$\times T(t_i)$, где $T(t_i)=[t_i, t_i+\alpha_i[$ либо $T(t_i)=]t_i-\alpha_i, t_i]$, $\alpha_i \geqslant 0$; 4) $|\dot{a}_{,}(t_i)\bar{\varkappa}| \leqslant \mu_1$, $i=\overline{1, p}$; $b_*(t)-\mu_2 \leqslant a'(t)\bar{\varkappa} \leqslant b^*(t)+\mu_2$, $t \in T$, где $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$ — параметры метода.

Оптимальную опору $K^{\circ}_{\text{оп}}$ задачи (1) будем искать в виде $K^{\circ}_{\text{оп}}=\{T^{\circ}_{\text{оп}}, \bar{J}_{\text{оп}}\}$, $T^{\circ}_{\text{оп}}=\{t^{\circ}_i=t_i+\Delta t_i, i=\overline{1, p}\}$. Для нахождения p независимых переменных $T^{\circ}_{\text{оп}}=\{t^{\circ}_i, i=\overline{1, p}\}$ составим p уравнений:

$$F_i(T^{\circ}_{\text{оп}})=\dot{a}'_{\text{оп}}(t^{\circ}_i)A^{-1}(T^{\circ}_{\text{оп}}, \bar{J}_{\text{оп}})b(T_{\text{оп}})+\dot{a}_{\text{н}}(t^{\circ}_i)\bar{\varkappa}_{\text{н}}-\dot{b}(t^{\circ}_i)=0,\ i=\overline{1, p}. \quad (6)$$

Здесь $\dot{a}_{\text{оп}}(t)=(\dot{a}_j(t), j\in \bar{I}_{\text{оп}})$, $\dot{a}_{\text{н}}(t)=\dot{a}_j(t)$, $j\in \bar{J}_{\text{н}})$; $b(t^{\circ}_i)=b^*(t^{\circ}_i)$, если $\bar{u}(t_i)>0$; $b(t^{\circ}_i)=b_*(t^{\circ}_i)$, если $\bar{u}(t_i)<0$, $i=\overline{1, p}$.

Пусть $T^{\circ}_{\text{оп}}$ — решение уравнения (6). При достаточно малых $\mu_1>0$, $\mu_2>0$ псевдоплан $\varkappa^{\circ}=\bar{x}+\Delta\varkappa^{\circ}$, построенный по опоре $\{T^{\circ}_{\text{оп}}, \bar{J}_{\text{оп}}\}$, будет оптимальным планом задачи (1).

Если $d^2(a'(t)\varkappa^{\circ}-b(t))/dt^2|_{t=t^{\circ}_i}\neq 0$, $i=\overline{1, p}$, то матрица $(\partial F_i(T_{\text{оп}})/\partial T_{\text{оп}}, i=\overline{1, p})$ при $T_{\text{оп}}=T^{\circ}_{\text{оп}}$ имеет вид $\operatorname{diag}\{\ddot{a}(t^{\circ}_i)\varkappa^{\circ}-\ddot{b}(t^{\circ}_i), i=\overline{1, p}\}$, т. е. неособая. Поэтому уравнение (6) можно решать методом Ньютона, взяв в качестве начального приближения опору $\bar{T}_{\text{оп}}$.

7. Алгоритм решения задачи (1) описан для ситуации, когда наряду с математической моделью задачи известен начальный опорный план. Решение задачи (1) в других ситуациях, при которых начальная информация о задаче беднее перечисленной, получается приведенным алгоритмом после введения первой фазы задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Методы линейного программирования.— Минск, 1980.

УДК 517.948.32

И. Н. ЗАБЕЛЛО

О РАЗРЕШИМОСТИ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ЯДРОМ И ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В настоящей работе исследуется система интегральных уравнений с логарифмическим ядром

$$A\int_a^x \varphi(t)dt+B\int_x^b \varphi(t)dt+\frac{C}{\pi}\int_a^b \ln|x-t|\varphi(t)dt=f(x) \quad (1)$$

на конечном отрезке вещественной оси в случае, когда A, B, C постоянные матрицы размерности $(n\times n)$. Уравнения вида (1) $(n=1)$, имеющие обширные приложения, изучались в [1—3]. (Историю вопроса и библиографию смотрите, например, в [1]).

