

Для дальнейших рассуждений нам понадобится

Лемма 2 [8]. Пусть $\Pi \in P(N)$ — перестановка, минимизирующая функционал (2). Если для этой перестановки выполняется условие (5), то она будет минимизировать функционал (1).

Пусть перестановка $\Pi \in P_1(N)$ получена следующим образом: сначала упорядочены R -детали по неубыванию значений $a_i + b_i$, а затем Q -детали по невозрастанию значений $b_i + c_i$. Как и для всякой перестановки из $P_1(N)$, для Π выполняется соотношение (4), а значит, и (5). С другой стороны, учитывая (3), можно заключить, что Π будет той перестановкой, которую генерирует алгоритм 1, т. е. Π минимизирует функционал (2). Тогда из леммы 2 следует, что Π — оптимальное решение исходной задачи трех станков. Теорема 3 доказана.

Отметим, что условия (8) и (9) представляют собой выпуклые линейные комбинации условий (6) и (7), причем при $\tau=1$ (8) и (9) совпадают с (6), а при $\tau=0$ — с (7). Проверку выполнения условий (8) и (9) можно осуществить за $O(n^2)$ операций.

Вопрос о возможности обобщения условия (9) на случай произвольного числа станков заслуживает специального рассмотрения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Garey M. R., Johnson D. S., Sethi R. — Math. Oper. Res., 1976, v. 1, N 2, p. 117.
2. Джонсон С. М. — В кн.: Календарное планирование. — М., 1966, с. 33.
3. Szwarc W. — Oper. Res., 1977, v. 25, N 1, p. 70.
4. Nabeshima I. — Дэнки цусин дайгаку гакухо, Repts Univ. Electro-Communs, 1977, v. 28, N 1, p. 35.
5. Глебов Н. И. — Управляемые системы, 1978, вып. 17, с. 46.
6. Струсович В. А. — Докл. АН БССР, 1981, т. 25, № 6, с. 518.
7. Graham R. L., Lawler E. L., Lenstra J. K., Rinnooy Kan A. H. G. — Ann. Discr. Math., 1979, v. 5, p. 287.
8. Szwarc W. — Nav. Res. Log. Quart., 1974, v. 21, N 1, p. 145.

УДК 519.24

Н. Н. ТРУШ

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕПРЕРЫВНОГО СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА И ИХ СВОЙСТВА

Исследованию оценок основных характеристик дискретного стационарного случайного процесса посвящена обширная литература (см., например, работы [1—6]). В то же время много прикладных задач в радиофизике, геофизике, статистических задач турбулентности жидкостей и газа требуют развития подобных вопросов в непрерывном случае. Некоторые аспекты исследования оценок характеристик непрерывного стационарного случайного процесса с помощью ковариационной функции можно найти в работах [3, 5].

В настоящей статье, используя спектральный подход, изучаем статистические свойства оценок математического ожидания m и ковариационной функции $R(\tau)$, $-\infty < \tau < \infty$, построенным по наблюдениям $x(t)$, $t \in [0, T]$, за непрерывным стационарным случайным процессом $x(t)$.

Следуя работам [3, 5], пусть

$$\hat{m}_T = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (1)$$

оценка математического ожидания m , а статистика

$$\hat{R}_T(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} [x(t) - m][x(t+\tau) - m] dt, \quad (2)$$

$\tau \in [0, T]$, — оценка ковариационной функции $R(\tau)$ процесса $x(t)$. Так как $M\hat{m}_T = m$, то $\hat{m}_T$ является несмещенной оценкой математического ожидания. Найдем дисперсию $\hat{m}_T$.

Теорема 1. Для оценки $\hat{m}_T$, задаваемой равенством (1), справедливо соотношение:

$$T \cdot D\hat{m}_T = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \psi_T(\lambda) d\lambda, \quad (3)$$

где $f(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, — спектральная плотность процесса $x(t)$, а

$$\psi_T(\lambda) = \frac{1}{2\pi T} \Delta_T^2(\lambda), \quad \Delta_T(\lambda) = \frac{2}{\lambda} \sin \frac{T\lambda}{2}. \quad (4)$$

Доказательство. По определению $D\hat{m}_T = M(\hat{m}_T - M\hat{m}_T)^2 =$
 $= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T R(t_2 - t_1) dt_1 dt_2.$

Используя соотношение

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) e^{i\lambda\tau} d\lambda, \quad (5)$$

получим $D\hat{m}_T = \frac{1}{T^2} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \left| \int_0^T e^{i\lambda t} dt \right|^2 d\lambda$; Так как $\left| \int_0^T e^{i\lambda t} dt \right|^2 = \Delta_T^2(\lambda)$, то имеем требуемое.

