенных потоках и напряжениях [6, 7]. Важная проблема состоит в том, чтобы для специальных задач такого рода найти критерий оптимальности и алгоритмы решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Berge C. Theorie des graphes et ses applications.— Paris, 1958.
2. Berge C. Sur l'eqivalense du probleme du transport gênéralise et du probleme réseaux, 1960, C. R. Ac. Sc. 251, p. 324.
3. Berge C., Choulia-Houri A. Programmes, jeux et réseaux de transport, Paris, 1962.
4. Dragan I. An optinality condition for minimalcost multicommadity flows.— Math. Progr. Activity Analisis. Amsterdam, 1975.
5. Walk M., Verbesek W. Eine Verallgemeinrung des Transport und Potentialproblems auf endlichen gerichteten Graphen. XVIII. IWK der TH Ilmenau, 1973, A2.
6. Вальк М. Двойственность транспортных и потенциальных задач в Банаховых пространствах.— Труды Тбилисского ун-та, 1957, А 9 (157).
7. Walk M., Verbesek W.— Verallgemeinerung der Ströme und Spannungen über endlicher gerichteter Graphen. XXI. IWK der TH Ilmenau, 1976, B2.

УДК 62-50

Л. Е. ЗАБЕЛЛО

ОБ УПРАВЛЕНИИ ПОКАЗАТЕЛЕМ ЛЯПУНОВА В ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМАХ

Рассматривается задача управляемости старшим верхним показателем Ляпунова. Устанавливается связь между решением указанной задачи и задачей полной управляемости в дискретной и непрерывной системах. В качестве управления используются дискретные регуляторы.

1. Пусть поведение объекта описывается системой уравнений

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \; x(0) = x_0, \; t = 0, 1, \ldots, \tag{1}$$

где $A(t)$, $B(t)$ — соответственно $(n \times n)$, $(n \times r)$-матрицы, $u(t)$ — r-вектор управления из множества

$$\{P'(t)x(t)\}, \tag{2}$$

где $P(t)$ — $(n \times r)$-матрица. Обозначим $\overline{\chi}(x) = \overline{\lim\limits_{t \to +\infty}} (\|x(t)\|)^{1/t}$ — верхний показатель Ляпунова; $\lambda^0 = \max\limits_{x} |\overline{\chi}(x)|$ — старший верхний показатель

Ляпунова. Следуя [1], можно заключить, что при $\lambda^0 \in [0,1)$ все решения системы (1) равномерно асимптотически устойчивы в целом.

В ряде задач теории автоматического регулирования зачастую требуется неасимптотически устойчивую систему (1) при $u(t) \equiv 0$ стабилизировать с помощью выбора управления из множества (2) и, более того, придать ей определенную или в некоторых пределах степень устойчивости. Эта техническая задача может быть реализована с помощью решения следующей математической задачи.

Задача 1. Пусть α — произвольное наперед заданное число из $(0, 1)$. Найти условия, при которых существует управление из (2) такое, что старший верхний показатель Ляпунова λ^0 решений системы (1) удовлетворяет условию $\lambda^0 \in [0, \alpha)$.

Задачу 1 назовем задачей управления старшим верхним показателем Ляпунова. Укажем зависимость между решением задачи 1 и полной управляемостью системы (1).

Теорема 1. Задача 1 имеет решение, если система (1) полностью управляема при каждом $t \geqslant 0$ на $[t, t+T]$, $T < +\infty$. Приведенные выше рассуждения обобщаются и на непрерывный случай.

2. Использование цифровых машин приводит к дискретному регулированию с помощью кусочно-постоянного управления, являющегося функцией фазовых координат объекта, вычисляемых в некоторые дискретные моменты времени. Такая задача рассматривалась в [2] для стационарных систем, где приведены достаточные условия стабилизируемости. Там же указывается, что для нестационарных систем эта проблема остается открытой.

Пусть поведение объекта описывается системой

$$\dot{x}(t) = A_1(t)x(t) + B_1(t)u(t), \quad x(0) = x_0, \; t \geqslant 0, \tag{3}$$

где $u(t) = C'(kh)x(kh)$, $t \in [kh, (k+1)h)$, $h > 0$ — некоторая постоянная, $k = 0, 1, \ldots$, C — произвольная $(n \times r)$-матрица, меняющаяся, вообще говоря, через интервал h, $A_1(t)$, $B_1(t)$ — соответственно $(n \times n)$, $(n \times r)$-матрицы с аналитическими элементами, $\|A_1(t)\| \leqslant a_1$, $\|B_1(t)\| \leqslant b_1$, a_1, $b_1 < +\infty$.

