что $m_1 \geqslant \bar{m}_1$, то задача (1), (2) не имеет решения. Предположим, что $m_1 < \bar{m}_1$.

4.2.1. Если $\alpha > f(a_1)$, то поступаем следующим образом. Вычисляем значения $f(t) - \alpha$ и ее производной $f'(t)$ в точках $y_k = m_1 + kh$, $k = 0, 1, \ldots, \left[\frac{\bar{m}_1 - m_1}{h}\right]$. Если найдется значение y_s, для которого $f(y_s) - \alpha \leqslant 0$, а $f(y_{s+1}) - \alpha > 0$, то полагаем $t_1 = y_s$. Находим значение y_l, для которого $f'(y_l) \geqslant 0$, а $f'(y_{l+1}) < 0$. Полагаем $f_1 = f(y_l)$. Сравниваем значение f_1 с уровнем α. Если $\alpha > f_1$, то исходная задача не имеет решения. Если $\alpha = f_1$, то $t_1 = t_2 = y_l$. Если $\alpha < f_1$, то продолжаем вычисление значений $f(y_k) - \alpha$ для $k \geqslant l$. Значения производных $f'(y_k)$, $k \geqslant l$, теперь можно не вычислять. Значение y_r, для которого $f(y_r) - \alpha \geqslant 0$, а $f(y_{r+1}) - \alpha < 0$, полагаем равным t_2, т. е. $t_2 = y_r$.

4.2.2. В случае, когда $\alpha \leqslant f(a_1)$, $t_1 = m_1$. Значение t_2 находим, следуя пункту 4.1.

5. Рассмотрим случай, когда $a_1 < \beta_1 < b_1$. Можно показать, что на интервале $[\beta_1, b_1]$ функция $f(t)$ унимодальна.

5.1. Случай, когда $f(t)$ строго монотонно убывает на $[\beta_1, b_1]$, соответствует тому, что $f'(\beta_1) \leqslant 0$. В этом случае задача (1), (2) не имеет решения, так как $f(t) < 1/2$ для всех t.

5.2. Пусть $f'(\beta_1) > 0$. Вычислим m_1 и $\bar{m}_1$. Если $m_1 \geqslant \bar{m}_1$, то исходная задача не имеет решения. Если $m_1 < \bar{m}_1$, то вопрос о разрешимости задачи (1), (2) и о вычислении значений t_1 и t_2 решается как и в пункте 4.2.1.

6. В случае, когда $\beta_1 \geqslant b_1$, исходная задача не имеет решения, так как $f(t) < 1/2$ для всех t.

7. Рассмотрим иллюстративный пример:

$$x_1 + 2x_2 \to \max,$$
$$P(\xi_1 \leqslant x_1 + x_2 \leqslant \eta_1) \geqslant 0{,}6;$$
$$P(\xi_2 \leqslant x_1 - x_2 \leqslant \eta_2) \geqslant 0{,}7; \ x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0,$$

где ξ_1 и η_2 распределены равномерно, $\xi_1 \in [0,3]$, $\eta_2 \in [2,4]$, а $\eta_1 \in N(3{,}5; 1)$, $\xi_2 \in N(1{,}5; 0{,}25)$.

Используя вышеизложенную теорию, можно показать, что стохастические ограничения сводятся к следующим: $1{,}9 \leqslant x_1 + x_2 \leqslant 3{,}3$; $1{,}8 \leqslant x_1 - x_2 \leqslant 2{,}7$; $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$. Вычисления проведены с точностью $h = 0{,}1$. Линейная форма $x_1 + 2x_2$ достигает своего максимального значения при $x_1^0 = 2{,}5$; $x_2^0 = 0{,}7$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Юдин Д. Б. Математические методы управления в условиях неполной информации.— М., 1974.
2. Ермольев Ю. М. Методы стохастического программирования.— М., 1976.
3. Кирлица В. П.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ. и мех., 1979, № 3.
4. Kirlitza V. P., Vazquez R. e Yordi I.— Revista Investigaciòn Operacional, 1982, v. 3, № 3, p. 135.

УДК 519.854.2

В. А. СТРУСЕВИЧ

ЗАДАЧА ТРЕХ СТАНКОВ: ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СВОДИМОСТИ В ВЫПУКЛОЙ ФОРМЕ

В статье доказывается справедливость одного условия, достаточного для сведения известной в теории расписаний трехстаночной задачи Беллмана — Джонсона к задаче с двумя станками.

