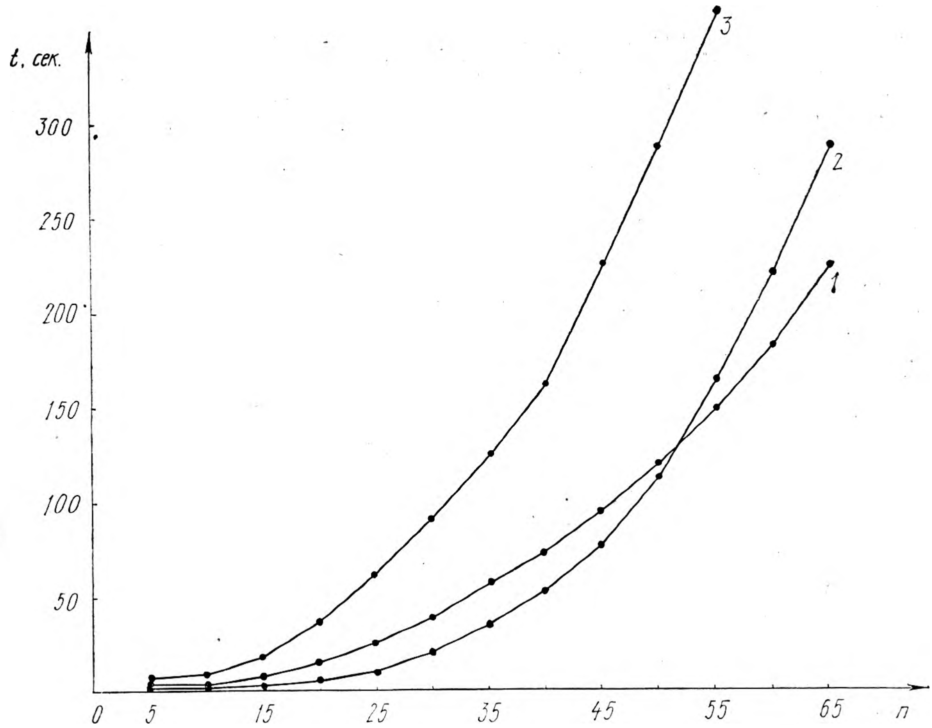

Рис. 2. Зависимости средних временных характеристик алгоритмов I, II, III (кривые *1, 2, 3* соответственно) от размерности задачи

случайных орграфах и симметричных сильно регулярных орграфах незначительно отличаются друг от друга. По-видимому, класс симметричных сильно регулярных орграфов не является плохим входом для разработанного алгоритма. Открытым остается вопрос поиска других таких классов орграфов. В терминах функций $f_k(V)$, где $k=1, 2, \ldots, m$, можно дать лишь их предварительную характеристику, нуждающуюся в дальнейшей конкретизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Deo N., Davis J. M., Lord R. E.— BIT, 1977, v. 17, p. 16.
2. Shmidt D. C., Druffel L. E.— JACM, 1976, v. 23, p. 433.
3. Лепешинский Н. А., Малышко В. В.— Весцi АН БССР, сер. физ.-мат. навук, 1976, № 1, с. 5.
4. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов.— М., 1979.
5. Read R. C., Corneil D. G.— J. Graph Theory, 1977, v. 1, p. 339.
6. Земляченко В. Н., Корнеенко Н. М., Тышкевич Р. И.— Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-т АН СССР, 1982, № 118, с. 83.
7. Харари Ф. Теория графов.— М., 1973.
8. Малышко В. В.— Весцi АН БССР, сер. фiз.-мат. навук, 1976, № 5, с. 118.
9. Kubo N., Shirakawa I., Ozaki H.— Proceedings of 1979 ISCAS, 1979, p. 641.

УДК 519.4

В. М. ШИРЯЕВ

ПОЛУРЕШЕТКИ С ПОЛУДИСТРИБУТИВНЫМИ РЕШЕТКАМИ ПОДПОЛУРЕШЕТОК

В данной работе исследуются некоторые структурные свойства полурешеток (коммутативных полугрупп идемпотентов). Рассматриваются полурешетки с $\vee$-полудистрибутивными и $\wedge$-полудистрибутивными решетками подполурешеток.

