



УДК 621.372.8

А. Д. ТИТОВ, А. П. ХАПАЛЮК

ГИБРИДНЫЕ НАПРАВЛЯЕМЫЕ МОДЫ
АСИММЕТРИЧНОГО ПЛОСКОГО ПРОЗРАЧНОГО ВОЛНОВОДА

В работах [1, 2] изучались гибридные направляемые НЕ- и ЕН-моды асимметричного плоского диэлектрического волновода (ПДВ) в общем случае комплексности показателей преломления $N_j = n_j - i\kappa_j$ слоя ($j=1$), покрытия ($j=2$) и подложки ($j=3$). Направляемыми считались моды, у которых нет утечки энергии за пределы волноведущей сердцевины. Показано, что условия направляемости существенно различны для НЕ- и ЕН-мод. Только в случае отсутствия поглощения (усиления) в сердцевине ($\kappa_1=0$) они совпадают и могут быть записаны в виде системы двух уравнений:

$$e_{1x} \frac{\operatorname{ch}(\xi)}{\operatorname{sh}(\xi)} \frac{\operatorname{sh}(kdn_1e_{2x})}{\operatorname{ch}(kdn_1e_{2x})} \mp e_{2x} \frac{\cos(\zeta)}{\sin(\zeta)} \frac{\sin(kdn_1e_{1x})}{\cos(kdn_1e_{1x})} = 0, \quad (1)$$

где d — толщина слоя; $k = \omega/c$ — волновое число в вакууме; $\vec{e} = \vec{e}_1 + i\vec{e}_2$ — комплексный единичный вектор волновой нормали; ось x нормальна к границам; вдоль оси z имеет место режим бегущей волны и

$$\operatorname{th}(\xi + i\zeta) = n_1 e_x \frac{f \sqrt{n_2^2 - n_1^2(1 - e_x^2)} - g \sqrt{n_3^2 - n_1^2(1 - e_x^2)}}{n_1^2 e_x^2 - fg \sqrt{n_2^2 - n_1^2(1 - e_x^2)} \sqrt{n_3^2 - n_1^2(1 - e_x^2)}}.$$

Здесь $f=g=1$ для НЕ- и $f=(n_1/n_2)^2$, $g=(n_1/n_3)^2$ для ЕН-мод. В [1] показано, что для направляемых НЕ-мод всегда можно построить универсальные дисперсионные кривые [3, 4], из которых и определяются все возможные модовые решения. Для направляемых ЕН-мод в общем случае наличия поглощения (усиления) таких зависимостей построить нельзя [2]. Покажем, что это возможно в случае прозрачности сред ($\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 0$), когда дисперсионные уравнения можно записать в виде

$$\operatorname{tg}(kd n_1 e_x) = i n_1 e_x \frac{f \sqrt{n_2^2 - n_1^2(1 - e_x^2)} + g \sqrt{n_3^2 - n_1^2(1 - e_x^2)}}{n_1^2 e_x^2 + fd \sqrt{n_2^2 - n_1^2(1 - e_x^2)} \sqrt{n_3^2 - n_1^2(1 - e_x^2)}}. \quad (2)$$

Задача нахождения направляемых ЕН-модовых решений свелась к решению системы трех (одного комплексного (2) и одного действительного (1)) трансцендентных уравнений относительно трех действительных величин e_{1x} , e_{2x} и kd . Вид этих уравнений сохранится, если одновременно изменить знаки e_{1x} и e_{2x} или знаки ξ и ζ , поэтому при их исследовании всегда можно ограничиться неотрицательными значениями e_{1x} и ξ (или e_{2x} и ζ , если $e_{1x}=0$ и $\xi=0$). Уравнения Максвелла и граничные условия не позволяют уточнить знаки корней в правой части (2) [5]. Как и в [1, 2], исследуем возможность реализации направляемых мод для

