

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи.— М., 1977.
2. Самко С. Г. Методы отображений.— В сб. науч. трудов. Чечено-Ингушск. гос. ун-т, 1976, с. 41.
3. Самко С. Г. Математический анализ и его приложения.— Ростов, 1978, с. 103.
4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.— М., 1966.

УДК 519.1

М. ВАЛЬК

ОБОБЩЕННЫЕ ПОТОКИ И НАПРЯЖЕНИЯ НА ГРАФАХ

В настоящей статье определяются понятия обобщенного потока и напряжения, позволяющие описание динамических процессов в сетях сводить к транспортным и потенциальным проблемам [1—4]. Исследуется структура пространств обобщенных потоков и напряжений и их отношения друг к другу.

Пусть $G = (N, U)$ — конечный ориентированный (без петель) граф с множеством ребер N и вершин U . Пусть множество N содержит n элементов и множество U — m элементов. Через Φ обозначим множество n -мерных векторов, являющихся потоками. Как известно [3], Φ является линейным подпространством n -мерного векторного пространства R^n и ортогональное дополнение Θ к Φ содержит множество всех напряжений на G . При этом размерность Φ равна цикломатическому числу, а размерность Θ — коцикломатическому числу графа G .

Пусть $E_1, E_2, \dots, E_n$ — банаховы пространства и $E_1^*, E_2^*, \dots, E_n^*$, сопряженные к ним. Каждому ребру i графа поставим в соответствие элемент $x_i \in E_i$. Пусть заданы ненулевые векторы:

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \bigcap_{i=1}^n E_i \text{ и } a^* = (a_1^*, \dots, a_n^*) \in \bigcap_{i=1}^n E_i^*.$$

Элемент $x = (x_1, \dots, x_n) \in \bigcap_{i=1}^n E_i$ называется a^* -потокom на G , если $a^* \circ x = (a_1^*(x_1), \dots, a_n^*(x_n)) \in \Phi_n$.

Элемент $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in \bigcap_{i=1}^n E_i^*$ называется a -напряжением на G , если $x^* \circ a = (x_1^*(a_1), \dots, x_n^*(a_n)) \in \Phi$.

Для заданных a^* и a обозначим через $X_{a^*} \subset \bigcap_{i=1}^n E_i$ множество a^* -потоков и через $X_a^* \subset \bigcap_{i=1}^n E_i^*$ множество a -напряжений. Непосредственно из определения следует, что X_{a^*} и X_a^* являются линейными пространствами.

Если $E_1 = \dots = E_n = E$, $a_1^* = a_2^* = \dots = a_n^* = a_0^* \neq 0$ и $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a_0 \neq 0$, получаем понятие потока и напряжения, рассмотренные в [5]. В этом случае обозначаем пространство потоков и напряжений соответственно через $X_{a_0^*}$ и $X_{a_0}^*$.

Пусть

$$X_0 \cap X_{a_0^*} (X_0^* = \bigcap_{a_0^* \neq 0} X_{a_0^*}^*), \text{ т. е.}$$

$$x \in X_0 (x^* \in X_0^*)$$

тогда и только тогда, когда при $a_0^* \neq 0$ $a_0^* \in E^*$ ($a_0 \neq 0$, $a_0 \in E$) имеет место

$$\sum_{i \in \omega^+} a_0^*(x_i) - \sum_{i \in \omega^-} a_0^*(x_i) = 0,$$

$$\sum_{i \in \mu^+} x_i^*(a_0) - \sum_{i \in \mu^-} x_i^*(a_0) = 0$$

для всех элементарных коциклов $\omega = \omega^+ \cup \omega^-$ (всех элементарных циклов $\mu = \mu^+ \cup \mu^-$). Последние равенства справедливы, когда для всех элементарных коциклов имеет место

$$\sum_{i \in \omega^+} x_i - \sum_{i \in \omega^-} x_i = 0$$

и соответственно для всех элементарных циклов имеет место

$$\sum_{i \in \mu^+} x_i^* - \sum_{i \in \mu^-} x_i^* = 0.$$

Таким образом, X_0, X_0^* являются пространствами универсаль-потоков и универсаль-напряжений [5, 6]. Если, кроме того, $E_i = E = R^n$, то X_0 является множеством мультипотоков, структуру которого исследовал И. Драган [4].

