

Укажем в заключение на работу Ю. И. Черского [3], в которой одно интегральное уравнение типа свертки также решается сведением его к задачам Гильберта. Конструкция уравнения (5) близка к другим работам Ю. И. Черского [4, 5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф. Д., Черский Ю. И. Уравнения типа свертки.— М., 1978.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи.— М., 1977.
3. Черский Ю. И.— Сообщения АН ГССР, 1982, т. 106, № 3, с. 481.
4. Черский Ю. И.— Докл. АН СССР, 1979, т. 248, № 4, с. 802.
5. Черский Ю. И.— Украинский матем. ж., 1981, т. 33, № 6, с. 793.

УДК 519.1

А. А. КОВАЛЕВ, В. В. МАЛЫШКО

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТРУДОЕМКОСТИ АЛГОРИТМОВ УСТАНОВЛЕНИЯ ИЗОМОРФИЗМА ОРГРАФОВ

Целью данной статьи является практическое сравнение средней трудоемкости двух известных алгоритмов установления изоморфизма орграфов [1, 2] и нового алгоритма, разработанного на основе аппарата дуговых графов [3] и техники Хопкрофта [4]. Результаты экспериментов показывают, что выбор инвариантов, определяемых на основе дуговых графов, позволяет уменьшить перебор и обеспечивает предлагаемому алгоритму приемлемую среднюю трудоемкость по сравнению с рассматриваемыми методами [1, 2]. Исследования предусматривали единую политику при реализации алгоритмов (структуры данных, приемы программирования) и проводились как для случайных орграфов, так и для орграфов, полученных из сильно регулярных графов заменой каждого ребра на пару разнонаправленных дуг. Последний класс часто используется при исследовании алгоритмов тестирования изоморфизма графов. Подробные сведения о состоянии проблемы изоморфизма графов можно найти в обзорах [5, 6].

1. Применение метода дуговых графов для распознавания изоморфизма орграфов. Пусть дан помеченный орграф $D(V, A)$ без петель и параллельных дуг, и для него уже построен дуговой граф $D^{(h-1)}(V^{(h-1)}, A^{(h-1)})$ порядка $k-1$ ($k \geq 1$). При $k=1$ орграф $D^{(0)}(V^{(0)}, A^{(0)})$ совпадает с орграфом $D(V, A)$. Пусть $\tilde{A}^{(h-1)} \subset A^{(h-1)}$ — подмножество дуг, принадлежащих контурам длины k . Тогда дуговой граф $D^{(h)}(V^{(h)}, A^{(h)})$ определяется следующим образом. Множество вершин $V^{(h)}$ совпадает с $A^{(h-1)} \setminus \tilde{A}^{(h-1)}$; множество дуг $A^{(h)}$ состоит из таких и только таких пар $(v_i^{(k)}, v_j^{(k)})$, которым в $D^{(h-1)}(V^{(h-1)}, A^{(h-1)})$ соответствует путь длины 2, причем $V_i^{(k)}$ определяется начальной дугой этого пути [3].

Метод дуговых графов позволяет реализовать систематическое перечисление путей с заданными свойствами в исходных орграфах. На основе получаемой системы инвариантов выполняется построение начального разбиения множеств вершин исследуемых орграфов. Особенность предлагаемого подхода заключается в сознательном увеличении затрат времени работы ЭВМ на построение более точного начального разбиения с тем, чтобы сократить затраты на выполнение перебора, реализуемого на основе поиска с возвратом. В результате возможно получение общего выигрыша по времени, что подтверждается проведенными экспериментами.

Обозначим в орграфе $D(V, A)$ через P_i, C_i элементарный путь и контур длины i соответственно, через T_i простой путь длины i . Пара букв в скобках рядом с обозначением пути будет конкретизировать начальную и конечную вершины пути, если это необходимо. Множество путей в орграфе $D(V, A)$ будем обозначать заглавными рукописными буквами, например $P_i(v, u), T_i(v, u)$.