обоих знаков. Моды, поля которых затухают вне сердцевины при $|x| \rightarrow \infty$, будем называть собственными направляемыми модами; моды с возрастающими полями, не удовлетворяющие условию излучения Зоммерфельда, — несобственными направляемыми модами (экспоненциальное нарастание полей в подложке и в покрытии), несобственными направляемыми модами подложки (экспоненциальное нарастание полей в подложке и затухание в покрытии) и несобственными направляемыми модами покрытия (экспоненциальное нарастание полей в покрытии и затухание в подложке) [6—8], опуская, где это возможно, термин «направляемые». Неравенства $\text{Im} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 (1 - e_x^2)} < 0$ и $\text{Im} \sqrt{n_3^2 - n_1^2 (1 - e_x^2)} < 0$ отвечают собственным, противоположные — различным несобственным модам. Верхнее уравнение (1) имеет ненулевые корни относительно kd только в двух случаях [9]: 1) $e_{2x} = 0, e_{1x} > 0$ (скользящее затухание) и 2) $e_{1x} = 0, e_{2x} > 0$ (скользящее распространение волн [10]).

Скользящее затухание. В этом случае нижнее уравнение (1) выполняется только при $\xi = 0$. Тогда дисперсионное уравнение EH-мод (2) имеет смысл при условии

$$e_{1x}^2 \leq \min \left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2}, \frac{n_1^2 - n_3^2}{n_1^2} \right), \quad (3)$$

согласно которому волноведущая сердцевина должна быть оптически плотнее подложки и покрытия (в дальнейшем без ограничения общности считаем $n_3 > n_2$). При выполнении (3) уравнение (2) становится действительным уравнением относительно параметров e_{1x} и kd . По аналогии с [1, 3, 9], перейдя к нормированным параметрам, уравнение (2) для EH-мод можно представить в удобном для графического анализа виде:

$$V \sqrt{A} = p\pi - \arctg \left[b \sqrt{\frac{1-A}{A}} \right] - \arctg \left[\frac{b}{1+a(1-b)} \sqrt{\frac{1-A+a}{A}} \right], \quad (4)$$

где $p = 0, 1, 2, \dots$ — модовое число; $V = kd \sqrt{n_1^2 - n_3^2} \geq 0$ — нормированная толщина (частота) ПДВ (параметр волновода); $A = n_1^2 e_{1x}^2 / (n_1^2 - n_3^2)$ — нормированный поперечный показатель преломления (фазовый параметр); ($0 \leq A \leq 1$), $a = (n_3^2 - n_2^2) / (n_1^2 - n_3^2)$ — степень асимметрии волноводной структуры; $b = (n_1/n_3)^2$ — фактор направляемости; отрицательные значения корней в правой части отвечают дисперсионному уравнению собственных, положительные — различных несобственных мод. Величина a принимает значения от нуля (симметричный ПДВ: $n_2 = n_3$) до бесконечности при сильной асимметрии (слабонаправляющий волновод: $n_1 \approx n_3 \gg n_2$ [4]). Величина b принимает значения от единицы (направляющая поверхность [7]) до $1 + 1/a$. В отличие от направляемых HE-мод [1] в уравнении (4), помимо V и a , есть еще один независимый параметр b , необходимый для представления общей волноводной структуры [3]. По сравнению с симметричным ПДВ [9, 11] имеются два дополнительных параметра (a и b). На рис. 1 представлены дисперсионные зависимости $A = A(V)$ для различных степеней асимметрии и факторов направляемости. При $a \rightarrow \infty$ (для заданного b) имеет место вырождение по модовому числу p и кривые собственных и несобственных мод покрытия попарно сливаются (с разными p); аналогичная ситуация имеет место для несобственных мод и несобственных мод подложки. Поэтому при увеличении степени асимметрии свойство направляемости ПДВ уменьшается (полное отражение на границах выполняется для все меньшего диапазона углов падения [4, 12]). При $b \rightarrow 1 + 1/a$ (для заданного a) отмечается аналогичное вырождение по модовому числу p . Очевидно, что в асимметричном ПДВ, в отличие от симметричного [9, 11, 13], при скользящем затухании все собственные моды имеют критическую длину волны (критическую минимальную толщину волновода) [1]. Волноводный

