Номер реализации	Значения функционала (3)		$\frac{\Delta\Phi}{\Phi_0}$
	Φ_0	Φ_1	
1	2,982	3,001	0,006
2	2,997	3,001	0,001
3	1,901	2,052	0,080
4	1,959	2,074	0,058
5	3,026	3,031	0,002
6	3,188	3,211	0,007

Построенный закон управления сравнивался с оптимальным в задаче (1), (3), т. е. в случае, когда вектор θ_t полностью наблюдается. Обозначим через Φ_0 и Φ_1 значения функционала (3) при оптимальном управлении в задаче (1), (3) и при управлении (9) в задаче (1), (2), (3) соответственно. Положим $\Delta\Phi=\Phi_1-\Phi_0$. Результаты моделирования приведены в таблице, из которой видно, что применение управления (9) в задаче (1), (2), (3) является достаточно эффективным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения.— Киев, 1968.
2. Медведев Г. А., Тарасенко В. П. Вероятностные методы исследования экстремальных систем.— М., 1967.
3. Вонэм В. М.— Математика, 1973, т. 17, № 4, с. 5.
4. Werni A., Cook C.— Automatica, 1975, v. 11, № 1, p. 75.
5. Параев Ю. И. Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации.— М., 1976.
6. Липцер В. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов.— М., 1974.
7. Kalman R. E., Busy R. S.— Trans. ASME J. of Basic Engineering, 1961, v. 83, № 1, p. 123.
8. Брайсон А., Хо Ю-ши. Прикладная теория оптимального управления.— М., 1972.

УДК 517.968.23

А. П. ШИЛИН

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА СВЕРТКИ, СВОДЯЩИЕСЯ К ЗАДАЧАМ ГИЛЬБЕРТА

Всякая H-непрерывная функция $F(x)$, $-\infty<x<+\infty$, $F(\pm\infty)=0$, может быть единственным образом представлена в виде

$$F(x)=(I^+F)(x)-(I^RF)(x), \tag{1}$$

где $(I^+F)(x)=i\,\mathrm{Im}\,F(x)+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{Im}F(\tau)d\tau}{\tau-x}$ есть предельное значение функции, аналитической в верхней полуплоскости, причем $(I^+F)(\pm\infty)=0$, а $(I^RF)(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{Im}F(\tau)d\tau}{\tau-x}-\mathrm{Re}F(x)$ — вещественнозначная функция, причем $(I^RF)(\pm\infty)=0$.

Рассмотрим уравнение

$$f(t)+(Lf)(t)=g(t),\ -\infty<t<+\infty, \tag{2}$$

где $(Lf)(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}k_1(t-\tau)\ f(\tau)\ d\tau-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0}k_1(t+\tau)\overline{f(\tau)}\,d\tau+$ $+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0}k_2(t-\tau)f(\tau)d\tau+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0}k_2(t+\tau)\overline{f(\tau)}\,d\tau$, а все функции, в том числе искомая $f(t)$, принадлежат классу $\{0\}$ [1]. Преобразуя уравнение (2) по Фурье, получаем

$$F(x)+K_1(x)[F^+(x)+\overline{F^-(x)}]-K_2(x)[F^-(x)+ +\overline{F^-(x)}]=G(x),\quad -\infty<x<+\infty. \tag{3}$$

Здесь и ниже преобразование Фурье от функции обозначается соответствующей заглавной буквой, $F^{\pm}(x)=\pm\frac{1}{2}F(x)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{F(\tau)\,d\tau}{\tau-x}$.