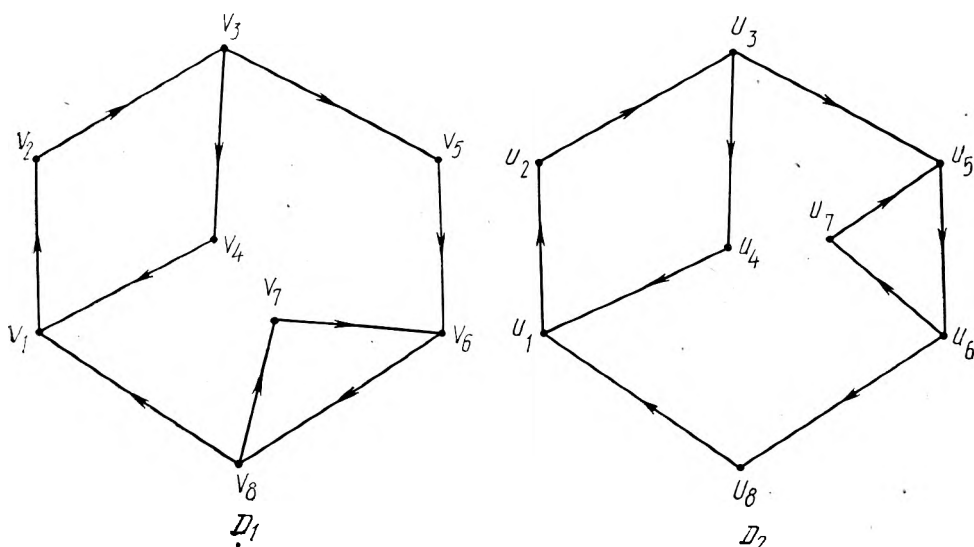


Рис. 1

Множество элементарных путей фиксированной длины неоднозначно определяет структуру исследуемого орграфа.

Утверждение 1. Орграф $D(V, A)$ не определяется однозначно множеством его элементарных путей длины $k \geq 0$, если он содержит, по крайней мере, один из следующих частичных подграфов: 1) частичный подграф, образованный элементарными контурами $C_{r_1}, C_{r_2}, C_{r_3}$ такими, что $C_{r_1} \cap C_{r_2} = \emptyset$, $C_{r_1} \cap C_{r_3} = P_s$, $C_{r_2} \cap C_{r_3} = P_t$, $C_{r_3} \setminus (C_{r_1} \cup C_{r_2}) = P_m \cup P_l$, где $s, t \neq 0$, $s \neq t$, $r_1 \neq r_2$; 2) частичный подграф, образованный элементарным путем P_{s+l+t} и элементарным контуром C_r такими, что $P_{s+l+t} \cap C_r = P_l$, где $s, t \neq 0$, $s \neq t$.

Доказательство проводится конструктивно на основе метода построения последовательности дуговых графов для указанных частичных подграфов.

Предлагаемый алгоритм использует более сильный инвариант — множество простых путей фиксированной длины орграфа D , которое может быть найдено с помощью последовательности дуговых графов, построенной для реберного орграфа $H = L(D)$ [7]. Простые пути, определяемые на основе последовательности дуговых графов $H^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$, несут информацию о местах крепления элементарных контуров исходного орграфа D , в то время как в обычной последовательности дуговых графов $D^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$, такая информация терялась. Вместе с тем используемая в предлагаемом алгоритме система инвариантов не является полной.

Утверждение 2. Орграф $D(V, A)$ не определяется однозначно множеством его простых путей длины $k \geq 0$, если он содержит частичный подграф, образованный элементарными контурами $C_{r_1}, C_{r_2}, C_{r_3}$ такими, что $C_{r_1} \cap C_{r_2} = \emptyset$, $C_{r_1} \cap C_{r_3} = P_s$, $C_{r_2} \cap C_{r_3} = P_l$, $C_{r_3} \setminus (C_{r_1} \cup C_{r_2}) = P_m \cup P_t$, где $s, l \neq 0$, $r_1 \neq r_2$, $r_1 - s = r_2 - l$.

Доказательство. Орграфы D_1 и D_2 (рис. 1) содержат частичные подграфы, описанные в утверждении 2, и не являются изоморфными. Однако при построении последовательностей дуговых графов для $L(D_1)$ и $L(D_2)$ получаем совпадающие значения выбранного инварианта для любого k , что и доказывает утверждение.

