ЛИТЕРАТУРА

1. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов.— М., 1976.
2. Бенткус Р.— Литовский матем. сб., 1972, т. 12, № 1, с. 55.
3. Виленкин С. Я. Статистическая обработка результатов исследования случайных функций.— М., 1979.
4. Журбенко И. Г., Труш Н. Н.— Литовский матем. сб., 1979, т. 19, № 1, с. 65.
5. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций.— М., 1968.
6. Parzen E.— Ann. Math. Statist., 1963, v. 28, p. 329.

УДК 517.948.3

В. В. МИТЮШЕВ

О ЛИНЕЙНОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ В КЛАССЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Рассматривается функциональное уравнение

$$\varphi(z)=G(z)\varphi(sz)+g(z),\ |z|<1. \qquad (1)$$

Известные функции $G(z)$, $g(z)$ и искомая функция $\varphi(z)$ аналитичны в единичном круге, $|G(0)|\neq 1$, $s=e^{2\pi i\theta}$, где θ — иррациональное число. Представим функции $\varphi(z)$, $G(z)$, $g(z)$ в виде рядов Тейлора в окрестности нуля $\varphi(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\alpha_k z^k$, $G(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\gamma_k z^k$, $g(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}g_k z^k$. Подставляя эти ряды в уравнение (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, получим простой алгоритм вычисления коэффициентов α_k, $k=0, 1, 2, \ldots$

$$\alpha_k=\gamma_0 s^k\alpha_k+\gamma_1 s^{k-1}\alpha_{k-1}+\ldots+\gamma_k\alpha_0+g_k,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \qquad (2)$$

Вопрос состоит в том, будет ли полученный ряд сходиться при $|z|<1$. В работах [1, 2] доказывается сходимость ряда при следующих ограничениях на известные функции:

а) $|\gamma_0|>2$, $|\gamma_k|\leqslant\frac{(1-\delta)^k}{(1+k)^2}$, $k=1,\ 2,\ \ldots$; $|g_k|\leqslant(1-\delta)^k$, $k=0,1,\ldots$ $0<\delta<1$.

б) $G(t)=At+B$, $|A|<2^{-\delta}$, $|B|>2$, $|g_0|\leqslant 1$, $|g_k|\leqslant\frac{2^{-\delta}-|A|}{k^{\delta}}$, $k=1,\ 2,\ \ldots$; $\delta>\frac{1}{2}$.

в) $\min\limits_{n\geqslant 0}|s^n-G(0)|>\frac{1-\delta}{\delta}$, $0<\delta<1$.

Лемма. Пусть непостоянная аналитическая в области D функция $f(z)$ принимает в D значения, по модулю равные единице. Тогда множество всех $t\in D$, таких что $|f(t)|=1$ образует кривые, каждая из которых разделяет область D на две связные компоненты.

Доказательство легко вывести из принципа максимума.

Пусть l_1 — такая кривая, что $|G(t)|=1$, $t\in l_1$; $|G(z)|<1$, $z\in D_{l_1}$; $|G(z)|>1$, $z\in G_{l_1}$, где D_{l_1} — область, ограниченная кривой l_1 и содержащая точку $z=0$, G_{l_1} — дополнение множества $D_{l_1}\cup l_1$ до единичного круга. Пусть $r_1=\min\limits_{t\in l_1}|t|$, $R_1=\max\limits_{t\in l_1}|t|$. В случае, когда контур l_1 имеет другой вид, уравнение (1) будет решаться аналогично.

Применяя к уравнению (1) в круге $|z|\leqslant r_1$ принцип сжатых отображений, получим, что уравнение (1) имеет единственное решение, аналитическое, по крайней мере, в круге $|z|<r_1$. Записывая равенство (1) в виде

$$\varphi(z)=\frac{1}{G(s^{-1}z)}\varphi(s^{-1}z)-\frac{g(s^{-1}z)}{G(s^{-1}z)}$$

в кольце $R_1<|z|<1$, аналогично получаем существование решения в этом кольце.