В данной работе устанавливаются необходимые и достаточные условия разрешимости системы уравнений (1) в случае, когда $\det(A-B)\neq 0$, матрица $(A-B)^{-1}C$ имеет простую структуру (матрица простой структуры с помощью некоторого невырожденного преобразования может быть приведена к диагональной форме) и выписывается единственное решение системы. Метод исследования состоит в сведении (1) к системе n сингулярных интегральных уравнений и примыкает к методам С. Г. Самко [2, 3]. При данных предположениях решение системы (1) имеет наиболее простой вид, а так как множество матриц простой структуры является всюду плотным во множестве всех матриц [4], то полученные результаты в ряде случаев могут быть использованы для приближенного решения систем вида (1).

Будем говорить, что вектор-функция $\varphi(x)$ принадлежит классу H_*^n на отрезке $[a, b]$, если для ее координат $\varphi_j(x)$ имеет место представление $\varphi_j(x)=(x-a)^{\varepsilon_1-1}(b-x)^{\varepsilon_2-1}\varphi_j^*(x)$, $1\leqslant j\leqslant n$, где ε_1, $\varepsilon_2>0$, функция $\varphi_j^*(x)$ удовлетворяет условию Гельдера с произвольным положительным показателем, меньшим единицы. Через $C_*^{1,n}$ обозначим класс дифференцируемых на $[a, b]$ вектор-функций таких, что $f'(x)\in H_*^n$. Будем искать решение системы (1) в классе H_*^n, считая, что $f(x)\in C_*^{1,n}$. С помощью известных преобразований [2] от системы (1) перейдем к системе сингулярных интегральных уравнений вида

$$(A-B)\Phi(x)-\frac{C}{\pi}\int_a^b\frac{\Phi(t)\,dt}{t-x}=f(x)-m(x)c_\varkappa, \tag{2}$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{2}\left(\int_a^x\varphi(t)dt-\int_x^b\varphi(t)\,dt\right)$, $m(x)=\frac{A+B}{2}+\frac{C}{2\pi}\ln[(x-a)\times$ $\times(b-x)]$, $c_\varkappa=\Phi(b)-\Phi(a)$.

Задача решения системы (1) равносильна задаче решения системы (2) при условии, что решения $\Phi(x)$ последней разыскиваются в классе $C_*^{1,n}$ и удовлетворяют дополнительному условию $\Phi(a)+\Phi(b)=0$.

Будем далее предполагать, что $\det(A-B+iC)\neq0$, $\det(A-B-iC)\neq0$ и матрица $A-B$ невырожденная. Тогда систему (2) можно записать в виде

$$\Phi(x)-\frac{D}{\pi}\int_a^b\frac{\Phi(t)\,dt}{t-x}=g(x), \tag{3}$$

где обозначено $D=(A-B)^{-1}C$, $g(x)=(A-B)^{-1}[f(x)-m(x)c_\varkappa]$. Пусть матрица D имеет простую структуру, λ_j — ее собственные значения, l_j' — соответствующие транспонированные левые собственные векторы. Система (3) таким образом сводится к системе n скалярных уравнений

$$\Psi_j(x)-\frac{\lambda_j}{\pi}\int_a^b\frac{\Psi_j(t)dt}{t-x}=F_j(x),\quad j=\overline{1,n}, \tag{4}$$

где обозначено $\Psi_j(x)=l_j'\Phi(x)$, $F_j(x)=l_j'g(x)$.

Решение системы (1) получаем по формуле

$$\varphi(x)=L^{-1}\frac{d}{dx}\Psi(x), \tag{5}$$

где $L'=(l_1,\ldots,l_n)$, $\Psi(x)=(\Psi_1(x),\ldots,\Psi_n(x))'$, $\Psi_j(x)$ — решения сингулярных интегральных уравнений (4), определяемые формулами [1]:

$$\Psi_j(x)=F_j(x)+\frac{\lambda_jZ_j(x)}{\pi}\int_a^b\frac{F_j(t)dt}{Z_j(t)\,(t-x)}+\lambda_jZ_j(x)P_{\varkappa_j-1}(x),\quad j=\overline{1,n}.$$

Будем считать, что среди собственных значений матрицы D нет нулевых.