Пусть $a^* \in \bigtimes_{i=1}^n E_i^*$ и $a \in \bigtimes_{i=1}^n E_i$ таковы, что $a^* \circ a = (1, 1, \dots, 1)$, т. е.

элементы a_i не входят в ядро функционала a_i^* .

Пусть $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ — любой цикл и $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ — любой коцикл графа, т. е.

$$\mu_i = \begin{cases} 1, & i \in \mu^+ \\ -1, & i \in \mu^- \\ 0, & i \notin \mu^+ \cup \mu^- \end{cases} \quad \omega_i = \begin{cases} 1, & i \in \omega^+ \\ -1, & i \in \omega^- \\ 0, & i \notin \omega^+ \cup \omega^- \end{cases}.$$

Поскольку $a_i^*(a_i) = 1, i = 1, \dots, n$, то очевидно, что потоками являются элементы

$$\mu(a) = (\mu_1(a_1), \dots, \mu_n(a_n)) \in X_{a^*},$$

$$\omega(a^*) = (\omega_1(a_1^*), \dots, \omega_n(a_n^*)) \in X_a^*.$$

В общем случае для цикла μ элемент $\mu(b)$, $b \in \bigtimes_{i=1}^n E_i$ является a^* -потоком тогда и только тогда, когда для всех i , $\mu_i \neq 0$, $a_i^*(b_i)$ — константа.

Соответственно для коцикла элемент $\omega(b^*)$ в $b^* \in \bigtimes_{i=1}^n E_i^*$ является a -напряжением тогда и только тогда, когда для всех i , $\omega_i \neq 0$, $b_i^*(a_i)$ — константа.

Пусть $\mu^1, \dots, \mu^n$ — цикловой базис и $\omega^1, \dots, \omega^s$ — коциклового базис. Так как X_{a^*} и X_a^* — линейные пространства, то

$$L_M = \left\{ x \in \bigtimes_{i=1}^n E_i, \quad x = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mu^k(a^k); \quad a^k \in \bigtimes_{i=1}^n E_i, \quad a_i^*(a_i^k) = \right.$$

$$\left. = \rho_k \neq 0 \quad \forall i, \mu_i^k \neq 0 \right\},$$

$$L_W = \left\{ x^* \in \bigtimes_{i=1}^n E_i^*, \quad x^* = \sum_{k=1}^s \sigma_k \omega^k(a^{*k}); \quad a^{*k} \in \bigtimes_{i=1}^n E_i^*, \right.$$

$$\left. a_i^{*k}(a_i) = \delta_k \neq 0 \quad \forall i, \omega_i^k \neq 0 \right\}$$

их подпространства.

Пусть

$$N_{a_i}^* = \{x_i \in E_i, \quad x_i^*(a_i) = 0\},$$

$$N_{a_i}^* = \{x_i \in E_i, \quad a_i^*(x_i) = 0\},$$

$$N_{a^*} = \bigcap_{i=1}^n N_{a_i}^*, \quad N_a^* = \bigcap_{i=1}^n N_{a_i}^*.$$

Очевидно, что N_{a^*} и N_a^* — линейные подпространства пространств X_{a^*} и X_a^* и имеют место включения $L_M + N_{a^*} \subset X_{a^*}$, $L_W + N_a^* \subset X_a^*$.

Теорема 1. Пространства потоков и напряжений представимы в виде $X_{a^*} = L_M \oplus N_{a^*}$, $X_a^* = L_W \oplus N_a^*$.

Пусть $a \in \bigcap_{i=1}^n E_i$, $a^* \in \bigcap_{i=1}^n E_i^*$, причем $a_i^*(a_i) = 1$, $i = 1, \dots, n$.

Обозначим через

$$L_{M(a)} = \left\{ x \in \bigcap_{i=1}^n E_i, \quad x = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mu^k(a) \right\}$$

и

$$L_{W(a^*)} = \left\{ x^* \in \bigcap_{i=1}^n E_i^*, \quad x^* = \sum_{k=1}^s \sigma \omega^k(a^*) \right\}.$$

Тогда

$$X_{a^*,a} = L_{M(a)} \oplus N_{a^*} \subset X_{a^*},$$

$$X_{a^*,a}^* = L_{W(a^*)} \oplus N_a^* \subset X_a^*$$

есть линейное подпространство пространства X_{a^*} (X_a^*).