Решетка $(L, \wedge, \vee)$ называется $\vee$-полудистрибутивной [1], если для нее выполняется условие Йонссона $(SD_\vee)$ [2]: $a \vee b = a \vee c \Rightarrow \Rightarrow a \vee (b \wedge c) = a \vee b$. Двойственно определяется $\wedge$-полудистрибутивность решетки. Хотя условия полудистрибутивности и уступают в популярности дистрибутивности и модулярности, тем не менее изучение полудистрибутивных решеток представляет интерес, так как условию $(SD_\vee)$ или $(SD_\wedge)$ подчиняются многие естественные классы решеток, например, подрешеток свободных решеток [3], переводимых решеток [4] ..., решеток подквазимногообразий квазимногообразий универсальных алгебр [5, 1] и пр. Особая роль принадлежит условию $(SD_\wedge)$ при изучении полурешеток, так как решетка конгруэнций любой полурешетки $\wedge$-полудистрибутивна [6, 7].

Из описания полугрупп с дистрибутивными и модулярными решетками подполугрупп, полученного Л. Н. Шевриным [8—10] и М. Эго [11, 12], следует, что среди полурешеток только цепи (линейно-упорядоченные множества) обладают дистрибутивными (или модулярными) решетками подполурешеток. В данной работе показано (теорема 2), что это утверждение остается верным, если требование дистрибутивности заменить на требование $\wedge$-полудистрибутивности. Теорема 1 характеризует полурешетки с $\vee$-полудистрибутивными решетками подполурешеток. В качестве следствия установлена $\vee$-полудистрибутивность решетки подполурешеток полурешетки с условием максимальности.

Придерживаемся терминологии и обозначений теории решеток [2] ... и теории полугрупп [13] .... N означает множество натуральных чисел $\{1, 2, 3, \ldots\}$. Далее пусть $(S, \cdot)$ — полурешетка. Если $a, b \in S$, то $a \| b$ означает, что a и b несравнимы. Если $A \subset S$, то $\langle A \rangle$ — подполурешетка, порожденная множеством A или $\varnothing$, если A — пустое множество. Через $\Sigma(S)$ обозначается множество всех подполурешеток полурешетки S. Вместе с пустым подмножеством оно образует решетку (по включению) с операциями $\wedge$ и $\vee$:

$$A \wedge B = A \cap B.$$
$$A \vee B = \langle A \cup B \rangle.$$

Эта решетка обозначается через $\Sigma'(S)$ и называется решеткой подполурешеток полурешетки S.

Подцепь B полурешетки S назовем специальной, если выполняются следующие условия:

1) B упорядочена по типу ω, т. е. $B = \{b_k\}_{k \in N}$ и $b_j \leqslant b_k \Leftrightarrow j \leqslant k$.

2) существует подполурешетка A полурешетки S, не пересекающаяся с B и такая, что

$$\forall k \in N \; \exists a \in A \, (ab_{k+1} = b_k). \tag{1}$$

Теорема 1. Для того чтобы решетка $\Sigma'(S)$ подполурешеток полурешетки S была $\vee$-полудистрибутивной, необходимо и достаточно, чтобы S не содержала специальных подцепей.

Доказательство. *Необходимость*. Пусть для B и A выполняются условия 1) и 2). Положим $B_1 = \{b_{2k-1}\}_{k \in N}$, $B_2 = \{b_{2k}\}_{k \in N}$. Ясно, что $B_1, B_2 \in \Sigma'(S)$. Докажем, что

$$A \vee B_1 = A \vee B_2. \tag{2}$$

В самом деле, согласно (1), для каждого $k \in N$ существует $a \in A$ такой, что $b_{2k-1} = ab_{2k} \in A \vee B_2$. Поэтому $B_1 \subset A \vee B_2$ и $A \vee B_1 \subset A \vee B_2$. Аналогично, $A \vee B_2 \subset A \vee B_1$. (2) доказано. Однако $A \vee (B_1 \cap B_2) = A \vee \varnothing = A \neq \neq A \vee B_1$, поэтому условие $(SD_\vee)$ не выполняется для $\Sigma'(S)$.

Достаточность. Пусть S — полурешетка, не содержащая специальных подцепей. Предположим, что $A, B, C \in \Sigma'(S)$ и

$$A \vee B = A \vee C. \tag{3}$$

Докажем, что

$$A \vee (B \wedge C) = A \vee B. \tag{4}$$

Можно считать, что A, B, $C \in \Sigma(S)$. Достаточно показать, что

$$B \subset A \vee (B \cap C). \qquad (5)$$

Пусть $b_1 \in B$ и предположим, что

$$b_1 \notin A \vee (B \cap C). \qquad (6)$$

Из (3) следует, что для некоторых $a_1 \in A$, $b_2 \in C$ имеем $b_1 = a_1 b_2$. Но тогда ввиду (6) $b_1 \in (B \setminus C) \setminus A$, $b_2 \in (C \setminus B) \setminus A$ и $b_1 < b_2$. Далее по индукции строим множества $A_k = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, $B_{k+1} = \{b_1, b_2, \dots, b_{k+1}\}$, удовлетворяющие условиям:

а) для всякого $j \leqslant k+1$

$b_j \in C \setminus B$, если j четное,

$b_j \in B \setminus C$, если j нечетное;

б) $A_k \subset A$;

в) $b_j = a_j b_{j+1}$, $j = 1, 2, \dots, k$;

г) $A \cap B_{k+1} = \varnothing$;

д) $b_1 < b_2 < \dots < b_{k+1}$.

