Это следствие легко получить из теоремы 1 и описания полурешеток ширины 2, данного в [15].

Теорема 2. Решетка $\Sigma'(S)$ подполурешеток полурешетки S $\bigwedge$-полудистрибутивна тогда и только тогда, когда S есть цепь.

Доказательство. Если S — цепь, то $\Sigma'(S)$ дистрибутивна и потому $\bigwedge$-полудистрибутивна. Обратно, предположим, что $\Sigma'(S)$ $\bigwedge$-полудистрибутивна. Пусть $a, b \in S$ и $a \| b$. Тогда $ab < a$, $ab < b$ и так как $\{a\}$, $\{b\}$, $\{ab\} \in \Sigma'(S)$, из $\{ab\} \cap \{a\} = \{ab\} \cap \{b\} = \varnothing$ должно следовать, что $\{ab\} \cap \langle a, b \rangle = \varnothing$, однако $ab \in \langle a, b \rangle$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Игошин В. И.— В сб.: Упорядоченные множества и решетки. Саратов, 1978, вып. 5, с. 44.
2. Гретцер Г. Общая теория решеток.— М., 1982.
3. Jonsson B.— Can. J. Math., 1961, v. 13, p. 256.
4. Grätzer G., Platt C. R.— Can. J. Math., 1980, v. 32, p. 145.
5. Горбунов В. А.— Алгебра и логика, 1976, т. 15, № 4, с. 436.
6. Papert D.— J. London Math. Soc., 1964, v. 39, № 4, p. 723.
7. Varlet J.— Bull. Soc. roy. sci. Liege, 1965, v. 34, № 5—6, p. 231.
8. Шеврин Л. Н.— Докл. АН СССР, 1961, т. 138, № 1, с. 73.
9. Шеврин Л. Н.— Сиб. матем. ж., 1962, т. 111, № 3, с. 446.
10. Шеврин Л. Н.— Докл. АН СССР, 1963, т. 148, № 2, с. 292.
11. Ego M.— C. r. Acad. Sci., 1961, v. 252, № 17, p. 2490.
12. Ego M.— C. r. Acad. Sci, 1962. v. 254, № 10, p. 1723.
13. Petrich M. Lectures in semigroups.— Akademie — Verlag — Berlin, 1977, S. 168.
14. Hofmann K. H., Mislove M., Stralka A. The Pontryagin Duality of Compact O-Dimensional Semilattices and its Applications.— Berlin — Heidelberg — New York, 1974, p. 122.
15. Sirjaev V. M.— Semigroup Forum, 1976, № 13, p. 149.

УДК 517.544

Т. Н. ЖОРОВИНА

ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА РИМАНА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НА ТОРЕ

Пусть $\mathbf{M} = \mathbf{M}^0 \cup \partial\mathbf{M}$ — любая из следующих фигур в плоскости комплексного переменного z: прямоугольник, ромб, правильный шестиугольник (здесь $\mathbf{M}^0$ — множество внутренних точек рассматриваемых многоугольников, $\partial\mathbf{M}$ — граница); L — линия симметрии $\mathbf{M}$. Обозначим через Λ множество вершин фигуры $\mathbf{M}$, и пусть $\alpha(t)$ — гомеоморфизм пространства $\partial\mathbf{M} \setminus \Lambda$ на себя, сопоставляющий в прямоугольнике и шестиугольнике каждой точке $t \in \partial\mathbf{M} \setminus \Lambda$ ближайшую к ней точку $\alpha(t)$, лежащую на противоположной (параллельной) стороне $\mathbf{M}$, а для ромба с вершинами в точках 0, $P+iK$, $P-iK$, $2P$ под $\alpha(t)$ будем понимать следующую функцию:

$$\alpha(t) = \begin{cases} t + (P \pm iK), & t \in]\,0,\ P \mp iK[, \\ t - (P \pm iK), & t \in]\,P \pm iK,\ 2P[. \end{cases}$$

Рассмотрим краевую задачу:

$$\varphi^+(x) = a\varphi^-(x) + b\overline{\varphi^-(x)} + c,\ x \in L, \qquad (1)$$

$$\varphi[\alpha(t)] = \varphi(t),\ t \in \Sigma_1 \subset d\mathbf{M}, \qquad (2)$$

где $\partial\mathbf{M} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, $\alpha(\Sigma_1) = \Sigma_2$.

