ЛИТЕРАТУРА

1. Полевиков В. К.— В сб.: Материалы 3-ей Всесоюзной школы-семинара по магнитным жидкостям. М., 1983, с. 196.
2. Полевиков В. К., Будник А. М.— В сб.: Магнитные жидкости: Научные и прикладные исследования. Минск, 1983.
3. Берковский Б. М., Полевиков В. К.— Магнитная гидродинамика, 1983, № 4.
4. Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д. Гидромеханика невесомости.— М., 1976.
5. Самарский А. А. Теория разностных схем.— М., 1977.
6. Washforth F., Adams J. C. An attempt to test theories of capillarity action.— Cambridge, 1883.

УДК 62-50:519.2

В. И. МАЛЮГИН

ОБ ОЦЕНИВАНИИ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ С СУЩЕСТВЕННО ЗАВИСИМЫМИ КОМПОНЕНТАМИ

1. Постановка задачи. Одной из наиболее распространенных в приложениях оценок многомерной плотности вероятностей является оценка Розенблатта — Парзена с многомерным гауссовским ядром, имеющая вид [1]:

$$\hat{f}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_N(x/X_i, h^2 H), \quad (1)$$

где $A = \{X_i : X_i \in R^N, i = \overline{1, n}\}$ — случайная выборка наблюдений из распределения вероятностей с неизвестной плотностью $f(x)$; $n_N(x|a, B)$ — N -мерная гауссовская плотность со средним a и ковариационной матрицей B ; $h = h(n)$ — коэффициент размытости, удовлетворяющий при $n \rightarrow \infty$ условиям:

$$h \rightarrow 0, nh^N \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Пусть $X = (x_1, \dots, x_N)^T \in R^N$ — случайный вектор с существенно зависимыми компонентами [2]: $T(X) = x_1 - \varphi(\bar{X}) = \xi$. Здесь ξ — гауссовская случайная величина с нулевым средним и достаточно малой дисперсией σ^2 ; $\bar{X} = (x_2, \dots, x_N)^T$ — не зависящий от ξ случайный вектор, равномерно распределенный в параллелепипеде $G \subset R^{N-1}$; $\varphi(\bar{X})$ — неизвестная, достаточно гладкая в области G функция. Таким образом, плотность вероятностей $f(x)$ случайного вектора X имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\text{mes}_{N-1} G} I_G(\bar{x}) n_1(T(x)/0, \sigma^2), \quad (3)$$

где $\text{mes}_{N-1} G$, $I_G(\bar{x})$ — мера Лебега ($N-1$ -мерный объем) и индикаторная функция области G соответственно. Очевидно, $\text{mes}_{N-1} G = \prod_{j=2}^N \text{mes}_1 G_j$, где $\text{mes}_1 G_j$ — длина интервала, на котором определена компонента x_j вектора X . Для плотности вида (3) характерно то, что при $\sigma^2 \rightarrow 0$ она «концентрируется вблизи» $N-1$ -мерной гиперповерхности Γ , определяемой уравнением $T(x) = 0$.

В настоящей статье исследуется проблема выбора матрицы H , $|H| > 0$, возникающая при построении оценки (1) по выборке A ограниченного объема [3]. Предлагается в качестве H использовать не фиксированную матрицу [4], а специальным образом построенные статистики. Для оценки (1) с оцениваемой по выборке матрицей H предлагается способ построения коэффициентов размытости.

2. Меры точности оценки плотности. Введем обозначения: $S, S^{(i, m)} = (s_{jk}^{(i, m)})$ — соответственно фиксированная и выборочная (по выборке $A_i = \{X_j, j = \overline{1, n}, j \neq i\}$ объема $m = n - 1$) ковариационные матрицы, причем

$$S^{(i, m)} = \frac{1}{n-2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (X_j - X^{(i)})(X_j - X^{(i)})^T, \quad X^{(i)} = \frac{1}{n-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n X_j, \quad i = \overline{1, n}; \quad (4)$$