1. Неосцилляционный случай. Исследуем разрешимость системы (1) в случае, когда $-\frac{1}{\lambda_j}\neq i\eta_j$, $\eta_j>1$ или $\eta_j<-1$, $j=\overline{1,n}$.

Положим $\mu_j=\frac{i}{2\pi}\ln\frac{1+i\lambda_j}{1-i\lambda_j}$. В этом случае $\varkappa_j=-1$, $j=\overline{1,n}$, а канонические функции будут иметь вид [3] $Z_j(x)=(x-a)^{\mu_j}(b-x)^{1-\mu_j}$, $j=\overline{1,n}$, так как индексы $\varkappa_j$ сингулярных уравнений (4) отрицательны, то для разрешимости этих уравнений необходимо и достаточно выполнения условий $\int\limits_a^b \frac{F_j(t)}{Z_j(t)}\,dt = 0,\ j=\overline{1,n}$. С учетом введенных обозначений для функций $F_j(x)$ эти условия можно записать в виде

$$\int\limits_a^b \frac{f_j(t)\,dt}{Z_j(t)} = \int\limits_a^b \frac{m_j(t)c_\varkappa}{Z_j(t)}\,dt,\ j=\overline{1,n}, \tag{6}$$

где $f_j(t) = l_j'(A-B)^{-1}f(t),\ m_j(t) = l_j'(A-B)^{-1}m(t)$. Таким образом, разрешимость системы (1) связана с разрешимостью системы n линейных скалярных уравнений (6), для совместности которой необходимо и достаточно выполнения условия

$$\operatorname{rang} M = \operatorname{rang}\{M, \tilde{f}\}, \tag{7}$$

где $\int\limits_a^b \frac{m_j(t)}{Z_j(t)}\,dt$ — j-я строка матрицы M, $\int\limits_a^b \frac{f_j(t)}{Z_j(t)}\,dt$ — компоненты вектора $\tilde{f}$.

Проведя преобразования, аналогичные [3], систему (6) запишем в виде

$$2\sin\mu_j\pi\cdot l_j'(A-B)^{-1}\int\limits_a^b \frac{f(t)dt}{Z_j(t)} = l_j'(A-B)^{-1}\{(A+B)\pi +$$

$$+ 2C[(\psi(\mu_j)-\psi(1)) + \pi\operatorname{ctg}\mu_j\pi + \ln(b-a)]\}c_\varkappa,\ j=\overline{1,n}, \tag{8}$$

где ψ есть ψ-функция Эйлера.

Учитывая, что $\operatorname{ctg}\mu_j\pi = -\frac{1}{\lambda_j}$, $\operatorname{cosec}\mu_j\pi = \frac{\sqrt{\lambda_j^2+1}}{\lambda_j}$ в случае вещественных λ_j, получим (см. [3])

$$\frac{d}{dx}\Psi_j(x) = l_j'(A-B)^{-1}\frac{d}{dx}f(x) + \frac{\lambda_j l_j'(A-B)^{-1}}{\pi(x-a)^{1-\mu_j}(b-x)^{\mu_j}}\times$$

$$\times\left\{\int\limits_a^b \frac{(t-a)^{1-\mu_j}(b-t)^{\mu_j}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]dt}{t-x} + C\operatorname{cosec}\mu_j\pi\cdot c_\varkappa\right\},\ j=\overline{1,n}, \tag{9}$$

где $c_\varkappa$ есть решение системы (8). Доказана

Теорема 1. При выполнении условия (7) система (1) безусловно разрешима и имеет единственное решение, определяемое формулой (5), в которой компоненты вектора $\frac{d}{dx}\Psi(x)$ вычисляются по формулам (9).

2. Осцилляционный случай. Пусть $-\frac{1}{\lambda_j} = i\eta_j$, $\eta_j > 1$ или $\eta_j < -1$, $j=\overline{1,n}$. Тогда $\mu_j = \frac{i}{2\pi}\ln\frac{\eta_j-1}{\eta_j+1}$, $\operatorname{Re}\mu_j = 0$. В этом случае индексы скалярных уравнений (4) равны нулю, а канонические функции имеют вид $Z_j(x) = \left(\frac{x-a}{b-x}\right)^{\mu_j}$ $(j=\overline{1,n})$.