Прежде чем рассматривать асимптотические свойства дисперсии оценки математического ожидания, исследуем свойства функции $\psi_T(\lambda)$.

Лемма. Для любого действительного $a > 0$, справедливы соотношения

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \psi_T(\lambda) d\lambda = 1, \quad (6)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_a^\infty \psi_T(\lambda) d\lambda = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{-a} \psi_T(\lambda) d\lambda = 0, \quad (7)$$

где функция $\psi_T(\lambda)$ задается равенством (4).

Доказательство. Докажем вначале соотношение (6). Легко видеть, что $\int_{-a}^a \psi_T(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi T} \int_{-a}^a \int_0^T \int_0^T e^{i(t_1 - t_2)\lambda} dt_1 dt_2 d\lambda.$ Делая замену переменных

$$t_1 - t_2 = t, \quad t_2 = t_2, \quad \text{получаем} \quad \int_{-a}^a \psi_T(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi T} \int_{-a}^a \int_{-T}^T (T - |t|) \cos \lambda t dt d\lambda.$$

$$\text{Меняя порядок интегрирования, имеем:} \quad \int_{-a}^a \psi_T(\lambda) d\lambda = \frac{2}{\pi} \int_0^T \frac{\sin at}{t} dt -$$

$$- \frac{2(1 - \cos aT)}{\pi T}. \quad \text{Отсюда, учитывая, что при } a > 0 \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{\sin at}{t} dt = \frac{\pi}{2},$$

получаем (6).

Докажем соотношение (7). Так как $\int_0^\infty \psi_T(\lambda) d\lambda \leq \frac{1}{2\pi T} \int_a^\infty \frac{4}{\lambda^2} d\lambda = \frac{2}{\pi T \cdot a},$ то при $T \rightarrow \infty$ получаем требуемое. Лемма доказана. Заметим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_T(\lambda) d\lambda = 1. \quad (8)$$

Теорема 2. Если спектральная плотность $f(\lambda)$ непрерывна в точке $\lambda=0$ и ограничена на $(-\delta, \delta)$ для некоторого $\delta>0$, то

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T \cdot \widehat{Dm}_T = 2\pi \cdot f(0). \quad (9)$$

Доказательство. Так как функция $f(\lambda)$ непрерывна в точке $\lambda=0$, то для заданного $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, что, как только $|\lambda| \leq \delta$, то $|f(\lambda) - f(0)| \leq \varepsilon$. Следовательно, используя соотношения (3), (8), получаем:

$$\begin{aligned} \left| \frac{T}{2\pi} \widehat{Dm}_T - f(0) \right| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} [f(\lambda) - f(0)] \psi_T(\lambda) d\lambda \right| \leq \int_{-\infty}^{-\delta} |f(\lambda) - f(0)| \psi_T(\lambda) d\lambda + \\ &+ \int_{-\delta}^{\delta} |f(\lambda) - f(0)| \psi_T(\lambda) d\lambda + \int_{\delta}^{\infty} |f(\lambda) - f(0)| \psi_T(\lambda) d\lambda \leq \frac{2}{\pi T \cdot \delta} \int_{-\infty}^{-\delta} |f(\lambda) - \\ &- f(0)| d\lambda + \varepsilon \cdot \int_{-\delta}^{\delta} \psi_T(\lambda) d\lambda + \frac{2}{\pi T \cdot \delta} \int_{\delta}^{\infty} |f(\lambda) - f(0)| d\lambda. \end{aligned} \quad (10)$$

Учитывая, что $\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\lambda < \infty$, первое и третье слагаемые в правой части (10) стремятся к нулю при $T \rightarrow \infty$, а второе слагаемое можно сделать сколь угодно малым за счет выбора ε . Теорема доказана.

Следовательно, статистика $\widehat{m}_T$ является несмещенной и состоятельной оценкой математического ожидания.

Рассмотрим $\widehat{R}_T(\tau)$. Легко показать, что $\widehat{R}_T(\tau)$ является несмещенной оценкой ковариационной функции $R(\tau)$. Найдем дисперсию оценки $\widehat{R}_T(\tau)$. В дальнейшем в этой статье будем предполагать, что $m=0$.