$\hat{f}_{n,1}(x)$ и $\hat{f}_{n,2}(x)$ — оценки, получающиеся из (1), если в качестве H используются матрицы S и $\{S^{(i,m)}\}$ соответственно; $b_{n,1}(x)$, $v_{n,1}(x)$, $b_{n,2}(x)$, $v_{n,2}(x)$ — смещение и вариация оценок $\hat{f}_{n,1}(x)$ и $\hat{f}_{n,2}(x)$ соответственно. В качестве мер точности оценок $\hat{f}_{n,l}(\cdot)$ будем использовать функционал

$$B_{n,l} = E \left\{ \left(\frac{b_{n,l}(X)}{\hat{f}(X)} \right)^2 \right\}, \quad (5)$$

характеризующий средний квадрат относительного смещения оценок $\hat{f}_{n,l}(x)$ и функционал

$$U_{n,l} = \int_{RN} v_{n,l}(x) dx \left(\int_{RN} f^2(x) dx \right)^{-1}, \quad (6)$$

известный [1] как относительная глобальная ошибка аппроксимации плотности $f(x)$ оценками $\hat{f}_{n,l}(x)$, $l=1, 2$.

Исследуем вначале проблему выбора H , h в случае, когда уравнение $T(x)=0$ определяет в R^N некоторую $N-1$ -мерную гиперплоскость.

3. Г-гиперплоскость. Пусть $T(X) = \theta^T X = \xi$, θ — фиксированный N -вектор, ξ — определенная выше случайная величина.

Теорема 1. Для мер точности $B_{n,l}$ оценок $\hat{f}_{n,l}(x)$, $l=1, 2$ плотности (3) справедливы асимптотические разложения:

$$B_{n,1} = \frac{1}{2} (\theta^T S \theta / \sigma^2)^2 h^4 + o_1, \quad B_{n,2} = \frac{1}{2} h^4 + o_1, \quad o_1 = o(h^4). \quad (7)$$

Для исследования величины $B_{n,l}$ при всевозможных соотношениях h и σ^2 , которые могут иметь место при оценивании плотности $f(x)$ по выборке ограниченного объема, рассмотрим последовательности однотипных ситуаций, возникающих в предположении, что при $n \rightarrow \infty$ $\sigma^2 = \sigma^2(n) \rightarrow 0$. Обозначим $\beta(n) = h^2(n) / \sigma^2(n)$. Будем говорить, что имеют место последовательности ситуаций типа I, II, III соответственно, если при $n \rightarrow \infty$: $\beta(n) \rightarrow 0$; $\beta(n) \rightarrow \lambda$, $0 < \lambda < \infty$; $\beta(n) \rightarrow \infty$.

Следствие 1. Для ситуаций типа:

$$\begin{array}{lll} \text{I} & B_{n,1} \rightarrow 0, & B_{n,2} \rightarrow 0; \\ \text{II} & B_{n,1} \rightarrow c, & 0 < c < \infty, \quad B_{n,2} \rightarrow 0; \\ \text{III} & B_{n,1} \rightarrow \infty, & B_{n,2} \rightarrow 0. \end{array}$$

Следствие 2. Если $h = n^{-\alpha/N}$, $0 < \alpha < 1$ [3], то для достижения оценками $\hat{f}_{n,1}(x)$, $\hat{f}_{n,2}(x)$ одной и той же точности оценивания: $B_{n,1} = B_{n,2}$ требуются соответственно объемы выборок n_1 , n_2 , связанные соотношением $n_2 = n_1 \cdot \kappa^{-\frac{N}{\alpha}}$, $\kappa = \left(\frac{\theta^T S \theta}{\sigma^2} \right)^2$. Таким образом, если $\sigma^2 \rightarrow 0$ (зависимость компонент вектора X усиливается), то $\kappa \rightarrow \infty$, $n_2 \ll n_1$ и целесообразно использовать модифицированную оценку $\hat{f}_{n,2}(x)$.

Теорема 2. Асимптотическая глобальная ошибка аппроксимации плотности (3) оценкой $\hat{f}_{n,2}(x)$:

$$U_{n,2} = \left(\frac{3}{\pi} \right)^{\frac{1}{2} (N-1)} \cdot h^{-N} n^{-1} + \frac{3}{16} h^4 + o_1. \quad (8)$$

Оптимальный в смысле минимума $U_{n,2}$ коэффициент размытости h_0 с точностью до членов более высокого порядка малости будет:

$$h_0 = h_0(n) = \alpha(N) n^{-\frac{1}{N+4}}, \quad \alpha(N) = \left(\frac{4}{3} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{(N-1)/2} \right)^{\frac{1}{N+4}}. \quad (9)$$