Требуется найти все аналитические, ограниченные на $\mathbf{M}$ функции $\varphi(z)$, удовлетворяющие условию (2) на $\partial\mathbf{M}$, H-непрерывно продолжимые на L, где должно выполняться краевое условие (1). Из условия (2) следует, что задача (1)—(2) на $\mathbf{M}$ равносильна краевой задаче (1) на $\mathbf{M}$ в классе двоякопериодических функций (примитивные периоды обозначим через T_1 и T_2) или, что то же самое, задаче (1) на торе $\mathbf{M}_1$, который получается после «склеивания» противоположных (параллельных) сторон фигуры $\mathbf{M}$. Контур L предполагаем таким, что его образ на торе $\mathbf{M}_1$-замкнутая кривая.

Для удобства будем считать, что многоугольник $\mathbf{M}$ расположен в плоскости так, что линия симметрии L лежит на оси абсцисс, а отображение симметрии $p:\mathbf{M}\to\mathbf{M}$ имеет вид $p(z)=\bar{z}$.

Применяя метод симметрии, сведем задачу (1)—(2) к задаче Римана для двух пар функций на торе [2]:

$$F^{+}(x)=GF^{-}(x)+C,\ x\in L, \tag{3}$$

где

$$F(z)=\begin{bmatrix}F_1(z)\\ F_2(z)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varphi(z)\\ \overline{\varphi(\bar{z})}\end{bmatrix},\qquad G=\frac{1}{\bar{a}}\begin{bmatrix}|a|^2-|b|^2 & b\\ -\bar{b} & 1\end{bmatrix}.$$

Из вида вектор-функции $F(z)$ следует, что она должна удовлетворять условию симметрии $\overline{F(\bar{z})}=JF(z)$, где $J=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$.

Задача (3) решается приведением матрицы G к жордановой нормальной форме. Для этого вводится новая неизвестная функция $\Phi(z)=$ $=\begin{bmatrix}\Phi_1(z)\\ \Phi_2(z)\end{bmatrix}$ по правилу $F(z)=S\Phi(z)$, где S — некоторая невырожденная матрица. Подставляя $F(z)=S\Phi(z)$ в (3), получим:

$$\Phi^{+}(x)=[S^{-1}GS]\Phi^{-}(x)+S^{-1}C,\ x\in L. \tag{4}$$

Матрица S выбирается таким образом, чтобы матрица задачи (4) была жордановой, т. е. чтобы выполнялось равенство

$$S^{-1}GS=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ q & \lambda_2\end{bmatrix}, \tag{5}$$

где λ_1, λ_2 — корни характеристического полинома матрицы G,

$$\lambda_{1,2}=\frac{1+|a|^2-|b|^2\pm\sqrt{(1+|a|^2-|b|^2)^2-4|a|^2}}{2\bar{a}},$$

а число q равно нулю, если $\lambda_1\neq\lambda_2$, и равно единице при $\lambda_1=\lambda_2$. Элементы матрицы S находятся из (5). Обозначим $S^{-1}C=\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}$.