2. Описание алгоритма. Пусть заданы два орграфа $D_1(V_1, A_1)$ и $D_2(V_2, A_2)$, проверяемые на изоморфизм. Пусть $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $|V_1| = |V_2| = n$, $|A_1| = |A_2| = m$. Рассмотрим сумму данных орграфов $D'(V, A) = D_1(V_1, A_1) + D_2(V_2, A_2)$, где $V = V_1 \cup V_2$, $A = A_1 \cup A_2$. Проблема определения изоморфизма орграфов D_1 и D_2 сводится теперь к проблеме

построения разбиения множества вершин орграфа $D = D_1 + D_2$ на орбиты его группы автоморфизмов [5].

Пусть N — множество натуральных чисел. Определим функцию $f_k: V \rightarrow V \times N$ следующим образом: для $v \in V$ $f_k(v) = \{(u, r) \mid u \in V, \exists T_k(v, u) \in T_k(v, u), |T_k(v, u)| = r\}$. Будем считать, что множество пар (u, r) упорядочено по вторым элементам. Функция f_k может быть построена на основе дугового графа $H^{(k-1)}$. Действительно, между множествами вершин дугового графа $H^{(k-1)}$ и множеством простых путей длины k орграфа D существует взаимно однозначное соответствие [8]. Дополнительно для построения f_k будем присваивать любой вершине орграфа $H^{(k)}$ составной номер vu , где v — начальная, u — конечная вершины соответствующего простого пути орграфа D . Обозначим через $F_k(v)$, $S_k(v)$ множество первых элементов и строку вторых элементов упорядоченных пар значений функции $f_k(v)$ соответственно. Множество строк $S_k(V)$, $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ однозначно определяет разбиение $\pi = \{B^1, B^2, \dots, B^l\}$ множества вершин V на непересекающиеся непустые подмножества (блоки) такие, что вершины $x, y \in B^j$, где $j \in \{1, 2, \dots, l\}$, тогда и только тогда, когда $S_k(x) = S_k(y)$. Напомним, что блок $B^i = V_1^i \cup V_2^i$, где $V_1^i \subset V_1$, $V_2^i \subset V_2$. Ясно, что при $|V_1^i| \neq |V_2^i|$ для некоторого $i \in \{1, 2, \dots, l\}$ исходные орграфы D_1 и D_2 неизоморфны. В процессе построения последовательности дуговых графов $H^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, m$) для орграфа $H = L(D)$ можно получить, вообще говоря, m различных разбиений π . В качестве начального разбиения π_0 будет использоваться разбиение с максимальным числом блоков. Улучшением разбиения π_0 будем называть нахождение разбиения $\pi_* = \{B^1, B^2, \dots, B^q\}$ множества V со свойствами: а) π_* — подразбиение разбиения π_0 (т. е. каждое множество B^i является подмножеством некоторого множества B_0^j); б) для $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, q\}$ и $\forall u, v \in B^i$ выполняется условие $|F_k(u) \cap B^j| = |F_k(v) \cap B^j|$; в) разбиение π_* является минимальным по числу блоков среди разбиений, удовлетворяющих условиям а), б).

Обозначим процедуру построения начального разбиения π_0 и функции F_k через $ARCGRAPH(D)$ и процедуру улучшения некоторого разбиения π через $REPART(\pi)$. Тогда разработанный алгоритм установления изоморфизма орграфов можно представить следующим образом.

```

begin
рекурсивная процедура BACKTR( $\pi, i, (v, u)$ );
begin
комментарий  $\{B^1, B^2, \dots, B^l\}$  — текущее разбиение;
 $\pi \leftarrow \{B^1, B^2, \dots, B^l \setminus \{v, u\}, \dots, B^l, \{v, u\}\}$ ;
выполнить REPART( $\pi$ );
если  $\exists$  блок  $B^j = V_1^j \cup V_2^j$  такой, что  $|V_1^j| \neq |V_2^j|$  или  $|V_1^j| \cdot |V_2^j| = 0$ , то
вернуться на предыдущий уровень рекурсии;
если не  $\exists$  блока  $B^j = V_1^j \cup V_2^j$  такого, что  $|V_1^j| = |V_2^j| \geq 2$ , то «оргра-
фы изоморфны», останов;
пусть  $B^k = V_1^k \cup V_2^k$  такой блок, что  $|V_1^k| = |V_2^k| \geq 2$ , и  $x \in V_1^k$ ;
для каждой  $y \in V_2^k$  выполнить BACKTR( $\pi, k, (x, y)$ );
end
 $V = V_1 \cup V_2$ ;
 $A = A_1 \cup A_2$ ;
выполнить  $ARCGRAPH(D(V, A))$ ;
выполнить BACKTR( $\pi_0, 1, \emptyset$ );
«графы неизоморфны»;
end

