

Краткие сообщения

УДК 7.926.7

О. А. КАСТРИЦА

О ПОСТРОЕНИИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ МАТРИЧНОЙ ФУНКЦИИ

Пусть A — матрица $n \times n$ с элементами $a_{ij} \in C$, $i, j = 1, \dots, n$ и $g(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{m_s}$ — ее минимальный многочлен. Рассмотрим аналитическую функцию f , для которой определены значения $f(\lambda_i)$, $f'(\lambda_i)$, \dots , $f^{(m_i-1)}(\lambda_i)$, $i=1, \dots, s$, называемые значениями функции f на спектре матрицы A . Матрица $f(A)$ определяется [1, с. 104], [2, с. 158], [3, с. 678] как значение при $\lambda = A$ некоторого многочлена $r: \lambda \rightarrow r(\lambda)$, принимающего на спектре матрицы A те же значения, что и f , т. е. $f(A) = r(A)$. Нахождение коэффициентов многочлена r требует в общем случае значительных вычислительных затрат. В частности, если все корни минимального многочлена простые, то $r(\lambda)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа, т. е. $r(A) = \sum_{k=1}^s \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^s \frac{A - \lambda_i E}{\lambda_k - \lambda_i} f(\lambda_k)$, [1, с. 108].

Для получения интерполяционных формул в иных случаях используем представление $f(A)$ в виде [1, с. 111]

$$f(A) = \sum_{k=1}^s \sum_{j=0}^{m_k-1} f^{(j)}(\lambda_k) Z_{kj}, \quad (1)$$

где Z_{kj} — компоненты матрицы A . Матрицы Z_{kj} определяются только матрицей A и не зависят от функции f . Это позволяет определить Z_{kj} , $k=1, \dots, s$, $j=0, \dots, (m_k-1)$, используя набор вспомогательных функций специального вида, значение которых на матрице A может быть легко вычислено непосредственно.

Будем считать, что $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_s$. Полагая в (1) $f(\lambda)$ последовательно равным $(\lambda - \lambda_1)^p$, $p=0, 1, \dots, (m_1-1)$, получим систему, которую после преобразования можно представить в виде

$$(A - \lambda_1 E)^p = p! Z_{1p} + \sum_{j=0}^p \frac{p!}{j!} \sum_{\substack{k \geq 2 \\ m_k > p+1-j}} (\lambda_k - \lambda_1)^j Z_{k(p-j)},$$

$$p = 0, 1, \dots, (m_1 - 1). \quad (2)$$

Выразим из (2) компоненты Z_{1j} , $j=0, \dots, (m_1-1)$ и подставим в (1). После группировки коэффициентов при Z_{kj} , $k \neq 1$, $j=0, \dots, (m_k-1)$, получим

$$f(A) = \sum_{j=0}^{m_1-1} \frac{f^{(j)}(\lambda_1)}{j!} (A - \lambda_1 E)^j + \sum_{k=2}^s \sum_{j=0}^{m_k-1} \left[f^{(j)}(\lambda_k) - \sum_{i=0}^{m_1-j-1} \frac{f^{(j+i)}(\lambda_1)}{i!} (\lambda_k - \lambda_1)^i \right] Z_{kj}. \quad (3)$$

Если $m_2 = \dots = m_s = 0$, то из (3) получаем интерполяционную формулу

$$f(A) = \sum_{j=0}^{m_1-1} \frac{f^{(j)}(\lambda_1)}{j!} (A - \lambda_1 E)^j. \quad (4)$$

Обозначим

$$\varphi(\lambda) = f(\lambda) - \sum_{j=0}^{m_1-1} \frac{f^{(j)}(\lambda_1)}{j!} (\lambda - \lambda_1)^j. \quad (5)$$

Тогда формула (3) запишется в виде

$$\varphi(A) = \sum_{k=2}^s \sum_{j=0}^{m_k-1} \varphi^{(j)}(\lambda_k) Z_{kj}. \quad (6)$$

Формула (6) справедлива для любой функции φ , задаваемой выражением (5), где f — произвольная функция, аналитическая в области, содержащей $\lambda_1, \dots, \lambda_s$.