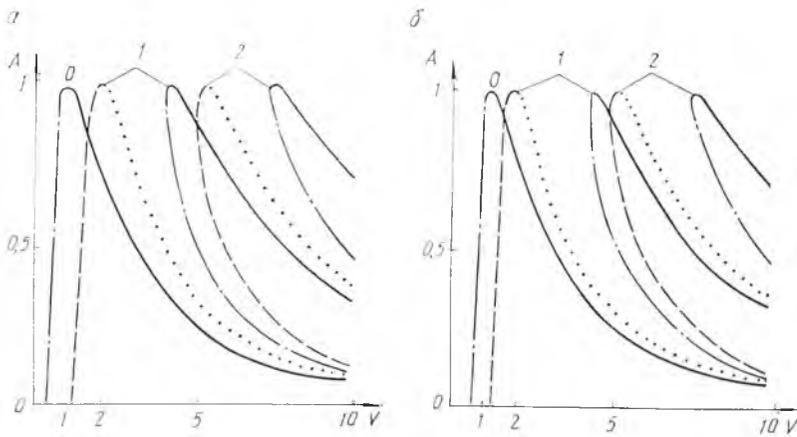


Рис. 1. Случай скользящего затухания:

$a = a=1, v=1,3$; $b = a=3, v=1,1$. Сплошные линии — дисперсионные кривые собственных, штриховые — несобственных мод, штрихпунктирные — несобственных мод покрытия. Цифры отвечают номерам мод

эффект для всех типов мод наблюдается только при длине волны, большей некоторого минимального значения (для заданной толщины). При меньших длинах волн асимметричный слой не может удерживать электромагнитную энергию [12]. Условие отсечки собственных мод (верхний знак, $p=0, 1, 2, \dots$) и несобственных мод покрытия (нижний знак, $p=1, 2, \dots$) имеет вид $V_p = p\pi \pm \text{arctg} \left[\frac{bV\bar{a}}{1+a(1-b)} \right]$. В этих точках можно аналитически получить решения: $kd = V_p / \sqrt{n_1^2 - n_3^2}$, $e_x = \sqrt{n_1^2 - n_3^2} / n_1$. Условие отсечки несобственной моды первого порядка (верхний знак) и несобственной моды подложки нулевого порядка (нижний знак) определяется выражением: $V = 1/b \left[1 \pm \frac{1+a(1-b)}{\sqrt{1+a}} \right]$; этим точкам соответствует тривиальное решение $e_x = 0$. Условия отсечки остальных несобственных мод нельзя выразить аналитически: они определяются путем совместного решения (4) и уравнения $V'(A) = 0$. С ростом a (для фиксированного b) величина отсечки увеличивается для собственных мод и несобственных мод подложки и уменьшается для несобственных мод и несобственных мод покрытия. С ростом b (для фиксированного a) характер поведения величин отсечки такой же.

Скользящее распространение. В этом случае нижнее уравнение (1) выполнимо только при $\xi = 0$. Тогда дисперсионное уравнение ЕН-мод (2) имеет смысл при условии

$$e_{2x}^2 \geq \max \left(\frac{n_2^2 - n_1^2}{n_1^2}, \frac{n_3^2 - n_1^2}{n_1^2} \right), \quad (5)$$

которое накладывает на показатели преломления сред менее жесткое требование, чем при скользящем затухании (3): если сердцевина оптически плотнее подложки ($n_1 > n_3$) и покрытия ($n_1 > n_2$), условие (5) не ограничивает значения e_{2x} . При выполнении (5) уравнение (2) становится действительным уравнением относительно e_{2x} и kd и имеет смысл ввиду ограниченности функции гиперболического тангенса в двух случаях: $n_1 > n_2, n_1 > n_3$ или $n_1 < n_2, n_1 < n_3$ (как и прежде $n_3 > n_2$):

$$\begin{aligned} V\sqrt{A} &= \text{arth} \left[\frac{1}{b} \sqrt{\frac{A}{1+A}} \right] + \text{arth} \left[\frac{1+a(1-b)}{b} \sqrt{\frac{A}{1+a+A}} \right], \\ V\sqrt{A} &= \text{arth} \left[b \sqrt{\frac{A-1}{A}} \right] + \text{arth} \left[\frac{b}{1+a(1-b)} \sqrt{\frac{A-1+a}{A}} \right], \end{aligned} \quad (6)$$