Легко вычислить, что $F^+(x)+\overline{F^-(x)}=(I^+F)(x)$, $F^-(x)+\overline{F^-(x)}=$ $=(I^RF)(x)$, поэтому, представив функцию $F(x)$ в виде (1), соотношение (3) можно привести к виду

$$(I^+F)(x)=\frac{1+K_2(x)}{1+K_1(x)}(I^RF)(x)+\frac{G(x)}{1+K_1(x)},\quad -\infty<x<+\infty. \tag{4}$$

Соотношение (4) есть задача Гильберта для верхней полуплоскости. Предполагая, что $1+K_j(x)\neq 0$, $j=1,2$, задачу (4) можно решить в явном виде [2, с. 284], затем по формуле (1) найти функцию $F(x)$ и, выполнив обратное преобразование Фурье, найти решение уравнения (2). Это решение мы не будем приводить, а приведем решение более сложного уравнения:

$$(Lf)(t)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}k_2(t-\tau)\,d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}k_3(\tau-s)f(s)\,ds+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}k_2(t+\tau)\,d\tau\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\overline{k_3(\tau-s)}\,\overline{f(s)}ds=g(t),\quad -\infty<t<+\infty. \tag{5}$$

Обозначая

$$\varphi(t)=f(t)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}k_3(t-\tau)f(\tau)\,d\tau \tag{6}$$

и преобразуя уравнение (5) по Фурье, придем к задаче Гильберта

$$(I^+F)(x)=\frac{K_2(x)}{K_1(x)}(I^R\Phi)(x)+\frac{G(x)}{K_1(x)},\quad -\infty<x<+\infty. \tag{7}$$

Будем предполагать для простоты, что $K_j(x)=(x+i)^{-n}S_j(x)$, $j=1,2$, причем функции $S_j(x)$ H-непрерывны на вещественной оси и не обращаются в нуль. Будем предполагать также, что функция $G(x)$ имеет на бесконечности нуль порядка не ниже $n+1$. Решая задачу (7), находим

$$(I^+F)(x)=X_1^+(x)\left[(I^+\Psi_1)(x)+\frac{P_{2\varkappa_1-1}(x)}{(x^2+1)^{\varkappa_1}}\right], \tag{8}$$

$$(I^R\Phi)(x)=X_1^R(x)\left[(I^R\Psi_1)(x)+\frac{P_{2\varkappa_1-1}(x)}{(x^2+1)^{\varkappa_1}}\right],$$

где $X_1^+(x)=\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{\varkappa_1}\exp[(I^+\Gamma_1)(x)]$, $X_1^R(x)=\exp[(I^R\Gamma_1)(x)]$, $\Gamma_1(x)=$ $=\ln\left[\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{-\varkappa_1}\frac{K_2(x)}{K_1(x)}\right]$, $\Psi_1(x)=\frac{G(x)}{K_1(x)X_1^+(x)}$, $\varkappa_1=\frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{K_2(x)}{K_1(x)}\right]_{-\infty}^{+\infty}$, $P_{2\varkappa_1-1}(x)$ — многочлен степени $2\varkappa_1-1$ с произвольными вещественными коэффициентами, $P_{2\varkappa_1-1}(x)\equiv 0$ при $\varkappa_1\leqslant 0$. При $\varkappa_1<0$ для разрешимости задачи (7) необходимо и достаточно выполнение условий

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{Im}\frac{G(x)}{K_1(x)X_1^+(x)}\,\frac{dx}{(x^2+1)^k}=0,\quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{Im}\frac{G(x)}{K_1(x)X_1^+(x)}\,\frac{x\,dx}{(x^2+1)^k}=0,$$

$$k=1,2,\ldots,-\varkappa_1.$$

Преобразуя (6) по Фурье, получаем: $\Phi(x)=[1+K_3(x)]F(x)$, или $(I^+\Phi)(x)-(I^R\Phi)(x)=[1+K_3(x)][(I^+F)(x)-(I^RF)(x)]$, откуда получаем еще одну задачу Гильберта

$$(I^+\Phi)(x)=-[1+K_3(x)](I^RF)(x)+H(x), \quad -\infty<x<+\infty, \tag{9}$$

где

$$H(x)=(I^R\Phi)(x)+[1+K_3(x)](I^+F)(x)=$$
$$=\frac{X_1^R(x)+[1+K_3(x)]X_1^+(x)}{(x^2+1)^{\varkappa_1}}P_{2\varkappa_1-1}(x)+$$
$$+X_1^R(x)(I^R\Psi_1)(x)+[1+K_3(x)]X_1^+(x)(I^+\Psi_1)(x).$$