Пусть $\varphi_k(\lambda) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^s (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$, $k = 2, \dots, s$. Для нахождения компонент Z_{kj} , $k \neq 1$, $j = 0, \dots, (m_k - 1)$, используем вспомогательные функции $\varphi_{kl}(\lambda) = (\lambda - \lambda_k)^l \cdot \varphi_k(\lambda)$, $k = 2, \dots, s$, $l = 0, \dots, (m_k - 1)$. Поскольку $\varphi_{kl}^{(j)}(\lambda_1) = 0$, $j = 0, \dots, (m_1 - 1)$, то, подставляя в (5) $\varphi_{kl}(\lambda)$ вместо $f(\lambda)$, получим $\varphi(\lambda) = \varphi_{kl}(\lambda)$. Это означает, что функции $\varphi_{kl}(\lambda)$ можно подставлять в (6) вместо $\varphi(\lambda)$. При этом приходим к системе, позволяющей определить все компоненты Z_{kj} , $k \neq 1$. Заметим, что $\varphi_{kl}^{(j)}(\lambda_i) = 0$, $i \neq k$, $j = 0, \dots, (m_i - 1)$. Поэтому, фиксируя k и подставляя в (6) вспомогательные функции $\varphi_{kl}(\lambda)$, $l = 0, \dots, (m_k - 1)$, получим систему, содержащую только неизвестные Z_{kj} , $j = 0, \dots, (m_k - 1)$. В то же время $\varphi_{kl}^{(j)}(\lambda_k) = 0$, если $j < l$ и

$$\varphi_{kl}^{(j)}(\lambda_k) = \frac{j!}{(j-l)!} \varphi_k^{(j-l)}(\lambda_k), \quad l \leq j \leq (m_k - 1). \quad (7)$$

Учитывая (7), получаем систему

$$(A - \lambda_k E)^l \varphi_k(A) = \sum_{j=l}^{m_k-1} \frac{j!}{(j-l)!} \varphi_k^{(j-l)}(\lambda_k) Z_{kj}, \quad l = 0, 1, \dots, (m_k - 1). \quad (8)$$

Итак, для группы компонент, соответствующих собственному значению λ_k матрицы A , $k \geq 2$, получаем треугольную систему, из которой Z_{kj} , $j = 0, \dots, (m_k - 1)$, легко определяются. Прделав это для $k = 2, 3, \dots, s$, можно найти все компоненты матрицы A . Это позволяет строить формулы для $f(A)$.

Пример. Пусть $g(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^5 (\lambda - \lambda_2)^2 (\lambda - \lambda_3)$. Тогда $\varphi(\lambda) = f(\lambda) - \sum_{j=0}^4 \frac{f^{(j)}(\lambda_1)}{j!} (\lambda - \lambda_1)^j$; $\varphi_2(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^5 (\lambda - \lambda_3)$; $\varphi_3(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^5 (\lambda - \lambda_2)^2$.

Из системы (8) находим:

$$Z_{21} = \frac{\varphi_2(A) (A - \lambda_2 E)}{\varphi_2(\lambda_2)}; \quad Z_{20} = \frac{\varphi_2(A)}{\varphi_2(\lambda_2)} \left[E - \frac{\varphi_2'(\lambda_2)}{\varphi_2(\lambda_2)} (A - \lambda_2 E) \right];$$

$$Z_{30} = \frac{\varphi_3(A)}{\varphi_3(\lambda_3)}.$$

Поэтому

$$f(A) = \sum_{j=0}^4 \frac{f^{(j)}(\lambda_1)}{j!} (A - \lambda_1 E)^j + \left\{ \varphi(\lambda_2) \frac{\varphi_2(A)}{\varphi_2(\lambda_2)} \left[E - \frac{\varphi_2'(\lambda_2)}{\varphi_2(\lambda_2)} (A - \lambda_2 E) \right] + \right.$$

$$\left. + \varphi'(\lambda_2) \frac{\varphi_2(A)}{\varphi_2(\lambda_2)} (A - \lambda_2 E) \right\} + \varphi(\lambda_3) \frac{\varphi_3(A)}{\varphi_3(\lambda_3)}.$$