Из сказанного выше следует, что для $A_1 = \{a_1\}$, $B_2 = \{b_1, b_2\}$ эти условия выполняются. Пусть теперь множества A_k и B_{k+1} построены. Тогда из а) имеем в случае четного k:

$$b_{k+1} \in B \setminus C. \qquad (7)$$

Так как $b_{k+1} \in A \vee B = A \vee C$, существуют $a_{k+1} \in A$ и $b_{k+2} \in C$, такие, что

$$b_{k+1} = a_{k+1} b_{k+2}. \qquad (8)$$

Если бы $b_{k+2} \in B$, то из условия в) для A_k и B_{k+1} имели бы: $b_1 = a_1 b_2 = \dots = a_1 a_2 \dots a_k b_{k+1} = a_1 a_2 \dots a_{k+1} b_{k+2} \in A \vee (B \cap C)$, что противоречит (6). Следовательно, $b_{k+2} \in C \setminus B$, так что условие а) для B_{k+2} выполняется. Далее, из (8) получаем в), а также $b_{k+1} < b_{k+2}$, поэтому д) также выполняется для B_{k+2}. Проверим г). Пусть $j \leqslant k+2$ и $b_j \in A$. Если $j=1$, то это противоречит (6), а для $j > 1$ имеем: $b_1 = a_1 b_2 = \dots = a_1 \dots a_{j-1} b_j \in A$, что противоречит снова (6). Итак, условия а)—д) выполняются для A_{k+1} и B_{k+2}. Положим $A' = \langle a_1, a_2, \dots \rangle$, $B' = \{b_1, b_2, \dots\}$. Докажем, что B' есть специальная подцепь полурешетки S, что приведет к противоречию с предположением относительно S.

Ввиду д) B' есть подцепь S, упорядоченная по типу ω. Так как $A' \subset A$, из г) ввиду $B' = \bigcup_{k \in N} B_{k+1}$ имеем $A' \cap B' = \varnothing$. Условие (1) выполняется ввиду в). Итак, B' — специальная подцепь. Противоречие показывает, что верно (5), а это и требовалось. Теорема доказана.

Следствие 1. Полурешетка с условием обрыва возрастающих цепей имеет $\vee$-полудистрибутивную решетку подполурешеток.

Следствие 2. Конечная полурешетка имеет $\vee$-полудистрибутивную решетку подполурешеток.

Замечание 1. Следствие 2 можно получить из теории двойственности между полурешетками и компактными нульмерными топологическими полурешетками, развитой в [14]. Именно, из предложения 1.4.1 упомянутой работы следует, что функтор двойственности $\underline{S} \to \underline{Z}$ индуцирует антиизоморфизм между решеткой конгруэнций полурешетки S (с единицей) и решеткой $L(\hat{S})$ замкнутых подполурешеток (с единицей) дуальной компактной нульмерной полурешетки $\hat{S}$. Согласно [6 и 7], первая решетка $\vee$-полудистрибутивна, поэтому решетка $L(\hat{S})$ $\vee$-полудистрибутивна. Если предположить, что $\hat{S}$ получена из произвольной конечной полурешетки T внешним присоединением единицы, то отсюда получаем, что $\Sigma'(T)$ $\vee$-полудистрибутивна.

Следствие 3. Пусть S — полурешетка ширины 2. Решетка $\Sigma'(S)$ $\vee$-полудистрибутивна тогда и только тогда, когда для каждой компоненты разложения S в ординальную сумму ординально неразложимых подполурешеток цепь разложимых элементов не содержит возрастающих подцепей.

Это следствие легко получить из теоремы 1 и описания полурешеток ширины 2, данного в [15].

Теорема 2. Решетка $\Sigma'(S)$ подполурешеток полурешетки S $\wedge$-полудистрибутивна тогда и только тогда, когда S есть цепь.