Предполагая, что $1+K_3(x)\neq 0$, из задачи (9) найдем

$$(I^RF)(x)=X_2^R(x)\left[(I^R\Psi_2)(x)+\frac{Q_{2\varkappa_2-1}(x)}{(x^2+1)^{\varkappa_2}}\right], \tag{10}$$

где $X_2^R(x)=\exp[(I^R\Gamma_2)(x)]$, $\Gamma_2(x)=\ln\left[\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{-\varkappa_2}(-1-K_3(x))\right]$, $\Psi_2(x)=$ $=\frac{H(x)}{X_2^+(x)}$, $X_2^+(x)=\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{\varkappa_2}\exp[(I^+\Gamma_2)(x)]$, $\varkappa_2=\frac{1}{2\pi}\left[\arg(1+K_3(x))\right]_{-\infty}^{+\infty}$,

$Q_{2\varkappa_2-1}(x)$ — многочлен степени $2\varkappa_2-1$ с произвольными вещественными коэффициентами, $Q_{2\varkappa_2-1}(x)\equiv 0$ при $\varkappa_2\leqslant 0$. При $\varkappa_2<0$ для разрешимости задачи (9) необходимо и достаточно выполнение условий

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{Im}\frac{H(x)}{X_2^+(x)}\frac{dx}{(x^2+1)^k}=0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{Im}\frac{H(x)}{X_2^+(x)}\frac{x\,dx}{(x^2+1)^k}=0, \quad k=1,2,\ldots,-\varkappa_2.$$

При $\varkappa_1>0$ эти условия будут представлять собой систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{l=1}^{2\varkappa_1}a_{kl}c_l=a_k, \quad \sum_{l=1}^{2\varkappa_1}b_{kl}c_l=b_k, \quad k=1,\ 2,\ \ldots,-\varkappa_2, \tag{11}$$

где

$$a_{kl}=b_{k,l-1}=\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{Im}\frac{X_1^R(x)+[1+K_3(x)]X_1^+(x)}{X_2^+(x)}\frac{x^{l-1}dx}{(x^2+1)^{\varkappa_1+k}},$$

$$a_k=-\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{Im}\frac{X_1^R(x)(I^R\Psi_1)(x)+[1+K_3(x)]X_1^+(x)(I^+\Psi_1)(x)}{X_2^+(x)}\frac{dx}{(x^2+1)^k},$$

$$b_k=-\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{Im}\frac{X_1^R(x)(I^R\Psi_1)(x)+[1+K_3(x)]X_1^+(x)(I^+\Psi_1)(x)}{X_2^+(x)}\frac{x\,dx}{(x^2+1)^k}.$$

Обозначим r ранг этой системы. Положим $r=0$, если неравенства $\varkappa_1>0$, $\varkappa_2<0$ одновременно не выполняются.

Теорема. Для разрешимости уравнения (5) необходима и достаточна разрешимость задач Гильберта (7) и (9). Решение уравнения (5) находится по формуле

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}[(I^+F)(x)-(I^RF)(x)]e^{-ixt}dx, \quad -\infty<t<+\infty,$$

где выражения для $(I^+F)(x)$ и $(I^RF)(x)$ даются формулами (8) и (10). При $\varkappa_1>0$, $\varkappa_2<0$ коэффициенты многочлена $P_{2\varkappa_1-1}(x)=\sum_{l=1}^{2\varkappa_1}c_lx^{l-1}$, входящего в выражение для $(I^+F)(x)$, должны являться общим решением системы (11). Число произвольных вещественных постоянных, входящих в решение уравнения (5), равно $\max\{0,2\varkappa_1\}+\max\{0,2\varkappa_2\}-r$.