Смешанным моментом n -го порядка называется функция $m_n(t_1, \dots, t_n) = Mx(t_1) \dots x(t_n)$, где $-\infty < t_j < \infty$, $j=1, n$. Заметим, что так как процесс $x(t)$ стационарный, то $m_n(t_1, \dots, t_n) = m_n(t_1+t, \dots, t_n+t)$ (11) для любого $t \in (-\infty, \infty)$ и любых t_j , $j=1, n$. Смешанные семинварианты n -го порядка $c_n(t_1, \dots, t_n)$ определим как коэффициенты формального разложения в ряд характеристических функций $\ln H(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, где $H(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = M \exp \{i \sum_{j=1}^n \alpha_j x(t_j)\}$, а $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — действительный вспомогательный вектор. Так же как и для смешанных моментов,

$$c_n(t_1, \dots, t_n) = c_n(t_1+t, \dots, t_n+t) \quad (12)$$

для любых $t, t_j \in (-\infty, \infty)$, $j=1, n$. При $n=2$, $m_2(t_1, t_2) = c_2(t_1, t_2)$, а учитывая (11), (12), $m_2(\tau, 0) = c_2(\tau, 0) = R(\tau)$. Между смешанными моментами и семинвариантами существует связь, которая в случае $n=4$, используемом в дальнейшем, выражается равенством:

$$\begin{aligned} m_4(t_1, t_2, t_3, t_4) &= c_4(t_1, t_2, t_3, t_4) + c_2(t_1, t_2) \times \\ &\times c_2(t_3, t_4) + c_2(t_1, t_3) c_2(t_2, t_4) + c_2(t_1, t_4) c_2(t_2, t_3). \end{aligned} \quad (13)$$

Теорема 3. Для любых $t, \tau \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} (T-t)(T-\tau) \operatorname{cov} \{ \widehat{R}_T(t), \widehat{R}_T(\tau) \} &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_{T-t}(\lambda - \nu) \Delta_{T-\tau}(\lambda - \nu) \left[e^{\frac{i(\lambda+\nu)(\tau-t)}{2}} + e^{\frac{-i(\lambda+\nu)(\tau+t)}{2}} \right] \times \\ &\times f(\lambda) f(\nu) d\lambda d\nu + \int_0^{T-t} \int_0^{T-\tau} c_4(t, t_2-t_1, t_2-t_1+\tau) dt_1 dt_2. \end{aligned} \quad (14)$$

Доказательство. Имеем:

$$(T-t)(T-\tau) \operatorname{cov} \{\widehat{R}_T(t), \widehat{R}_T(\tau)\} = (T-t)(T-\tau) [M\widehat{R}_T(t)\widehat{R}_T(\tau) - \\ - M\widehat{R}_T(t) M\widehat{R}_T(\tau)] = \int_0^{T-t} \int_0^{T-\tau} [m_4(t_1, t_1+t, t_2, t_2+\tau) - \\ - m_2(t_1, t_1+t) m_2(t_2, t_2+\tau)] dt_1 dt_2.$$

Используя соотношение (13) и стационарность процесса $x(t)$, получаем:

$$(T-t)(T-\tau) \operatorname{cov} \{\widehat{R}_T(t), \widehat{R}_T(\tau)\} = \int_0^{T-t} \int_0^{T-\tau} c_4(t, t_2-t_1, t_2-t_1+\tau) dt_1 dt_2 + \\ + \int_0^{T-t} \int_0^{T-\tau} [R(t_2-t_1) R(t_2-t_1+\tau-t) + R(t_2-t_1+\tau) \times \\ \times R(t_2-t_1-t)] dt_1 dt_2 = B_1 + B_2.$$

Учитывая равенство (5), имеем

$$B_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{T-t} \int_0^{T-\tau} e^{i(t_1-t_2)(\lambda-\nu)} [e^{i(\tau-t)\nu} + e^{-i(\tau+\nu)t}] f(\lambda) f(\nu) dt_1 dt_2 d\lambda d\nu.$$

Отсюда, применяя элементарное равенство

$$\int_0^T e^{it\lambda} dt = \Delta_T(\lambda) e^{\frac{iT\lambda}{2}},$$

получаем

$$B_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_{T-t}(\lambda-\nu) \Delta_{T-\tau}(\lambda-\nu) [e^{\frac{i(\lambda+\nu)(\tau-t)}{2}} + \\ + e^{\frac{-i(\lambda+\nu)(\tau+t)}{2}}] f(\lambda) f(\nu) d\lambda d\nu. \text{ Теорема доказана.}$$

Из теоремы 3 вытекает следующий результат.