Теорема 2. Если граф G не содержит висячих дуг, то $X_{a^*,a} = X_{b^*,b}$ ($X_{a^*,a} = X_{b^*,b}^*$) тогда и только тогда, когда существует такое вещественное число $\lambda \neq 0$, что $b^* = \lambda a^*$ ($b = \lambda a$). Пусть $v_1, \dots, v_m$ — вершины графа G и $\omega^1, \dots, \omega^m$ — коциклы, соответствующие вершинам $v_1, \dots, v_m$. Тогда

$$S = \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \omega^m \end{pmatrix}$$

является матрицей инцидентий графа G . Введем вектор

$$s(a^*) = \begin{pmatrix} \omega^1(a^*) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \omega^m(a^*) \end{pmatrix}.$$

Теорема 3. Вектор $x \in X_{a^*,a}$ в том и только в том случае, когда $s(a^*)x = 0$.

Чтобы характеризовать обобщенные напряжения с помощью потенциалов, необходимо ограничить наши исследования пространством вида

$$X_{a_0}^* = \left\{ x^* \in (E_0^*)^n : x^* = \sum_{j=1}^s \sigma_j \omega^j(a^{*j}) : a_1^{*j} = \dots = a_n^{*j} = a_0^{*j} \neq 0 \right\} \oplus (N_{a_0}^*)^n.$$

Здесь $a_0 \neq 0$ — любой выбранный элемент банахового пространства E_0 .

Элемент $y^* \in (E_0^*)^m$ назовем потенциалом элемента $x^* \in (E_0^*)^n$, если для каждого ребра $i = (r_{i1}, r_{i2})$ имеет место $x_i^* = y_{r_{i2}}^* - y_{r_{i1}}^*$.

Теорема 4. Элемент $x^* \in (E_0^*)^n$ является элементом $X_{a_0}^*$ тогда и только тогда, когда существует потенциал $y^* \in (E_0^*)^m$. Этот потенциал однозначно определен до аддитивного элемента $y_0^* \in (N_{a_0}^*)^m$.

Следствие 1. Пусть s — матрица инцидентий графа G и

$$[S(a_0)]^* = \begin{pmatrix} \hat{\omega}_1^1 a_0^* & \dots & \hat{\omega}_n^1 a_0^* \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{\omega}_1^m a_0^* & \dots & \hat{\omega}_n^m a_0^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\omega}_1^1 a_0 & \dots & \hat{\omega}_n^1 a_0 \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{\omega}_1^m a_0 & \dots & \hat{\omega}_n^m a_0 \end{pmatrix} = s^T(a_0),$$

тогда x^* является элементом $X_{a_0}^*$ тогда и только тогда, когда существует $y^* \in (E_0^*)^m$ со свойством $x^* = -s^T(a_0)y^*$.

Следствие 2. Пусть $X_{a_0}^*/(N_{a_0}^*)^n$, $(E_0^*)^m/(N_{a_0}^*)^m$ — факторные подпространства пространства $X_{a_0}^*$ и $(E_0^*)^m$. Тогда $X_{a_0}^*/(N_{a_0}^*)^n \cong (E_0^*)^m/(N_{a_0}^*)^m$.

При формулировке оптимизационных задач по обобщенным потокам и напряжениям интересны такие выводы, которые обеспечивают их существование при выполнении некоторых ограничений. Обобщением теоремы Гофмана (см. [1]) являются следующие.

Теорема 5. Пусть $C_i \subset E_i$, $i=1, \dots, m$ — заданные выпуклые компактные множества. Тогда a^* — поток $x \in X_{a_0}$, $x_i \in C_i$, существует в том и только том случае, когда для всех элементарных коциклов имеет место

$$0 \in \sum_{i \in \omega^+} a_i^*(G_i) - \sum_{i \in \omega^-} a_i^*(G_i).$$

Теорема 6. Пусть заданные $C_i \subset E_i^*$ — заданные выпуклые, компактные множества, a — напряжение $x^* \in X_a^*$, $x_i^* \in C_i^*$, существует тогда и только тогда, когда для всех элементарных циклов μ имеет место

$$0 \in \sum_{i \in \mu^+} C_i^*(a_i) - \sum_{i \in \mu^-} C_i^*(a_i).$$

В случае мультипотоков, представимых в виде

$$X_0 = \left\{ x \in E_0^n : x = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mu^k(a_0^k) : a_0^k \in E_0, a_0^k \neq 0 \right\},$$

имеет место

Теорема 7. Пусть $E_0 = R^1$ — одномерное евклидово векторное пространство и $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ — параллелепипеды, параллельные осям из R_1 . Мультипоток $x \in X_0$ с $x_i \in Q_i$ существует тогда и только тогда, когда для всех элементарных коциклов ω имеет место

$$0 \in \langle e_j, \sum_{i \in \omega^+} Q_i - \sum_{i \in \omega^-} Q_i \rangle, \quad j = 1, \dots, 1,$$

где $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$.