Укажем в заключение на работу Ю. И. Черского [3], в которой одно интегральное уравнение типа свертки также решается сведением его к задачам Гильберта. Конструкция уравнения (5) близка к другим работам Ю. И. Черского [4, 5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф. Д., Черский Ю. И. Уравнения типа свертки.— М., 1978.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи.— М., 1977.
3. Черский Ю. И.— Сообщения АН ГССР, 1982, т. 106, № 3, с. 481.
4. Черский Ю. И.— Докл. АН СССР, 1979, т. 248, № 4, с. 802.
5. Черский Ю. И.— Украинский матем. ж., 1981, т. 33, № 6, с. 793.

УДК 519.1

А. А. КОВАЛЕВ, В. В. МАЛЫШКО

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТРУДОЕМКОСТИ АЛГОРИТМОВ УСТАНОВЛЕНИЯ ИЗОМОРФИЗМА ОРГРАФОВ

Целью данной статьи является практическое сравнение средней трудоемкости двух известных алгоритмов установления изоморфизма орграфов [1, 2] и нового алгоритма, разработанного на основе аппарата дуговых графов [3] и техники Хопкрофта [4]. Результаты экспериментов показывают, что выбор инвариантов, определяемых на основе дуговых графов, позволяет уменьшить перебор и обеспечивает предлагаемому алгоритму приемлемую среднюю трудоемкость по сравнению с рассматриваемыми методами [1, 2]. Исследования предусматривали единую политику при реализации алгоритмов (структуры данных, приемы программирования) и проводились как для случайных орграфов, так и для орграфов, полученных из сильно регулярных графов заменой каждого ребра на пару разнонаправленных дуг. Последний класс часто используется при исследовании алгоритмов тестирования изоморфизма графов. Подробные сведения о состоянии проблемы изоморфизма графов можно найти в обзорах [5, 6].

1. Применение метода дуговых графов для распознавания изоморфизма орграфов. Пусть дан помеченный орграф $D(V, A)$ без петель и параллельных дуг, и для него уже построен дуговой граф $D^{(k-1)}(V^{(k-1)}, A^{(k-1)})$ порядка $k-1$ $(k\geqslant 1)$. При $k=1$ орграф $D^{(0)}(V^{(0)}, A^{(0)})$ совпадает с орграфом $D(V, A)$. Пусть $\tilde{A}^{(k-1)}\subset A^{(k-1)}$ — подмножество дуг, принадлежащих контурам длины k. Тогда дуговой граф $D^{(k)}(V^{(k)}, A^{(k)})$ определяется следующим образом. Множество вершин $V^{(k)}$ совпадает с $A^{(k-1)} \setminus \tilde{A}^{(k-1)}$; множество дуг $A^{(k)}$ состоит из таких и только таких пар $(v_i^{(k)}, v_j^{(k)})$, которым в $D^{(k-1)}(V^{(k-1)}, A^{(k-1)})$ соответствует путь длины 2, причем $V_i^{(k)}$ определяется начальной дугой этого пути [3].

Метод дуговых графов позволяет реализовать систематическое перечисление путей с заданными свойствами в исходных орграфах. На основе получаемой системы инвариантов выполняется построение начального разбиения множеств вершин исследуемых орграфов. Особенность предлагаемого подхода заключается в сознательном увеличении затрат времени работы ЭВМ на построение более точного начального разбиения с тем, чтобы сократить затраты на выполнение перебора, реализуемого на основе поиска с возвращением. В результате возможно получение общего выигрыша по времени, что подтверждается проведенными экспериментами.

Обозначим в орграфе $D(V, A)$ через P_i, C_i элементарный путь и контур длины i соответственно, через T_i простой путь длины i. Пара букв в скобках рядом с обозначением пути будет конкретизировать начальную и конечную вершины пути, если это необходимо. Множество путей в орграфе $D(V, A)$ будем обозначать заглавными рукописными буквами, например $\mathbf{P}_i(v, u)$, $\mathbf{T}_i(v, u)$.