```

3. Особенности реализации алгоритма и анализ результатов. Сложность процедуры улучшения разбиения $O(n \cdot \log n)$, где $n = |V|$ [4]. Для использования данной процедуры в разработанном алгоритме необходимо на начальном этапе построить функцию F_k , для чего используется по-

Временные характеристики исследуемых алгоритмов

n	Кол-во тестов	Среднее время работы алгоритмов, с			Среднее число ветвей дерева поиска алгоритмов		
		I	II	III	I	II	III
5	15	0,34	0,22	3,27	1	1	1
10	15	1,96	0,68	8,68	1	1	1
15	15	8,04	2,08	19,62	1	1	1
20	15	15,28	4,74	37,16	1	1	2
25	15	27,64	9,48	62,21	1	1	3
30	15	38,9	19,12	90,08	1	2	3
35	15	59,02	33,54	125,29	1	2	5
40	15	72,43	53,4	160,93	1	3	6
45	15	93,84	76,54	225,71	1	4	8
50	15	119,07	112,62	287,73	1	4	10
55	15	149,97	164,04	359,07	1	6	14
60	15	183,14	221,06	442,52	1	8	18
65	15	226,08	287,52	561,18	1	10	23
25	6	34,86	17,34	89,16	2	9	12
26	9	36,78	21,97	98,24	2	7	9

последовательность дуговых графов $H^{(k)}$ ($k=1, 2, \dots, m$) для орграфа $H = L(D)$. В [8] доказано, что для построения данной последовательности необходимо произвести $O(d^2 \cdot |T|)$ действий, где T — множество простых путей орграфа D , $d = \max_{v_i \in V} \{d^+(v_i), d^-(v_i)\}$ и $d^+(v_i), d^-(v_i)$ — полустепени

захода и исхода вершины v_i соответственно. После построения начального разбиения (процедура *ARCGRAPH*) требуется дополнительный перебор, реализуемый рекурсивной процедурой поиска с возвращением (*BACKTR*). Алгоритм [9] использует аналогичную схему реализации процедуры *BACKTR*, однако на начальном этапе используется тривиальное разбиение ($|p_0| = 1$), последовательное улучшение которого производится только на основе отношения смежности (т. е. путей длины 1). Использование более мощной системы инвариантов — множества простых путей фиксированной длины — приводит к уменьшению числа ветвей дерева поиска, т. е. к уменьшению числа вызовов процедуры поиска с возвращением, что подтверждается приводимыми ниже результатами проведенных экспериментов.

Предлагаемый алгоритм и алгоритмы [1, 2] (обозначим их условно цифрами I, II, III соответственно) были реализованы на языке ПЛ/1, счет производился на ЭВМ ЕС-1022.

В таблице приводятся результаты экспериментов, проведенных на случайной выборке орграфов с числом дуг $m = \left\lceil \frac{n^2 - n}{2} \right\rceil$. Последние две строки соответствуют результатам, полученным на симметричных сильно регулярных орграфах.

На рис. 2 изображено изменение среднего времени работы алгоритмов I, II, III. Результаты свидетельствуют: 1) число ветвей дерева поиска предлагаемого алгоритма I является наименьшим по сравнению с II и III; 2) при $n \geq 52$ средние временные характеристики предпочтительнее у алгоритма I на случайной выборке орграфов произвольной структуры; 3) на симметричных сильно регулярных орграфах с 25 и 26 вершинами временные характеристики алгоритмов I и II сравнимы и предпочтительнее, чем у алгоритма III.