Следуя [3], введем обозначения $\omega_a(\varphi) = (F.P.)\int\limits_a^b\left(\frac{b-t}{t-a}\right)^{\mu}\frac{\varphi(t)dt}{t-a}$, $\omega_b(\varphi) = (F.P.)\int\limits_a^b\left(\frac{b-t}{t-a}\right)^{\mu}\frac{\varphi(t)\,dt}{b-t}$, где μ обозначает диагональную матрицу с элементами μ_j. Тогда для матрицы $m(t)$ (см. формулу (2)) получаем

$$\omega_a(m) + \omega_b(m) = -\mu^{-1}\sin^{-1}\mu\pi\cdot C. \tag{10}$$

Согласно результатам § 2 работы [2], система (1) разрешима, и ее общее решение дается формулой (5), где компоненты вектора $\frac{d}{dx}\Psi(x)$ имеют вид

$$\frac{d}{dx}\Psi_j(x) = l_j'(A-B)^{-1}\frac{d}{dx}f(x) + \frac{\lambda_j l_j'(A-B)^{-1}}{\pi}\times$$

$$\times\frac{d}{dx}\left\{\left(\frac{x-a}{b-x}\right)^{\mu_j}\int\limits_a^b\left(\frac{t-a}{b-t}\right)^{-\mu_j}\frac{f(t)dt}{t-x}\right\} - \frac{d}{dx}N(x)c_\varkappa,\ j=\overline{1,n}, \qquad (11)$$

где $N(x) = l_j'(A-B)^{-1}m(x) + \frac{\lambda_j l_j'(A-B)^{-1}Z_j}{\pi}\int\limits_a^b\frac{m(t)\,dt}{Z_j(t)(t-x)}$ тогда и только тогда, когда удовлетворяется (за счет выбора $c_\varkappa$) система равенств $\omega_a(f) = \omega_a(m)c_\varkappa$, $\omega_b(f) = \omega_b(m)c_\varkappa$.

а) Пусть $\det\omega_a(m)\neq 0$, $\det\omega_b(m)\neq 0$. Тогда для разрешимости исходной системы необходимо и достаточно выполнения условия

$$\omega_a^{-1}(m)\omega_a(f) = \omega_b^{-1}(m)\,\omega_b(f). \qquad (12)$$

б) Если $\det\omega_a(m)=0$, $\det\omega_b(m)\neq 0$ ($\det\omega_a(m)\neq 0$, $\det\omega_b(m)=0$), то необходимое и достаточное условие разрешимости системы (1) имеет вид

$$\omega_a(f) = \omega_a(m)\,\omega_b^{-1}(m)\omega_b(f) \qquad (\omega_b(f) = \omega_b(m)\omega_a^{-1}(m)\,\omega_a(f)). \qquad (13)$$

в) Если $\det\omega_a(m)=0$, $\det\omega_b(m)=0$, то для разрешимости системы (1) необходимо и достаточно выполнения условия

$$\operatorname{rang}W = \operatorname{rang}\{W,\ f_\omega\}, \qquad (14)$$

где обозначено $W = \begin{pmatrix}\omega_a(m)\\ \omega_b(m)\end{pmatrix}$, $f_\omega = \begin{pmatrix}\omega_a(f)\\ \omega_b(f)\end{pmatrix}$; система имеет единственное решение в случае, когда $\operatorname{rang}W = n$.

Замечание 1. Если $\operatorname{rang}W = r$ $(r<n)$, то при выполнении условия (14) система (1) имеет $n-r$ линейно-независимых решений.

Во всех случаях $c_\varkappa$ определяется из системы

$$C\cdot c_\varkappa = -\sin\mu\pi\int\limits_a^b\left(\frac{b-t}{t-a}\right)^{\mu}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]dt. \qquad (15)$$

Вычисляя в формуле (11) $\frac{d}{dx}N(x)$ с использованием формул дифференцирования сингулярных интегралов из [2] и проведя преобразования, аналогичные преобразованиям теоремы 3 работы [3], получаем следующую теорему.