4. Г-нелинейная гиперповерхность. С учетом полученных в п. 3. результатов в случае, когда уравнение $T(x)=0$ определяет в R^N некоторую $N-1$ -мерную нелинейную гиперповерхность, предлагается в качестве H , h использовать локальные статистики, построенные в окрестностях

выборочных точек X_i , $i = \overline{1, n}$. Оптимальный размер окрестности для точки X_i , определяемый количеством k_i попавших в нее точек из выборки A_i , предлагается находить из условия минимума V -статистики Андерсона [5], характеризующей степень множественной корреляции компонент вектора X в окрестности точки X_i :

$$k_i = \arg \min_{N < k < n-1} V^{(i, k)}, \quad V^{(i, k)} = \frac{|S^{(i, k)}|}{n^k}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (10)$$

$$\prod_{j=1}^k s_{jj}^{(i, k)}$$

где оценка $S^{(i, k)} = (s_{ij}^{(i, k)})$ строится, согласно (4), по k ближайшим (из выборки A_i) соседям точки X_i .

С учетом (9), (10), коэффициент размытости h_i для точки X_i предлагается вычислять по формуле $h_i = \alpha(N) \cdot k_i^{-1/(N+4)}$. Оценка плотности $f_{n,3}(x)$, использующая локальные оценки параметров H, h , имеет вид

$$f_{n,3}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_N(x/X_i, h_i^2 S^{(i, k)}).$$

5. Использование оценок плотности в задачах классификации. Оценки $f_{n,1}(x)$ и $f_{n,3}(x)$ использовались для построения обучающих решающих правил (ОРП) классификации случайных векторов с существенно зависимыми компонентами [7]. Численные эксперименты на ЭВМ показывают, что при малом объеме обучающей выборки ОРП, использующее оценку $f_{n,3}(x)$, заметно превосходит ОРП, использующее оценку $f_{n,1}(x)$, как по точности классификации, так и по скорости достижения заданной точности классификации.

Приложение

Доказательство теоремы 1. Известно [2], что

$$b_{n,1}(x) = -\frac{1}{2} \frac{\theta^T S \theta}{\sigma^2} \left(1 - \frac{T^2(x)}{\sigma^2}\right) f(x) h^2 + o_1. \quad (П.1)$$

Учитывая, что $T(X) = \xi$, из (5), (П.1) получаем выражение для $B_{n,1}$.

Пусть $b_{n,1}(x|W)$ — смещение оценки $f_{n,1}(x)$ при условии, что $H=W$, причем W — фиксированная матрица. В силу независимости X_i и $S^{(i,m)}$:

$$b_{n,2}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E \{b_{n,1}(x|S^{(i,m)})\}. \quad (П.2)$$

Так как $\forall i = \overline{1, n}$ статистика $S^{(i,m)}$ является несмещенной оценкой для ковариационной матрицы случайного вектора X , то

$$\theta^T E \{S^{(i,m)}\} \theta = \theta^T E \{(X - E\{X\})(X - E\{X\})^T\} \theta = E \{\xi^2\} = \sigma^2. \quad (П.3)$$

Из (П.1) — (П.3) следует справедливость выражения для $B_{n,2}$.

Доказательство теоремы 2. Известно [2], что

$$v_{n,1}(x) = \frac{f(x)}{(4\pi)^{N/2} |S|^{1/2}} h^{-N} n^{-1} + b_{n,1}^2(x) + o_2, \quad o_2 = o(h^{-N} n^{-1} + h^4). \quad (П.4)$$

Учитывая (П.1), а также выражения для моментов нормального распределения, получаем:

$$\int_{R^N} b_{n,1}^2(x) dx = \frac{3 \text{mes}_{N-1} G}{32 \sqrt{\pi} \sigma^5} (\theta^T S \theta)^2 h^4. \quad (П.5)$$

Тогда из (6), (П.4), (П.5) следует:

$$U_{n,1} = \frac{\sigma \text{mes}_{N-1} G}{(4\pi)^{(N-1)/2} |S|^{1/2}} h^{-N} n^{-1} + \frac{3}{16} \left(\frac{\theta^T S \theta}{\sigma^2}\right)^2 h^4 + o_2. \quad (П.6)$$