Пусть кривая l_1 не является окружностью. Тогда существует такое натуральное n, что для кривой l_2, образованной точками $t\in \boldsymbol{C}$, такими что $|G(t)G(st)\dots G(s^n t)|=1$, выполнены неравенства $r_2>r_1$, $R_2<R_1$. Здесь $r_2=\min\limits_{t\in l_2}|t|$, $R_2=\max\limits_{t\in l_2}|t|$. Применяя принцип сжатых отображений к уравнению

$$\varphi(z)=G(z)G(sz)\dots G(s^n z)\varphi(s^{n+1}z)+G(z)G(sz)\dots G(s^{n-1}z)g(s^n z)+$$
$$+G(z)G(sz)\dots G(s^{n-2}z)g(s^{n-1}z)+\dots+G(z)g(zs)+g(z) \qquad (3)$$

при $|z|<r_2$, $R_2<|z|<1$, получим существование решения уравнения (3). Решения уравнений (1) и (3) существуют в областях $|z|<r_1$ и $R_1<$ $<|z|<1$ и единственны. Уравнение (3) — следствие уравнения (1). Значит, уравнения (1) и (3) эквивалентны. Таким образом, решение уравнения (1) существует, по крайней мере, в областях $|z|<r_2$, $R_2<|z|<1$. По уравнению (3) строим числа r_3 и R_3, аналогичные r_1, r_2; R_1. Продолжая этот процесс неограниченно, получаем последовательности $\{r_k\}$, $\{R_k\}$. Последовательность $\{r_k\}$ ($\{R_k\}$) возрастающая (убывающая) ограничена сверху (снизу), поэтому она имеет предел. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} r_k=r$, $\lim\limits_{k\to\infty} R_k=R$. Обозначим через $l=\{z\in \boldsymbol{C},\ r\leqslant|z|\leqslant R\}$. Если на k-ом шаге получим окружность, то $l=\{z\in\boldsymbol{C},\ r=|z|=R\}$.

Теорема 1. 1. Функциональное уравнение (1) имеет решение, по крайней мере, при $|z|<r$, $R<|z|<1$.

2. Если множество l не имеет общих точек с единичным кругом, то уравнение (1) имеет единственное решение при $|z|<1$, определяемое формулами (2).

Ограничения а) и б) работ [1, 2] являются частными случаями второго пункта теоремы.

Пример. $\varphi(z)=e^{z-\frac{1}{2}}\varphi(sz)+g(z)$, $|z|<1$. Уравнение кривых l_k имеет вид $|e^{t-\frac{1}{2}}e^{st-\frac{1}{2}}\dots e^{s^k t-\frac{1}{2}}|=1$ или $\operatorname{Re} t(1+s+s^2+\dots+s^k)=$ $=\frac{k}{2}$. Так как $|t|\cdot|1+s+s^2+\dots+s^k|>\frac{k}{2}$ или $|t|>\frac{k}{2}\left|\frac{1-s}{1-s^k}\right|$, то для достаточно больших k $|t|>1$, то есть $r>1$ и применим второй пункт теоремы.

Критерий аналитического продолжения решения через множество l не известен. Установлено лишь, что возможны оба случая. Рассмотрим частный случай уравнения (1), когда до конца выясняется вопрос аналитического продолжения через множество l.

Пусть $G(z)=\lambda z^n G_1(z)$, где $G_1(0)=1$, а также $G_1(z)\neq 0$ в единичном круге. В работах [2, 3] рассматривались равносильные задачи

$$\chi(z)=G_1(z)\chi(sz),\ |z|<1, \qquad (4)$$
$$\chi_1(z)=\mathrm{X}_1(sz)+\ln G_1(z),\ |z|<1\ (\chi_1(z)=\ln\chi(z))$$

при некоторых ограничениях на функцию $G_1(z)$ и число s. Например, в работе [2] имеется следующий результат.