Рассмотрим сначала случай, когда $\lambda_1\neq\lambda_2$, $q=0$. Тогда задача (4) равносильна паре скалярных задач Римана на торе:

$$\Phi_1^{+}(x)=\lambda_1\Phi_1^{-}(x)+c_1,\quad x\in L, \tag{6}$$

$$\Phi_2^{+}(x)=\lambda_2\Phi_2^{-}(x)+c_2,\quad x\in L. \tag{7}$$

Из теоремы 1 [1] следует, что число $l_1(l_2)$ решений однородной задачи (6)—(7) для функций совпадает с числом l_1' (l_2') решений союзной однородной краевой задачи для дифференциалов. В нашей задаче реализуется особый случай, и для числа $l_1(l_2)$ известна точная оценка: $0\leqslant l_1\leqslant 1$ $(0\leqslant l_2\leqslant 1)$.

Выберем канонические сечения a_1 и b_1, причем в качестве a_1 возьмем кривую L. Далее, пусть $Q=\int\limits_{a_1}d\tau$, тогда комплексно-нормированный базис пространства абелевых дифференциалов I рода на $\mathbf{M}_1: du(\tau)=\dfrac{d\tau}{Q}$. A- и B-периоды равны:

$$A=\int\limits_{a_1}du(\tau)=1,\qquad B=\int\limits_{b_1}du(\tau)=\frac{1}{Q}\int\limits_{b_1}d\tau.$$

Нормированный базис пространства абелевых интегралов I рода:

$$u(\tau)={}'\int\limits_{z_0}^{\tau}du(t)=\begin{cases}\dfrac{\tau-z_0}{Q}, & \operatorname{Im}\tau>0,\\[2mm] \dfrac{\tau-z_0}{Q}+B, & \operatorname{Im}\tau<0,\end{cases}$$

где z_0 — фиксированная точка, $\operatorname{Im} z_0>0$, а штрих перед интегралом означает, что путь интегрирования не пересекает канонических сечений. Разрывный аналог ядра Коши на $\mathbf{M}_1$ возьмем в виде:

$$d\omega_{z\tilde{z}}(\tau) = [\zeta(\tau - z) - \zeta(\tau - \tilde{z})]d\tau - \frac{d\tau}{Q}\int\limits_L [\zeta(\tau - z) - \zeta(\tau - \tilde{z})]d\tau, \quad (8)$$

где $\tilde{z}$ — фиксированная точка, $\tilde{z} \neq z_0$; $\zeta(z)$ — дзета-функция Вейерштрасса, $\zeta(z) = \zeta(z | T_1, T_2)$. Для (8) выполняется условие комплексной нормированности $\int\limits_{a_1} d\omega_{z\tilde{z}}(\tau) = 0$, кроме того $d\omega_{z\tilde{z}}(\tau) = 0$.

В силу выбора канонических сечений и свойства комплексной нормированности дифференциала (8) общее решение задачи (6)—(7) будем искать в виде [1]:

$$\Phi_{0j}(z) = \varphi_j(z) \exp\{-\int\limits_{z_0}^{z_j} d\omega_{z\tilde{z}}(\tau) + 2\pi i m_j u(z)\}, \quad (9)$$

где эллиптическая функция $\varphi_j(z)$ находится из условия $(I) \mid (\Phi_{0j})$ ((I) — единичный дивизор), а точки z_j и целые числа m_j, n_j — из проблемы обращения Якоби:

$$u(z_j) = \frac{\ln \lambda_j}{2\pi i} + n_j + m_j B \quad (j = 1, 2) \quad (10)$$

(ветвь логарифма выбирается так, что $0 \leqslant \arg \lambda_j < 2\pi$).

Обозначим через $\chi_j(z)$ экспоненту, стоящую в правой части (9). Учитывая особенности $\chi_j(z)$, мы должны подчинить функцию $\varphi_j(z)$ условию $\Delta_j^{-1} \mid (\varphi_j)$, $\Delta_j = z_0 z_j^{-1}$, но так как не существует двоякопериодической функции степени 1, то $\varphi_j(z) \equiv 0$ либо $\varphi_j(z) = \text{const}$ (при $z_j = z_0$), $j = 1, 2$. Выясним условия, при которых $\varphi_j(z) \not\equiv 0$ $(z_j = z_0)$. Из (10) следует, что $z_j = z_0$, если уравнение