Пусть $U_{n,1}(W)$ — значение меры точности $U_{n,1}$ оценки $f_{n,1}(x)$ при условии, что $H=W$, тогда по аналогии с (П.2):

$$U_{n, 2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E \{U_{n, 1}(S^{(i, m)})\}. \quad (\text{П.7})$$

Из вида зависимости компонент вектора X следует, что $|S^{(i, m)}| = \sigma_i^2 \prod_{j=2}^N s_{jj}^{(i, m)}$, где σ_i^2 — несмещенная оценка σ^2 по выборке A_i . В силу независимости ξ и $\bar{X}$, учитывая свойства функций от моментов [6], получаем:

$$E \{|S^{(i, m)}|^{-\frac{1}{2}}\} = \frac{12^{(N-1)/2}}{\sigma \text{mes}_{N-1} G} + o(n^{-1}). \quad (\text{П.8})$$

Согласно (4),

$$E \{(\theta^T S^{(i, m)} \theta)^2\} = E \{\sigma_i^4\} = \sigma^4 + o(n^{-1}). \quad (\text{П.9})$$

С учетом (П.6)—(П.9) получаем (8). Для доказательства (9) продифференцируем правую часть (8) по h и приравняем полученное выражение нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. Епанечников В. А.— Теория вер. и ее применен., 1969, т. 14, № 1.
2. Малюгин В. И. Непараметрическая классификация многомерных наблюдений в случае существенно зависимых признаков.— Рукопись деп. в ВИНТИ, № 5548—82. Деп. от 10.11.82.
3. Фукунага К. Введение в статистическую теорию распознавания образов.— М., 1979.
4. Раудис Ш. Ю.— В сб.: Стат. пробл. управл. Вильнюс, 1978, вып. 27.
5. Андерсон Т. Введение в многомерный статистический анализ.— М., 1983.
6. Крамер Г. Математические методы статистики.— М., 1975.
7. Харин Ю. С., Казаларский И. Х.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1979, № 3.

УДК 519.10

Р. ГАБАСОВ, Ф. М. КИРИЛЛОВА, О. И. КОСТЮКОВА

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С КONTИНУУМОМ ОГРАНИЧЕНИЙ

1. Рассмотрим задачу

$$c'x \rightarrow \max, \quad b_*(t) \leq a'(t)x \leq b^*(t), \quad (1)$$

$$t \in T = [0, t^*], \quad d_* \leq x \leq d^*,$$

где $x = x(J) \in R^n$, $J = \{1, 2, \dots, n\}$, $a(t) = Hf(t)$,

$$\dot{f} = Bf, \quad f(0) = f_0, \quad f \in R^m; \quad b_*(t) = g_*' v(t), \quad \dot{v} = G_* v, \quad v(0) = v_0,$$

$$v \in R^l; \quad b^*(t) = g^{*'} w(t), \quad \dot{w} = G^* w, \quad w(0) = w_0, \quad w \in R^k.$$

Вектор x , удовлетворяющий ограничениям задачи (1), назовем планом. Решение x^0 задачи — оптимальный план. Субоптимальным (ε -оптимальным) будем называть такой план x^ε , что $c'x^0 - c'x^\varepsilon \leq \varepsilon$.

Совокупность $K_{\text{оп}} = \{T_{\text{оп}}, J_{\text{оп}}\}$, $|T_{\text{оп}}| = |J_{\text{оп}}|$, из множества изолированных точек $T_{\text{оп}} \subset T$ и множества индексов $J_{\text{оп}} \subset J$ назовем опорой задачи (1), если не вырождена опорная матрица $A_{\text{оп}} = A(T_{\text{оп}}, J_{\text{оп}}) = \begin{pmatrix} a_j(t), & j \in J_{\text{оп}} \\ t \in T_{\text{оп}} \end{pmatrix}$.

Пара $\{x, K_{\text{оп}}\}$ из плана и опоры — опорный план. Опорный план считается невырожденным, если $d_{*j} < x_j < d_j^*$, $j \in J_{\text{оп}}$, $b_*(t) < a'(t)x < b^*(t)$, $t \in T \setminus T_{\text{оп}}$.

2. Пусть $\{x, K_{\text{оп}}\}$ — начальный опорный план; по нему подсчитаем