Теорема. Пусть для коэффициентов r_k разложения в ряд Тейлора функции $\ln G_1(z)$ выполняется неравенство

$$|r_k|<\frac{c}{k^{1+\delta}},\ c>0,\ \delta>0$$

и для любого ε из отрезка $(0,\delta)$ $\left|\arg s-\frac{m}{n}\right|>\frac{k_0}{n^{2+\varepsilon}}$ (k_0—некоторая постоянная) при любых целых m и n. Тогда задача (4) имеет решение вида

$$\chi(z)=\exp\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r_k z^k}{1-s^k}\right].$$

Будем предполагать, что ограничения, указанные в работе [2] или [3], выполнены, т. е. функцию $G_1(z)$ можно представить в виде $G_1(z)=\frac{\chi(z)}{\chi(sz)}$, причем $\chi(z)\neq 0$ в единичном круге. Тогда уравнение (1) равносильно уравнению

$$\psi(z)=\lambda z^n\psi(sz)+h(z),\ |z|<1, \tag{5}$$

где $\psi(z):=\frac{\varphi(z)}{\chi(z)}$, $h(z)=\frac{g(z)}{\chi(z)}$. Займемся исследованием уравнения (5). Пусть $n=0$, тогда множество l представляет собой единичную окружность только при $|\lambda|=1$. Значит, по теореме 1 получаем, что задача (5) при $n=0$ разрешима. Пусть $n>0$. Случай $n<0$ исследуется аналогично. При $n>0$ множество l является окружностью радиуса $r=R=|\lambda|^{-\frac{1}{n}}$ с центром в нуле. Если $r\geqslant 1$ или $|\lambda|\leqslant 1$, то по теореме 1 уравнение (5) разрешимо. Рассмотрим случай, когда $|\lambda|>1$.

Из формулы (2) следует, что коэффициенты β_k, $k=0, 1, \ldots$ ряда Тейлора функции $\psi(z)$ вычисляются по соотношениям: $\beta_k=\lambda s^{k-n}\beta_{k-n}+h_k$, $k\geqslant n$, $\beta_k=h_k$, $k<n$, где $h(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}h_kz^k$. Отсюда

$$\beta_{k_q}=\lambda^{\frac{k_q-q}{n}}s^{k_q-n+k_q-2n+\ldots+q}h_q+\lambda^{\frac{k_q-q}{n}-1}s^{k_q-n+k_q-2n+\ldots+q+n}h_{q+n}+$$
$$+\ldots+\lambda s^q h_{k_q-n},$$

где k_q — все натуральные числа, дающие остаток q при делении на n, $q=0, 1, \ldots, n-1$. Переписываем последнее равенство в виде

$$\beta_{k_q}=\lambda^{\frac{k_q-q}{n}}s^{k_q-n+k_q-2n+\ldots+q}\tilde{h}_{k_q}(\lambda),\ \text{где}\ \tilde{h}_{k_q}(\lambda):=h_q+h_{q+n}\frac{1}{\lambda s^q}+$$
$$+\ldots+h_{k_q}\frac{1}{\lambda^{\frac{k_q-q}{n}}s^{k_q-n+k_q-2n+\ldots+q}},\ q=0, 1, \ldots, n-1.$$

Если $\overline{\lim\limits_{k_q\to\infty}}|\tilde{h}_{k_q}(\lambda)|\neq 0$ хотя бы для одного q, то $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}|\beta_k|\geqslant|\lambda|^{-\frac{1}{n}}$. Отсюда следует, что радиус сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\beta_kz^k$ меньше $|\lambda|^{-\frac{1}{n}}$. Так как $|\lambda|>1$, то в этом случае и уравнение (5) и исходная задача (1) не имеют решений.

Обозначим через $H_q(w):=\lim\limits_{k_q\to\infty}h_{k_q}(w)$, $q=0, 1, \ldots, n-1$. Пусть ρ_q — радиусы сходимости рядов Тейлора функций $H_q\left(\frac{1}{w}\right)$ в окрестности нуля. Тогда $\min\limits_q(\rho_q)$ совпадает с радиусом сходимости ряда Тейлора функции $h(z)$. Поэтому для разрешимости задачи (5) необходимо, чтобы функция $h(z)$ аналитически продолжалась до окружности $|t|=|\lambda|^{\frac{1}{n}}$ и выполнялись равенства $H_q(\lambda^{\frac{1}{n}})=0$, $q=0, 1, \ldots, n-1$. Необходимое и достаточное условие разрешимости задачи (5), но более сложно проверяемое практически, имеет вид

$$\overline{\lim_{k_q\to\infty}}\sqrt[k_q]{|\tilde{h}_{k_q}(\lambda)|}<|\lambda|^{-\frac{1}{n}},\ q=0, 1, \ldots, n-1.$$