$$\frac{\ln \lambda_j}{2\pi i} + n_j + m_j B = 0 \quad (j = 1, 2)$$

разрешимо в целых числах m_j и n_j. Последнее имеет место, если

$$\frac{\ln |\lambda_j|}{2\pi \operatorname{Im} B} \in \mathbf{Z}, \qquad \frac{\arg \lambda_j}{2\pi} + \frac{\ln |\lambda_j|}{2\pi} \cdot \frac{\operatorname{Re} B}{\operatorname{Im} B} \in \mathbf{Z}. \quad (11)$$

Рассмотрим возможные варианты для λ_j и z_j $(j = 1, 2)$.

1) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 \neq 1$. Этот случай имеет место, когда $1 + |a|^2 - |b|^2 = 2 \operatorname{Re} a$, $\operatorname{Im} a < 0$, причем тогда $\lambda_2 = \frac{a}{\bar{a}}$.

Условия (11) выполняются для λ_1 и не выполняются для λ_2, следовательно, однородная задача (6)—(7) имеет решение вида: $\Phi_{01}(z) = k$, $\Phi_{02}(z) = 0$ (k — произвольная постоянная).

Неоднородная задача (6)—(7) разрешима лишь при $c_1 = 0$ и любом $c_2 \neq 0$, и для нахождения ее решения достаточно знать частное решение задачи (7). Последняя безусловно разрешима (так как $l_2 = l_2' = 0$), и ее частное решение строится в виде [1]:

$$\tilde{\Phi}_2(z) = \frac{c_2 \cdot \chi_2(z)}{2\pi i} \int\limits_L \frac{A_2(\tau, z)}{\chi_2^+(\tau)} d\tau,$$

где $A_2(\tau, z)d\tau$ — мероморфный аналог ядра Коши, по переменной z кратный дивизору $\tau^{-1}\Delta_2^{-1}$, а по переменной τ — дивизору $z^{-1}\Delta_2$. Этим условиям удовлетворяет выражение

$$A_2(\tau, z)d\tau = [\zeta(\tau - z) - \zeta(\tau - z_2) - \zeta(z_0 - z) + \zeta(z_0 - z_2)]d\tau.$$

2) $\lambda_1 \neq 1$, $\lambda_2 = 1$ $(1 + |a|^2 - |b|^2 = 2 \operatorname{Re} a, \operatorname{Im} a > 0)$.
Этот случай аналогичен рассмотренному выше.

3) $\lambda_1 \neq 1$, $\lambda_2 \neq 1$. Нетрудно доказать следующее

Утверждение. Пусть $\lambda_1 \neq 1$, $\lambda_2 \neq 1$. Если одно из чисел λ_1, λ_2 удовлетворяет условиям (11), то и другое тоже удовлетворяет условиям (11) (причем это возможно при $a \in \mathbf{R}$ и $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$).

Учитывая сказанное, рассмотрим следующие случаи.

а) Пусть λ_1 и λ_2 такие, что для них выполняются условия (11). Тогда $\varphi_j(z) = k_j$, а общее решение однородной задачи (6)—(7) имеет вид:

$$\Phi_{0j}(z) = k_j \exp\{2\pi i m_j u(z)\}, \quad j = 1, 2,$$

где $m_j = \frac{\ln|\lambda_j|}{2\pi \cdot \operatorname{Im} B}$, причем $m_2 = -m_1$; k_1, k_2 — произвольные постоянные. Для разрешимости неоднородной задачи (6)—(7) необходимо и достаточно выполнение условий разрешимости из [1]:

$$\int_L c_j d\Psi_j^+(\tau) = 0, \tag{12}$$

где $d\Psi_j^+(\tau)$ — предельное значение слева на L общего решения союзной однородной задачи для дифференциалов:

$$d\Psi_j(z) = d_j \exp\{-u(z) 2\pi i m_j\} dz \tag{13}$$

(d_j — произвольные постоянные). Легко проверяется, что условия (12) выполняются, и тогда частное решение неоднородной задачи (6)—(7) строится в виде [1]:

$$\tilde{\Phi}_j(z) = \frac{r_j \frac{dz}{Q} - \frac{c_j}{2\pi i} \int_L d\omega_{\tau \tilde{z}}(z) d\Psi_j^+(\tau)}{d\Psi_j(z)} \quad (r_j = \mathrm{const}). \tag{14}$$