Отметим, что временные характеристики предлагаемого алгоритма на

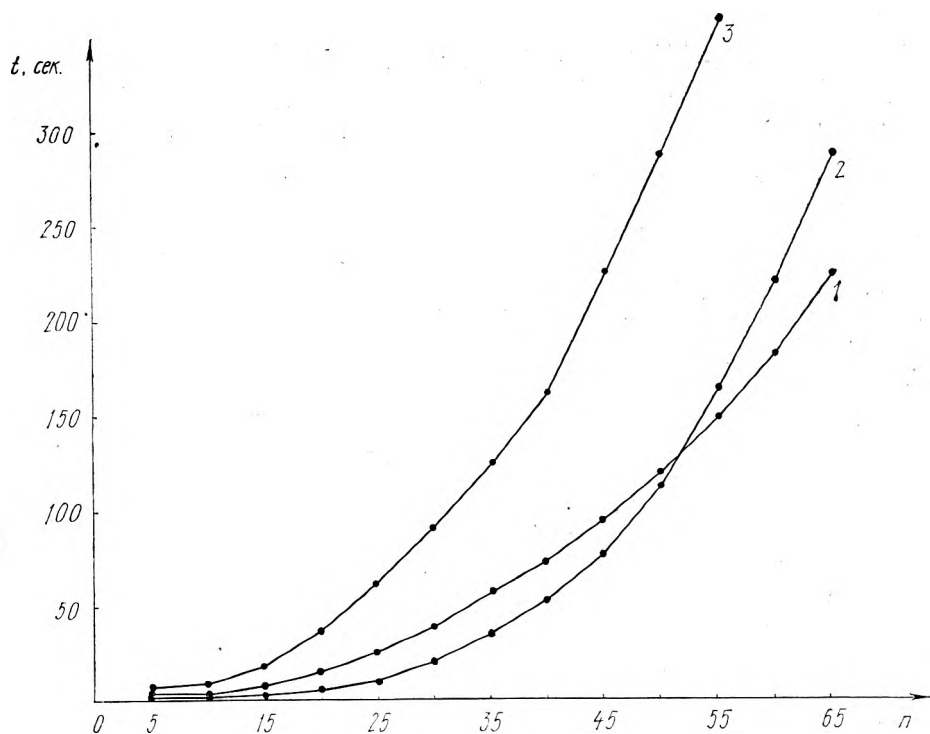


Рис. 2. Зависимости средних временных характеристик алгоритмов I, II, III (кривые 1, 2, 3 соответственно) от размерности задачи

случайных орграфах и симметричных сильно регулярных орграфах незначительно отличаются друг от друга. По-видимому, класс симметричных сильно регулярных орграфов не является плохим входом для разработанного алгоритма. Открытым остается вопрос поиска других таких классов орграфов. В терминах функций $f_k(V)$, где $k=1, 2, \dots, t$, можно дать лишь их предварительную характеристику, нуждающуюся в дальнейшей конкретизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Deo N., Davis J. M., Lord R. E.—BIT, 1977, v. 17, p. 16.
2. Schmidt D. C., Druffel L. E.—JACM, 1976, v. 23, p. 433.
3. Лепешинский Н. А., Малышко В. В.—Вестн АН БССР, сер. физ.-мат. наук, 1976, № 1, с. 5.
4. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов.—М., 1979.
5. Read R. C., Corneil D. G.—J. Graph Theory, 1977, v. 1, p. 339.
6. Зсмляченко В. Н., Корнеев Н. М., Тышкевич Р. И.—Зап. науч. семинаров Ленингр. отд. Мат. ин-т АН СССР, 1982, № 118, с. 83.
7. Харари Ф. Теория графов.—М., 1973.
8. Малышко В. В.—Вестн АН БССР, сер. физ.-мат. наук, 1976, № 5, с. 118.
9. Kubo N., Shirakawa I., Ozaki H.—Proceedings of 1979 ISCAS, 1979, p. 641.

УДК 519.4

В. М. ШИРЯЕВ

ПОЛУРЕШЕТКИ С ПОЛУДИСТРИБУТИВНЫМИ РЕШЕТКАМИ ПОДПОЛУРЕШЕТОК

В данной работе исследуются некоторые структурные свойства полурешеток (коммутативных полугрупп идемпотентов). Рассматриваются полурешетки с $\vee$ -полудистрибутивными и $\wedge$ -полудистрибутивными решетками подполурешеток.