Это следует из соотношений:

$$1>\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|\beta_k|}=\max_q\overline{\lim_{k_q\to\infty}}\sqrt[k_q]{|\lambda|^{\frac{k_q-q}{n}}|\tilde{h}_{k_q}(\lambda)|}=|\lambda|^{\frac{1}{n}}\max_q\overline{\lim_{k_q\to\infty}}\sqrt[k_q]{|\tilde{h}_{k_q}(\lambda)|}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамович В. С., Арсени В. Ф. Математический анализ и его приложения.— Ростов, 1981, с. 3.
2. Арсени В. Ф., Евсеев Е. Г. Об одной граничной задаче со сдвигом.— Тбилиси, 1979.
3. Арнольд В. И.— Изв. АН СССР, 1961, т. 25, № 1, с. 21.

УДК 517.925.31

Р. А. ПРОХОРОВА, В. Г. КОМПЕЛЬ

ПОКАЗАТЕЛИ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Наряду с линейной системой

$$\dot{x}=A(t)x, \tag{1}$$

где $A(t)$ — непрерывная ограниченная ($\|A(t)\|\leqslant M$) при $t\geqslant 0$ матрица, рассмотрим квазилинейную систему

$$\dot{y}=A(t)y+f(t,y), \tag{2}$$

где непрерывное m-возмущение $f(t, y)$ удовлетворяет условию

$$\|f(t,y_1)-f(t,y_2)\|\leqslant N\max(\|y_1\|^{m-1}, \|y_2\|^{m-1})\|y_1-y_2\|,$$
$$\|y\|<H,\ t\geqslant 0,\ m>1. \tag{3}$$

Пусть показатели $\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant\ldots\leqslant\alpha_n$ системы (1) отрицательны. В случае постоянной матрицы $A(t)\equiv A$ А. А. Шестаковым в [1, с. 267] изучена структура множества Σ показателей нетривиальных решений системы (2), выходящих в момент $t=0$ из любой достаточно малой окрестности начала координат $y=0$. Для правильной системы (1) при дополнительных предположениях на показатели системы (1) и m-возмущение $f(t, y)$ аналогичный [1] результат получен в [2]. В работе [3] построены оценки решений системы (2)—(3). Цель настоящей работы — изучить структуру множества Σ в общем случае системы (1).

Пусть $X(t)=(x_{ij}(t))$ — нормальная упорядоченная фундаментальная система решений системы (1), показатели столбцов которой $\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_p$ соответственно кратности $n_1, n_2, \ldots, n_p$, $n_1+n_2+\ldots n_p=n$. Положим $\Omega=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p)$. Пусть δ_i — показатель i-й строки матрицы $X^{-1}(t)=(\tilde{x}_{ij}(t))$, тогда коэффициент неправильности Д. М. Гробмана σ_Γ [4] вычисляется по формуле $\sigma_\Gamma=\max\limits_{1\leqslant i\ n}\{\alpha_i+\delta_i\}$. Обозначим $\chi[y]=\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\ln\|y(t)\|$.

Лемма 1. Если выполнено условие

$$(m-1)\alpha_n+\sigma_\Gamma<0, \tag{4}$$

то $\Sigma\subseteq\Omega$.

Доказательство. По теореме Д. М. Гробмана [4] при выполнении условия (4) существует достаточно малая окрестность начала координат $\|y\|<h$, $h<H$, что все решения $y=y(t)$ системы (2), выходящие в момент $t=0$ из этой окрестности ($\|y(0)\|<h$), неограниченно продолжимы вправо и удовлетворяют условию $\chi[y(t)]\leqslant\alpha_n$.

Пусть $y=y_0(t)$, $\|y_0(0)\|<h$, любое нетривиальное решение системы (2). На основании принципа линейного включения [5] $y=y_0(t)$ является решением некоторой линейной системы

$$\dot{y}=A(t)y+Q(t)y,\ \|Q(t)\|\leqslant N\|y_0(t)\|^{m-1},\ t\geqslant 0. \tag{5}$$

Так как $\chi[y_0(t)]\leqslant\alpha_n$, то для любого $\varepsilon>0$ справедлива оценка

$$\|y_0(t)\|\leqslant D_\varepsilon e^{(\alpha_n+\varepsilon)t},\ t\geqslant 0. \tag{6}$$