Если $m_k, k = 2, \dots, s$, невелики, то формула (3) позволяет строить сравнительно простые интерполяционные формулы для $f(A)$. Вычисление матричных функций по указанному способу может быть осуществлено на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.— М., 1967.
2. Ланкастер П. Теория матриц.— М., 1978.
3. Заде Л., Дезоер Ч. Теория линейных систем.— М., 1970.

УДК 62-506 : 519.272

Г. А. ХАЦКЕВИЧ

ОБ АДАПТИВНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ МНОГОМЕРНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим линейную стационарную стохастическую систему с дискретным временем:

$$x_{k+1} = Ax_k + \omega_k, \quad y_k = Cx_k + v_k, \quad (1)$$

где $y_k \in R^m$, $k = \overline{1, N}$ — наблюдения за поведением системы (1); $x_k \in R^n$ — фазовые состояния системы (1); ω_k, v_k и x_0 — независимые гауссовы случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и известными ковариациями вида: $M\{\omega_k \omega_j^T\} = W \delta_{kj}$, $M\{v_k v_j^T\} = V \delta_{kj}$, $M\{x_0 x_0^T\} = P_0$, δ_{kj} — символ Кронекера, T — оператор транспонирования.

Задача состоит в нахождении неизвестных матричных параметров A и C системы (1) по выходным данным y_1, \dots, y_N .

Для однозначной разрешимости задачи идентификации параметров A, C , следуя [1], представим матрицы A и C в инвариантной канонической форме $A_0 = TAT^{-1}$, $C_0 = CT^{-1}$, где T — матрица наблюдаемости, используемая в качестве преобразования $x'_k = Tx_k$, т. е. $T^T = (c_1 | A^T c_1 | \dots | A^{p_1-1} c_1 | \dots | c_m | \dots | A^{p_m-1} c_m)$. Здесь c_i — i -я строка матрицы C , p_i $i = \overline{1, m}$ есть наименьшее неотрицательное целое такое, что $c_i^T A^{p_i}$ линейно зависит от векторов, предшествующих данному в матрице T . Заметим, что p_i , называемые показателями наблюдаемости [2], удовлетворяют

условию $\sum_{i=1}^m p_i = m$ [2] и считаются априорно заданными.

В дальнейшем условимся производить нахождение оценок на компактном подмножестве параметрического пространства R_c , таком, что 1) A — устойчивая матрица; 2) (A, C) — наблюдаемая пара. Учитывая гауссовое распределение переменных x_k в системе (1), оценим состояния системы с помощью стационарного фильтра Калмана — Бьюси $\hat{x}_{k+1/k} = A_0 \hat{x}_{k/k-1} + B_0 v_k$, где $v_k = y_k C_0 \hat{x}_{k/k-1}$ — процесс обновлений — последовательность гауссовых случайных величин с нулевыми средними и ковариационной матрицей $(C_0 P C_0^T + V) \delta_{kj}$; $B_0 = TB$, где B — коэффициент усиления стационарного фильтра Калмана — Бьюси.

После описанных преобразований система (1) приобретает вид:

$$\hat{x}_{k+1/k} = A_0 \hat{x}_{k/k-1} + B_0 v_k, \quad y_k = C_0 \hat{x}_{k/k-1} + v_k. \quad (2)$$

Величины v_k и $\hat{x}_{k+1/k}$ являются ненаблюдаемыми, а измерению доступны только выходные переменные y_1, \dots, y_N .

Матрицы A_0 и C_0 имеют вид:

$$A_0 = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \dots & A_{mm} \end{pmatrix}_{n \times n}, \quad A_{ii} = \begin{pmatrix} 0 & I_{p_i-1} \\ \beta_{i10} & \dots & \beta_{ii p_i-1} \end{pmatrix}_{p_i \times p_i},$$