Интегрируя последовательно систему (3) на промежутках $[kh, (k+1)h)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, получим интегральную кривую. Как будет показано ниже, значения интегральной кривой в моменты kh образуют дискретную линейную систему, которую назовем дискретным аналогом системы (3). Естественным образом возникает необходимость исследования следующих задач.

Задача 2. Найти условия, при которых дискретный аналог системы 3 выбором с (kh), h может быть сделан равномерно асимптотически устойчивым по Ляпунову с любым наперед заданным λ^0, $\lambda^0 \in [0, 1)$.

Задача 3 [3]. При каких условиях существует дискретный регулятор такой, что старший верхний показатель Ляпунова $\bar{\lambda}^0$ [4] решений системы (3) удовлетворяет условию $\bar{\lambda}^0 \leqslant \alpha_b$, где $\alpha_b > 0$ — произвольное, наперед заданное число. Справедливы следующие условия разрешимости задач 2, 3.

Теорема 2. Необходимым и достаточным условием разрешимости задачи 2 является выполнение условия полной управляемости системы (3) [5]:

$$\operatorname{rank} \{X_k(t), \; k = \overline{1, n}\} = n \tag{4}$$

хотя бы при одном t, $t \geqslant 0$, где $X_k(t)$ определяется из соотношения $X_{k+1}(t) = A_1(t)X_k(t) - d/dt X_k(t)$, $k \geqslant 1$, $X_1(t) = B_1(t)$.

Теорема 3. Задача 3 имеет решение тогда и только тогда, когда выполнено условие (4).

3. Приведем доказательство основных результатов. Наряду с системой (1) рассмотрим систему

$$y(t+1) = \lambda A(t)y(t) + \lambda B(t)u(t), \; y(0) = x_0, \; t \geqslant 0, \tag{5}$$
$$u(t) = P'(t)y(t), \; \lambda \in R_1, \; \lambda \neq 0.$$

Прямой подстановкой нетрудно установить связь между решениями $x(t)$ и $y(t)$:

$$y(t)=\lambda^t x(t). \tag{6}$$

Очевидно, что если система (1) полностью управляема на $[t, t+T]$, $t\geqslant 0$, то полностью управляема на этом отрезке система (5) и наоборот. В силу произвольности λ и соотношения (6) задача 1 будет разрешима, если система (5) стабилизируема управлением вида (2) (с заменой $x(t)$ на $y(t)$). Дальнейшее доказательство теоремы проходит по схеме [6].

Для доказательства теоремы 2 выведем ряд вспомогательных соотношений для системы (3). Обозначим через $F_1(t)$ — матрицу, удовлетворяющую уравнению $d/dtF_1(t)=A_1(t)F_1(t)$, $F_1(0)=E_n$. Тогда можно получить, что

$$x((k+1)h)=x(t_{k+1})=F_1(t_{k+1})F_1^{-1}(t_k)x(t_k)+\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}F_1(t_{k+1})F_1^{-1}(\tau)\times$$

$$\times B_1(\tau)d\tau C'(t_k)x(t_k)=A(t_k)x(t_k)+B(t_k)C'(t_k)x(t_k). \tag{7}$$

Через $F(T, t_k)$ обозначим фундаментальную матрицу решений системы (7), удовлетворяющую уравнению

$$F(T, t_{k-1})=F(T, t_k)A(t_k),\ t_k\leqslant T-h,\ F(T, T-h)=E_n.$$

Достаточным условием полной управляемости на $[0, T]$ системы (7) является выполнение условия

$$g'F(T, t_k)B(t_k)\neq 0,\ t_k=0, h, 2h, \ldots, T-h, \tag{8}$$

для любого g, $\|g\|\neq 0$. Нетрудно показать, что условие (8) эквивалентно требованию

$$g'F_1(T)\int\limits_{kh}^{(k+1)h}F_1^{-1}(\tau)B_1(\tau)d\tau\neq 0,\ k=0,\ 1,\ldots,\ T/h-1, \tag{9}$$

для любого g, $\|g\|\neq 0$.

Далее нам понадобится

Лемма 1. Условие (9) выполняется при любом T и некотором h тогда и только тогда, когда

$$g'F_1^{-1}(\tau)B_1(\tau)\not\equiv 0,\quad \tau\in[0,\ T], \tag{10}$$

для любого g, $\|g\|\neq 0$.

Необходимость очевидна.