б) пусть условия (11) не выполняются для λ_1 и λ_2. Тогда однородные задачи (6) и (7) имеют только тривиальные решения, а неоднородные безусловно разрешимы, и их решения имеют вид

$$\tilde{\Phi}_j(z) = \frac{c_j \chi_j(z)}{2\pi i} \int_L \frac{A_j(\tau, z)}{\chi_j^+(\tau)} d\tau, \tag{15}$$

где $A_j(\tau, z) d\tau = [\zeta(\tau - z) - \zeta(\tau - z_j) - \zeta(z_0 - z) + \zeta(z_0 - z_j)] d\tau$, $j = 1, 2$.

Аналогичным образом исследуется случай $\lambda_1 = \lambda_2$, $q = 1$ $((1 + |a|^2 - |b|^2)^2 - 4|a|^2 = 0$, что возможно, если $|a| + |b| = 1$ либо $|a| - |b| = \pm 1)$. Возвращаясь к задаче (1)—(2) и учитывая условие симметрии, в однородном случае будем иметь следующий результат.

Теорема 1. Если $1 + |a|^2 - |b|^2 = 2 \operatorname{Re} a$, то общее решение однородной задачи (1)—(2) есть константа. Если $a \in \mathbf{R}$, $1 + a^2 - |b|^2 \neq 2a$ и λ_1 удовлетворяет условиям (11), то однородная задача (1)—(2) имеет два линейно независимых решения. В остальных случаях однородная задача (1)—(2) имеет только тривиальное решение.

Решение однородной задачи (1)—(2) в случае, когда $a \in \mathbf{R}$, $1 + a^2 - |b|^2 \neq 2a$ и λ_1 удовлетворяет условиям (11), имеет вид

$$\varphi^{\pm}(z) = \alpha \varphi_1^{\pm}(z) + \beta \varphi_2^{\pm}(z), \tag{16}$$

где

$$\varphi_1^+(z) = (a\lambda - 1) \exp\{zT\} - \frac{b}{\lambda} \exp\{-zT\},$$

$$\varphi_2^+(z) = i[(a\lambda - 1) \exp\{zT\} + \frac{b}{\lambda} \exp\{-zT\}],$$

$$\varphi_1^-(z) = \frac{a\lambda - 1}{\lambda} \exp\{zT\} - b \exp\{-zT\},$$

$$\varphi_2^-(z) = i\left[\frac{a\lambda - 1}{\lambda} \exp\{zT\} + b \exp\{-zT\}\right],$$

α, β — произвольные вещественные постоянные, $T = \frac{i \ln|\lambda_1|}{Q \cdot \operatorname{Im} B}$, $\lambda = \lambda_1$.

Для неоднородной задачи (1)—(2) справедлива

Теорема 2. Если $1 + |a|^2 - |b|^2 = 2 \operatorname{Re} a$, то для разрешимости неоднородной задачи (1)—(2) необходимо и достаточно выполнение равенства

$$2\bar{a}\bar{b}c = \bar{c}(|a|^2 + |b|^2 - 1 + 2i \operatorname{Im} a).$$

В остальных случаях неоднородная задача (1)—(2) безусловно разрешима.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зверович Э. И.— Успехи матем. наук, 1971, т. 26, № 1, с. 113.
2. Жоровина Т. Н.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 2, с. 59.