Двойственным образом можно сформулировать теорему для мультинапряжений из

$$X_0^* = \{ x^* \in (E_0^*)^n : x^* = \sum_{j=1}^s \sigma_j \omega^j(a_0^*), a_0^* \in E_0^*, a_0^* \neq 0 \}.$$

Теорема 8. Пусть $E_0^* = R^1$ и $Q_1^*, \dots, Q_n^*$ — параллелепипеды из R^s . Мультинапряжения $x^* \in X_0^*$ с $x_i^* \in Q_i^*$ существуют тогда и только тогда, когда для всех элементарных циклов μ имеет место

$$0 \in \langle e_j, \sum_{i \in \mu^+} Q_i^* - \sum_{i \in \mu^-} Q_i^* \rangle, \quad j = 1, \dots, s.$$

Для выпуклых многогранников $Z_i \subset R^1, i = 1, \dots, n$ доказано, что условие $0 \in \sum_{i \in \omega^+} Z_i - \sum_{i \in \omega^-} Z_i$ для всех элементарных коциклов ω является необходимым и достаточным для существования мультипотока $x \in X_0, x_i \in Z_i$. Этот результат можно усилить.

Теорема 9. Пусть $E_0 = R^1, C_1, \dots, C_n$ — выпуклые, компактные множества из R^1 . Мультипоток $x \in X_0$ с $x_i \in C_i$ существует тогда и только тогда, когда для всех элементарных коциклов ω и для всех $a_0 \in R, a_0 \neq 0$ имеет место

$$0 \in \langle a_0, \sum_{i \in \omega^+} C_i - \sum_{i \in \omega^-} C_i \rangle.$$

На основе исследований, проведенных в этой статье, можно сформулировать динамические оптимизационные задачи об обобщенных потоках и напряжениях [6, 7]. Важная проблема состоит в том, чтобы для специальных задач такого рода найти критерий оптимальности и алгоритмы решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Berge C. Theorie des graphes et ses applications.— Paris, 1958.
2. Berge C. Sur l'équivalence du problème du transport généralisé et du problème réseaux, 1960, C. R. Ac. Sc. 251, p. 324.
3. Berge C., Chouliat-Houri A. Programmes, jeux et réseaux de transport, Paris, 1962.
4. Dragan I. An optimality condition for minimalcost multicommodity flows.— Math. Progr. Activity Analysis. Amsterdam, 1975.
5. Walk M., Verbeseck W. Eine Verallgemeinerung des Transport und Potentialproblems auf endlichen gerichteten Graphen. XVIII. IWK der TH Ilmenau, 1973, A2.
6. Вальк М. Двойственность транспортных и потенциальных задач в Банаховых пространствах.— Труды Тбилисского ун-та, 1957, А 9 (157).
7. Walk M., Verbeseck W.— Verallgemeinerung der Ströme und Spannungen über endlicher gerichteter Graphen. XXI. IWK der TH Ilmenau, 1976, B2.

УДК 62-50

Л. Е. ЗАБЕЛЛО

ОБ УПРАВЛЕНИИ ПОКАЗАТЕЛЕМ ЛЯПУНОВА В ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМАХ

Рассматривается задача управляемости старшим верхним показателем Ляпунова. Устанавливается связь между решением указанной задачи и задачей полной управляемости в дискретной и непрерывной системах. В качестве управления используются дискретные регуляторы.

1. Пусть поведение объекта описывается системой уравнений

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(0) = x_0, \quad t = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

где $A(t), B(t)$ — соответственно $(n \times n), (n \times r)$ -матрицы, $u(t)$ — r -вектор управления из множества

$$\{P'(t)x(t)\}, \quad (2)$$

где $P(t)$ — $(n \times r)$ -матрица. Обозначим $\bar{\chi}(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\|x(t)\|)^{1/t}$ — верхний показатель Ляпунова; $\lambda^0 = \max_x |\bar{\chi}(x)|$ — старший верхний показатель