где новые нормированные величины $V = kd \sqrt{|n_1^2 - n_3^2|} \geq 0$, $A = n_1^2 e_{2x}^2 / |n_1^2 - n_3^2| \geq 0$, $a = (n_3^2 - n_2^2) / |n_1^2 - n_3^2|$, $b = (n_1/n_3)^2$ и отрицательные

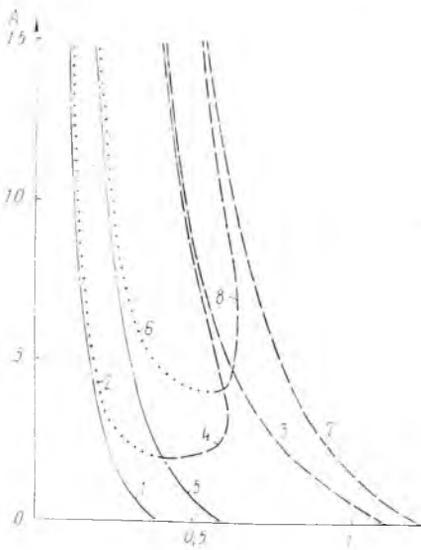


Рис. 2. Случай скользящего распространения. Цифрами обозначены дисперсионные кривые:

1, 3 — $a = 1$, $b = 1.1$; 2, 4 — $a = 1$, $1/b = 1.1$; 5, 7 — $a = 3$, $b = 1.3$; 6, 8 — $a = 3$, $1/b = 1.3$

симметричного ПДВ ($a \rightarrow 0$) кривые 1, 2, 5, 6 сливаются с осью ординат, кривые 4, 8 переходят в дисперсионную кривую несобственной симметричной, а кривые 3, 7 — несобственной антисимметричной моды [11]. При $b \rightarrow 1 + 1/a$ или $1/b \rightarrow 1 + 1/a$ (для фиксированного a) имеет место аналогичное вырождение. Очевидно, что в случае скользящего распространения волноводный эффект имеет место только при длине волны, меньшей некоторого критического значения (для заданной толщины). При больших длинах волн асимметричный ПДВ не может удерживать электромагнитную энергию для таких мод. В случае $n_1 > n_2$, $n_1 > n_3$ условие отсечки несобственной моды (верхний знак) и несобственной моды подложки (нижний знак) имеет вид: $V \frac{1}{b} \left[1 \pm \frac{1+a(1-b)}{\sqrt{1+a}} \right]$; в этих точках имеет тривиальное решение $e_x = 0$. В случае $n_1 < n_2$, $n_1 < n_3$ условие отсечки нельзя выразить аналитически: оно определяется путем совместного решения второго уравнения (6) и уравнения $V'(A) = 0$.

Условия (3) и (5) приводят к тому, что поперечное волновое число части поля вне ПДВ принимает только чисто мнимые значения:

$$KN_2 e_x^* = ik \sqrt{n_1^2 - n_2^2 \mp n_1^2 \begin{pmatrix} e_{1x}^2 \\ e_{2x}^2 \end{pmatrix}} \quad \text{и} \quad KN_3 e_x^* = ik \sqrt{n_1^2 - n_3^2 \mp n_1^2 \begin{pmatrix} e_{1x}^2 \\ e_{2x}^2 \end{pmatrix}}$$

и, следовательно, волны являются поверхностными. Как известно [7], только для поверхностных волн полный поток мощности, переносимый в направлении оси z , отличен от нуля.