Доказательство. Если S — цепь, то $\Sigma'(S)$ дистрибутивна и потому $\wedge$-полудистрибутивна. Обратно, предположим, что $\Sigma'(S)$ $\wedge$-полудистрибутивна. Пусть a, $b \in S$ и $a \| b$. Тогда $ab < a$, $ab < b$ и так как $\{a\}$, $\{b\}$, $\{ab\} \in \Sigma'(S)$, из $\{ab\} \cap \{a\} = \{ab\} \cap \{b\} = \varnothing$ должно следовать, что $\{ab\} \cap < a, b > = \varnothing$, однако $ab \in < a, b >$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Игошин В. И.— В сб.: Упорядоченные множества и решетки. Саратов, 1978, вып. 5, с. 44.
2. Гретцер Г. Общая теория решеток.— М., 1982.
3. Jonsson B.— Can. J. Math., 1961, v. 13, p. 256.
4. Grätzer G., Platt C. R.— Can. J. Math., 1980, v. 32, p. 145.
5. Горбунов В. А.— Алгебра и логика, 1976, т. 15, № 4, с. 436.
6. Papert D.— J. London Math. Soc., 1964, v. 39, № 4, p. 723.
7. Varlet J.— Bull. Soc. roy. sci. Liege, 1965, v. 34, № 5—6, p. 231.
8. Шеврин Л. Н.— Докл. АН СССР, 1961, т. 138, № 1, с. 73.
9. Шеврин Л. Н.— Сиб. матем. ж., 1962, т. 111, № 3, с. 446.
10. Шеврин Л. Н.— Докл. АН СССР, 1963, т. 148, № 2, с. 292.
11. Ego M.— C. r. Acad. Sci., 1961, v. 252, № 17, p. 2490.
12. Ego M.— C. r. Acad. Sci, 1962. v. 254, № 10, p. 1723.
13. Petrich M. Lectures in semigroups.— Akademie — Verlag — Berlin, 1977, S. 168.
14. Hofmann K. H., Mislove M., Stralka A. The Pontryagin Duality of Compact O-Dimensional Semilattices and its Applications.— Berlin — Heidelberg — New York, 1974, p. 122.
15. Sirjaev V. M.— Semigroup Forum, 1976, № 13, p. 149.

УДК 517.544

Т. Н. ЖОРОВИНА

ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА РИМАНА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НА ТОРЕ

Пусть $\mathbf{M} = \mathbf{M}^0 \cup \partial\mathbf{M}$ — любая из следующих фигур в плоскости комплексного переменного z: прямоугольник, ромб, правильный шестиугольник (здесь $\mathbf{M}^0$ — множество внутренних точек рассматриваемых многоугольников, $\partial\mathbf{M}$ — граница); L — линия симметрии $\mathbf{M}$. Обозначим через Λ множество вершин фигуры $\mathbf{M}$, и пусть $\alpha(t)$ — гомеоморфизм пространства $\partial\mathbf{M} \setminus \Lambda$ на себя, сопоставляющий в прямоугольнике и шестиугольнике каждой точке $t \in \partial\mathbf{M} \setminus \Lambda$ ближайшую к ней точку $\alpha(t)$, лежащую на противоположной (параллельной) стороне $\mathbf{M}$, а для ромба с вершинами в точках 0, $P+iK$, $P-iK$, $2P$ под $\alpha(t)$ будем понимать следующую функцию:

$$\alpha(t) = \begin{cases} t+(P \pm iK), & t \in]\, 0,\ P \pm iK[, \\ t-(P \pm iK), & t \in]\, P \pm iK,\ 2P[. \end{cases}$$

Рассмотрим краевую задачу:

$$\varphi^+(x) = a\varphi^-(x) + b\overline{\varphi^-(x)} + c, \quad x \in L, \tag{1}$$

$$\varphi[\alpha(t)] = \varphi(t), \quad t \in \Sigma_1 \subset d\mathbf{M}, \tag{2}$$

где $\partial\mathbf{M} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, $\alpha(\Sigma_1) = \Sigma_2$.

Требуется найти все аналитические, ограниченные на $\mathbf{M}$ функции $\varphi(z)$, удовлетворяющие условию (2) на $\partial\mathbf{M}$, H-непрерывно продолжимые на L, где должно выполняться краевое условие (1). Из условия (2) следует, что задача (1)—(2) на $\mathbf{M}$ равносильна краевой задаче (1) на $\mathbf{M}$ в классе двоякопериодических функций (примитивные периоды обозначим через T_1 и T_2) или, что то же самое, задаче (1) на торе $\mathbf{M}_1$, который получается после «склеивания» противоположных (параллельных) сторон фигуры $\mathbf{M}$. Контур L предполагаем таким, что его образ на торе $\mathbf{M}_1$-замкнутая кривая.