Теорема 2. Для того чтобы система (1) была разрешима, необходимо и достаточно выполнения хотя бы одного из условий (12)—(14). Тогда в перечисленных случаях система имеет единственное решение, определяемое формулой (5), в которой компоненты вектора $\frac{d}{dx}\Psi(x)$ вычисляются по формулам:

$$\frac{d}{dx}\Psi_j(x) = l_j'(A-B)^{-1}\frac{d}{dx}f(x) + \frac{\lambda_j l_j'(A-B)^{-1}}{\pi}\left(\frac{x-a}{b-x}\right)^{\mu_j}\times$$

$$\times\int\limits_a^b\left(\frac{b-t}{t-a}\right)^{\mu_j}\frac{\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]}{t-x}dt,\ j=\overline{1,\ n}.$$

Замечание 2. Если среди собственных значений матрицы $(A-B)^{-1}C$ есть нулевые ($\lambda_m=0$, $m=\overline{1,\ k}$), то в решении (5) первые k координат вектора $\frac{d}{dx}\Psi(x)$ будут определяться по формулам:

$$\frac{d}{dx}\Psi_m(x) = l_m'(A-B)^{-1}\frac{d}{dx}[f(x) - m(x)c_\varkappa],\ m=\overline{1,k},$$

а остальные — вычисляться согласно теоремам 1, 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи.— М., 1977.
2. Самко С. Г. Методы отображений.— В сб. науч. трудов. Чечено-Ингушск. гос. ун-т, 1976, с. 41.
3. Самко С. Г. Математический анализ и его приложения.— Ростов, 1978, с. 103.
4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.— М., 1966.

УДК 519.1

М. ВАЛЬК

ОБОБЩЕННЫЕ ПОТОКИ И НАПРЯЖЕНИЯ НА ГРАФАХ

В настоящей статье определяются понятия обобщенного потока и напряжения, позволяющие описание динамических процессов в сетях сводить к транспортным и потенциальным проблемам [1—4]. Исследуется структура пространств обобщенных потоков и напряжений и их отношения друг к другу.

Пусть $G=(N, U)$ — конечный ориентированный (без петель) граф с множеством ребер N и вершин U. Пусть множество N содержит n элементов и множество U — m элементов. Через Φ обозначим множество n-мерных векторов, являющихся потоками. Как известно [3], Φ является линейным подпространством n-мерного векторного пространства R^n и ортогональное дополнение Θ к Φ содержит множество всех напряжений на G. При этом размерность Φ равна цикломатическому числу, а размерность Θ — коцикломатическому числу графа G.

Пусть $E_1, E_2, \ldots, E_n$ — банаховы пространства и $E_1^*, E_2^*, \ldots, E_n^*$, сопряженные к ним. Каждому ребру i графа поставим в соответствие элемент $x_i \in E_i$. Пусть заданы ненулевые векторы:

$$a=(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \bigtimes_{i=1}^{n} E_i \text{ и } a^* = (a_1^*, \ldots, a_n^*) \in \bigtimes_{i=1}^{n} E_i^*.$$

Элемент $x=(x_1, \ldots, x_n) \in \bigtimes_{i=1}^{n} E_i$ называется a^*-потоком на G, если $a^* \circ x = (a_1^*(x_1), \ldots, a_n^*(x_n)) \in \Phi_n$.

Элемент $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*) \in \bigtimes_{i=1} E_i^*$ называется a-напряжением на G, если $x^* \circ a = (x_1^*(a_1), \ldots x_n^*(a_n)) \in \Phi$.

Для заданных a^* и a обозначим через $X_{a^*} \subset \bigtimes_{i=1}^{n} E_i$ множество a^*-потоков и через $X_a^* \subset \bigtimes_{i=1}^{n} E_i^*$ множество a-напряжений. Непосредственно из определения следует, что X_{a^*} и X_a^* являются линейными пространствами.

Если $E_1 = \ldots = E_n = E$, $a_1^* = a_2^* = \ldots = a_n^* = a_0^* \neq 0$ и $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a_0 \neq 0$, получаем понятие потока и напряжения, рассмотренные в [5]. В этом случае обозначаем пространство потоков и напряжений соответственно через $X_{a_0^*}$ и $X_{a_0}^*$.

Пусть

$$X_0 \bigcap_{a_0^* \neq 0} X_{a_0^*} \left(X_0^* = \bigcap_{a_0 \neq 0} X_{a_0}^*\right), \text{ т. е.}$$

$$x \in X_0 (x^* \in X_0^*)$$

тогда и только тогда, когда при $a_0^* \neq 0$ $a_0^* \in E^*$ $(a_0 \neq 0,\ a_0 \in E)$ имеет место