Достаточность. Для удобства доказательство проведем только для случая $B_1(t)=b(t)$ — вектор-столбец. В общем случае доказательство проводится аналогично.

Обозначим $\gamma(\tau)=F_1^{-1}(\tau)b(\tau)$, $\{\gamma_i(\tau),\ i=\overline{1,\ n}\}=\gamma'(\tau)$. Тогда условие (10) аналогично существованию точек τ_j, $j=\overline{1,n}$, для которых

$$\operatorname{rank}\{\gamma(\tau_j),\ j=\overline{1,n}\}=n,\quad \tau_j\in[0,\ T]. \tag{11}$$

В силу (11) и непрерывности элементов $\gamma_i(\tau)$, $i=\overline{1,\ n}$, существует $k>0$ такое, что как бы ни менялось значение $\gamma_i(\tau)$ в $h/2$-окрестности точек τ_j, всегда будет выполняться

$$\operatorname{rank}\begin{Bmatrix}\gamma_1(\tau_1+\delta_{11}) & \ldots & \gamma_1(\tau_n+\delta_{1n})\\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\\ \gamma_n(\tau_1+\delta_{n1}) & \ldots & \gamma_n(\tau_n+\delta_{nn})\end{Bmatrix}=n \tag{12}$$

для любых δ_{ij}, $|\delta_{ij}|\leqslant h/2$. Не нарушая общности, можем считать T/h — целое, $\tau_1>0$. Но тогда для выбранного h-разбиения и при некотором наборе k_j, $j=\overline{1,\ n}$, по теореме о среднем справедливы равенства

$$\int\limits_{k_jh}^{(k_j+1)h}\gamma_i(\tau)d\tau=\gamma_i(\tau_j+\delta_{ij})h,\ k_j\in\{0,\ 1,\ldots,\ T/h-1\}.$$

В силу невырожденности $F_1(T)$ и выполнения (12) автоматически следует выполнение условия (9). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2 проведем для случая, когда все решения системы (3) при $u(t)\equiv 0$ неустойчивы. В общем случае доказательство мало отличается от приведенного ниже. Выполнение условия (4) обеспечивает выполнение условия (10), а следовательно, и условия (8).

Таким образом, при выполнении (4) система (7) полностью управляема на $[t, t+T]$, $T=\text{const}$, и доказательство достаточности сразу следует из теоремы 1.

Необходимость. Предположим, что условие (4) не выполняется, а задача имеет решение. Невыполнение (4) означает существование вектора $g^0(t)$, $\|g^0(t)\|=1$, для которого выполняется $g^{0\prime}(t)\,F_1(t)\,F_1^{-1}(\tau)\,B_1(\tau)\equiv 0$, $\tau\in[0, t]$. Умножим (7) слева на $g^{0\prime}(t_{k+1})$. Получим $g^{0\prime}(t_{k+1})\,x(t_{k+1}) = g^{0\prime}(t_{k+1})\,F_1(t_{k+1})\,F_1^{-1}(t_k)\,x(t_k) = g^{0\prime}(t_{k+1})\,F_1(t_{k+1})\,x_0$. Оценим последнее соотношение по норме. Имеем $\|g^{0\prime}(t_{k+1})x(t_{k+1})\| = \|g^{0\prime}(t_{k+1})F_1(t_{k+1})x_0\| \leqslant \|x(t_{k+1})\|$. В силу невырожденности $F_1(t_{k+1})$ при некотором x_0, $\|x_0\|=1$, справедливо $\overline{\lim\limits_{k\to+\infty}}\,\|g^{0\prime}(t_{k+1})\,F_1(t_{k+1})\,x_0\| = \bar{f} > 0$. Тогда из двух последних соотношений при данном начальном состоянии x_0 будем иметь $\hat{\lambda}^0 \geqslant \bar{\chi}(x) \geqslant \lim\limits_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\bar{f}} > 0$. Получили противоречие предположению, которое и доказывает теорему 2.

Доказательство достаточности теоремы 3 проводится по схеме работ [2, 3]. необходимость теоремы 3 доказывается аналогично доказательству необходимости теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Халанай Л., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем.— М., 1971.
2. Зубов В. И. Лекции по теории управления.— М., 1975.
3. Забелло Л. Е.— Докл. АН БССР, 1980, т. 24, № 6, с. 497.
4. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова.— М., 1966.
5. Забелло Л. Е.— Изв. вузов СССР: Математика, 1976, № 12, с. 30.
6. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Основы динамического программирования.— Минск, 1975.