Теорема 4. Для любого $t \in [0, T]$

$$(T-t)^2 D\widehat{R}_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_{T-t}^2(\lambda-\nu) [1 + e^{-i(\lambda+\nu)t}] f(\lambda) f(\nu) d\lambda d\nu + \\ + \int_0^{T-t} \int_0^{T-t} c_4(t, t_2-t_1, t_2-t_1+t) dt_1 dt_2.$$

Рассмотрим асимптотические свойства моментов второго порядка оценки $\widehat{R}_T(\tau)$.

Теорема 5. Если $f(\lambda)$ непрерывна, $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda) d\lambda < \infty$, и

$$\frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-t} \int_0^{T-\tau} c_4(t, t_2-t_1, t_2-t_1+\tau) dt_1 dt_2 < \infty, \quad -\infty < t < \infty, \text{ то}$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (T-t) \operatorname{cov} \{\widehat{R}_T(t), \widehat{R}_T(\tau)\} = \\ = 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} \cos \nu \tau \cdot \cos \nu t \cdot f^2(\nu) d\nu + \int_{-\infty}^{\infty} c_4(t, -p, \tau-p) dp.$$

Доказательство. Из равенства (14) нетрудно получить, что

$$(T-t) \operatorname{cov} \{ \widehat{R}_T(t), \widehat{R}_T(\tau) \} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T-\tau} \Delta_{T-t}(\lambda-v) \Delta_{T-\tau}(\lambda-v) \times \\ \times \cos \frac{\lambda+v}{2} \tau \cdot \cos \frac{\lambda+v}{2} t f(\lambda) f(v) d\lambda dv + \\ + \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-t} \int_0^{T-\tau} c_4(t, t_2-t_1, t_2-t_1+\tau) dt_1 dt_2 = B_1 + B_2.$$

Делая замену переменных $t_1 - t_2 = p$, $t_2 = t_2$, получаем, что $B_2 =$
 $= \int_{-\infty}^{\infty} c_4(t, -p, \tau-p) dp.$

Рассмотрим B_1 . Сделаем замену переменных $\lambda = \mu + v$, $v = v$, тогда

$$B_1 = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T-\tau} \Delta_{T-t}(\mu) \Delta_{T-\tau}(\mu) \cos \left(v + \frac{1}{2} \mu \right) \tau \cos \left(v + \frac{1}{2} \mu \right) t \times \\ \times f(v+\mu) f(v) d\mu dv.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$m(\mu) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \cos \left(v + \frac{1}{2} \mu \right) \tau \cdot \cos \left(v + \frac{1}{2} \mu \right) t \cdot f(v+\mu) f(v) dv,$$

тогда

$$B_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T-\tau} \Delta_{T-t}(\mu) \Delta_{T-\tau}(\mu) \cdot m(\mu) d\mu = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T-\tau} \Delta_{T-\tau}^2(\mu) \cos \frac{\mu(\tau-t)}{2} \cdot m(\mu) d\mu + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{T-\tau} \Delta_{\tau-t}(\mu) \Delta_{T-\tau}(\mu) \cos \frac{\mu(T-\tau)}{2} \cdot m(\mu) d\mu = K_1 + K_2.$$

Используя соотношение (9), получаем, что $K_1 \rightarrow 2\pi \cdot m(0)$ при $T \rightarrow \infty$.

$$|K_2| \leq \max_{-\infty < \mu < \infty} |m(\mu)| \left[\int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{T-\tau} |\Delta_{\tau-t}(\mu) \Delta_{T-\tau}(\mu)| d\mu + \right. \\ \left. + 2 \int_{\delta}^{\infty} \frac{1}{(T-\tau) \left(\frac{\mu}{2} \right)^2} d\mu \right] \leq 2 \max_{-\infty < \mu < \infty} |m(\mu)| |\tau-t| \cdot \delta + \\ + \frac{8}{(T-\tau)\delta} \max_{-\infty < \mu < \infty} |m(\mu)|$$

для любого $\delta > 0$. В правой части последнего неравенства первое слагаемое можно сделать как угодно малым за счет выбора δ , а второе слагаемое стремится к нулю при $T \rightarrow \infty$ и фиксированном δ . Отсюда и вытекает доказательство теоремы.