Если совместить рис. 1 и 2, видим, что дисперсионные кривые направляемых ЕН-мод (прозрачные среды) асимметричного ПДВ, как и в случаях [1, 9, 11], в совокупности образуют замкнутую фазовую траекторию в двумерном пространстве независимых параметров V и A , причем эти параметры принимают все возможные значения от нуля до бесконечности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Титов А. Д., Хапалюк А. П.—Изв. вузов СССР. Радиофизика, 1983, т. 26, № 10, с. 1315.
1. Титов А. Д., Хапалюк А. П.—Изв. вузов СССР. Радиофизика, 1984, т. 27, № 1, с. 126.
3. Kogelnik H., Ramaswamy V.—Appl. Opt., 1974, v. 13, № 8, p. 1857.
4. Унгер Х.-Г. Планарные и волоконные оптические волноводы.—М., 1980.
5. Кириленко А. И., Титов А. Д., Хапалюк А. П. Неоднозначность матриц отражения и прохождения плоских неоднородных волн.—Рукопись деп. в ВИНТИ № 1926-78. Деп. от 13.06.78.
6. Шевченко В. В.—Радиотехника и электроника, 1969, т. 14, № 10, с. 1768.
7. Шевченко В. В. Плавные переходы в открытых волноводах.—М., 1969.
8. Шевченко В. В.—Изв. вузов СССР. Радиофизика, 1972, т. 15, № 2, с. 257.
9. Титов А. Д., Хапалюк А. П.—Изв. вузов СССР. Радиофизика, 1983, т. 26, № 4, с. 455.
10. Кириленко А. И., Титов А. Д., Хапалюк А. П.—Изв. вузов СССР. Радиофизика, 1981, т. 24, № 4, с. 511.
11. Титов А. Д., Хапалюк А. П.—Вести. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 2, с. 3.
12. Гончаренко А. М., Редько В. П. Введение в интегральную оптику.—Минск, 1975.
13. Титов А. Д., Хапалюк А. П.—Изв. вузов СССР. Радиофизика, 1983, т. 26, № 5, с. 593.

УДК 548.0539

В. Г. БАРЫШЕВСКИЙ, О. Н. МЕТЕЛИЦА

УГЛОВЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ γ -КВАНТОВ РАСПАДА ПОЗИТРОНИЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Если поместить позитроний в магнитное поле, возникает новое явление — затухающие биения углового распределения γ -квантов трехфотонного распада позитрония [1, 2]. В этом случае непосредственно измеряется распределение направлений импульсов образованных γ -квантов, а не распределение нормали к плоскости распада, как в [3]. Метод исследования вещества, основанный на этом явлении, позволяет изучать вращение и деполаризацию спина позитрония. В настоящей работе найдено временное распределение направлений импульсов γ -квантов.

Энергия, выделяющаяся при аннигиляции атома, значительно больше энергии кулоновского взаимодействия электрона и позитрона в позитронии, поэтому для нахождения амплитуды распада можно применить импульсное приближение. Тогда точный матричный элемент трехквантового распада позитрония заменяется амплитудой аннигиляции свободной электрон-позитронной пары, вычисленной в пределе нулевых скоростей частиц.

Перемножим в выражении для амплитуды аннигиляции свободной пары [4] матрицы Дирака и перейдем к матрицам Паули. Используя явный вид спиновых функций позитрония [5], получим:

$$M_{11} = \frac{(4\pi)^{3/2} e^3}{m} (u_y - iu_x), \quad M_{1-1} = \frac{(4\pi)^{3/2} e^3}{m} (u_y + iu_x), \quad (1)$$

$$M_{10} = \frac{(4\pi)^{3/2} e^3}{m} (\sqrt{2} iu_z),$$

где $\bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \bar{u}_3$, $\bar{u}_i = \bar{e}_i (\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_3 - \bar{a}_2 \cdot \bar{a}_3) + \bar{a}_1 (\bar{e}_2 \cdot \bar{a}_3 + \bar{e}_3 \cdot \bar{a}_2)$, \bar{e}_i , \bar{k}_i , ω_i — поляризация, импульс и частота i -го фотона, $\bar{a}_i = \bar{e}_i \times \bar{n}_i$, $\bar{n}_i = \frac{\bar{k}_i}{\omega_i}$; \bar{u}_2 и \bar{u}_3 получаются из \bar{u}_1 с помощью циклической перестановки индексов. M_{113} — амплитуда аннигиляции позитрония с полным спином 1 и проекцией спина 1₃; $M_{00} = 0$, что и следовало ожидать из соображений симметрии. Квадрат матричного элемента (1) совпадает с известным выражением [6].

Зависящая от времени волновая функция произвольного состояния