Из теоремы 5 нетрудно получить следующий результат.

Теорема 6. Если $f(\lambda)$ непрерывна, $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda) d\lambda < \infty$ и $\int_{-\infty}^{\infty} c_4(t, -p, t-p) dp < \infty$, то справедливо соотношение

$$\lim_{T \rightarrow \infty} (T-t) \widehat{DR}_T(t) = 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} \cos^2 tv \cdot f^2(v) dv + \int_{-\infty}^{\infty} c_4(t, -p, t-p) dp.$$

Из доказанных теорем вытекает, что $\widehat{R}_T(\tau)$ является несмещенной и состоятельной оценкой ковариационной функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов.— М., 1976.
2. Бенткус Р.— Литовский матем. сб., 1972, т. 12, № 1, с. 55.
3. Виленкин С. Я. Статистическая обработка результатов исследования случайных функций.— М., 1979.
4. Журбенко И. Г., Труш Н. Н.— Литовский матем. сб., 1979, т. 19, № 1, с. 65.
5. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций.— М., 1968.
6. Parzen E.— Ann. Math. Statist., 1963, v. 28, p. 329.

УДК 517.948.3

В. В. МИТЮШЕВ

О ЛИНЕЙНОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ В КЛАССЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Рассматривается функциональное уравнение

$$\varphi(z) = G(z)\varphi(sz) + g(z), \quad |z| < 1. \quad (1)$$

Известные функции $G(z)$, $g(z)$ и искомая функция $\varphi(z)$ аналитичны в единичном круге, $|G(0)| \neq 1$, $s = e^{2\pi i\theta}$, где θ — иррациональное число. Представим функции $\varphi(z)$, $G(z)$, $g(z)$ в виде рядов Тейлора в окрестности нуля

$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$, $G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k z^k$, $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k$. Подставляя эти ряды в уравнение (1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях z , получим простой алгоритм вычисления коэффициентов α_k , $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\alpha_k = \gamma_0 s^k \alpha_k + \gamma_1 s^{k-1} \alpha_{k-1} + \dots + \gamma_k \alpha_0 + g_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Вопрос состоит в том, будет ли полученный ряд сходиться при $|z| < 1$. В работах [1, 2] доказывалась сходимость ряда при следующих ограничениях на известные функции:

а) $|\gamma_0| > 2$, $|\gamma_k| \leq \frac{(1-\delta)^k}{(1+k)^2}$, $k = 1, 2, \dots$; $|g_k| \leq (1-\delta)^k$, $k = 0, 1, \dots$
 $0 < \delta < 1$.

б) $G(t) = At + B$, $|A| < 2^{-\delta}$, $|B| > 2$, $|g_0| \leq 1$, $|g_k| \leq \frac{2^{-k} - |A|}{k^{\delta}}$, $k = 1, 2, \dots$; $\delta > \frac{1}{2}$.

в) $\min_{n \geq 0} |s^n - G(0)| > \frac{1-\delta}{\delta}$, $0 < \delta < 1$.

Л е м м а. Пусть непостоянная аналитическая в области D функция $f(z)$ принимает в D значения, по модулю равные единице. Тогда множество всех $t \in D$, таких что $|f(t)| = 1$ образует кривые, каждая из которых разделяет область D на две связанные компоненты.

Доказательство легко вывести из принципа максимума.

Пусть l_1 — такая кривая, что $|G(t)| = 1$, $t \in l_1$; $|G(z)| < 1$, $z \in D_{l_1}$; $|G(z)| > 1$, $z \in G_{l_1}$, где D_{l_1} — область, ограниченная кривой l_1 и содержащая точку $z=0$, G_{l_1} — дополнение множества $D_{l_1} \cup l_1$ до единичного круга. Пусть $r_1 = \min_{t \in l_1} |t|$, $R_1 = \max_{t \in l_1} |t|$. В случае, когда контур l_1 имеет другой вид, уравнение (1) будет решаться аналогично.

Применяя к уравнению (1) в круге $|z| \leq r_1$ принцип сжатых отображений, получим, что уравнение (1) имеет единственное решение, аналитическое, по крайней мере, в круге $|z| < r_1$. Записывая равенство (1) в виде

$$\varphi(z) = \frac{1}{G(s^{-1}z)} \varphi(s^{-1}z) - \frac{g(s^{-1}z)}{G(s^{-1}z)}$$