Рассматриваемую задачу можно сформулировать следующим образом. Имеются три станка A, B, и C, на которых последовательно обрабатываются n деталей, занумерованных числами из множества $N=\{1, 2, \ldots, n\}$. Пусть a_i, b_i и c_i — времена обработки детали $i\in N$ на станке A, B и C соответственно и $P(N)$ — множество всех перестановок $\Pi=(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$ элементов множества N. Определим функционал

$$K(\Pi)=\max_{1\leqslant u\leqslant v\leqslant n}\left(\sum_{i=1}^{u}a_{\pi_i}+\sum_{i=u}^{v}b_{\pi_i}+\sum_{i=v}^{n}c_{\pi_i}\right). \tag{1}$$

Требуется найти такую перестановку $\Pi_1\in P(N)$, что $K(\Pi_1)\leqslant K(\Pi)$ для любых $\Pi\in P(N)$.

Данная задача является NP-трудной [1], т. е. по-видимому, неразрешимой при помощи алгоритмов с полиномиально ограниченной трудоемкостью. Начиная с С. М. Джонсона [2], проводились многочисленные исследования специальных классов задачи трех станков, допускающих эффективное решение (см. обзоры [3, 4]). Один из возможных подходов к выявлению таких классов заключается в поиске условий, позволяющих свести трехстаночную задачу к специальной задаче Беллмана — Джонсона с двумя станками. Последняя задача состоит в поиске перестановки из $P(N)$, минимизирующей функционал

$$L(\Pi)=\max_{1\leqslant u\leqslant n}\left(\sum_{i=1}^{u}\alpha_{\pi_i}+\sum_{i=u}^{n}\beta_{\pi_i}\right), \tag{2}$$

где величины α_i и β_i трактуются как времена обработки детали $i\in N$ соответственно на первом и втором станке. Далее везде будем полагать, что α_i и β_i $(i\in N)$ вычисляются на основании параметров исходной трехстаночной задачи и удовлетворяют соотношению

$$\alpha_i=a_i+b_i,\ \beta_i=b_i+c_i\ \ (i\in N). \tag{3}$$

Будем говорить, что трехстаночная задача сводится к двухстаночной, если некоторая перестановка, минимизирующая функционал (2), где α_i и β_i $(i\in N)$ удовлетворяют (3), будет минимизировать и функционал (1). Для минимизации (2) в [2] предложен следующий

Алгоритм 1.

1. Детали, для которых $\alpha_i\leqslant\beta_i$, упорядочить по неубыванию значений α_i.

2. Вслед за ними упорядочить оставшиеся детали по невозрастанию значений β_i. Полученная перестановка оптимальна.

Трудоемкость алгоритма 1 составляет $O(n\log_2 n)$ элементарных операций.

Если при любой перестановке $\Pi\in P(N)$ функционал $K(\Pi)$ допускает представление

$$K(\Pi)=\max_{1\leqslant u\leqslant n}\left(\sum_{i=1}^{u}a_{\pi_i}+b_{\pi_u}+\sum_{i=u}^{n}c_{\pi_i}\right), \tag{4}$$

то с учетом (3) при всех $\Pi\in P(N)$ имеет место соотношение

$$L(\Pi)=K(\Pi)+\sum_{i=1}^{n}b_i, \tag{5}$$

из которого следует, что трехстаночная задача сводится к двухстаночной.

Пусть $R(N)=\{<i, j>\ :i\in N,\ j\in N,\ i\neq j\}$ — множество всех упорядоченных пар различных элементов из N. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1 [2]. Если имеет место условие

$$a_i\geqslant b_j\ \ (<i, j>\in R(N)) \tag{6}$$

или

$$c_i \geqslant b_j \quad (<i,\ j> \in R(N)), \tag{7}$$

то при всех $\Pi \in P(N)$ выполняется (4).

Теорема 2 [5]. Если существует такое $\tau \in [0,\ 1]$, что имеет место условие

$$\tau(a_i - b_j) + (1-\tau)(c_j - b_i) \geqslant 0 \quad (<i,\ j> \in R(N)), \tag{8}$$

то при всех $\Pi \in P(N)$ выполняется (4).

Таким образом, каждое из условий (6)—(8) является достаточным для сведения трехстаночной задачи к двухстаночной. Обобщения этих условий на случай произвольного числа станков получены в [6].

В обзоре [7] со ссылкой на неопубликованную работу Ф. Бурнса и Дж. Рукера приводится следующая

Теорема 3. Если существует такое $\tau \in [0,\ 1]$, что имеет место условие

$$\tau a_i + (1-\tau) c_i \geqslant b_j \quad (<i,\ j> \in R(N)), \tag{9}$$

то трехстаночная задача сводится к двухстаночной.

Насколько известно автору, доказательство этого факта до сих пор не опубликовано. Ниже приводится доказательство теоремы 3.

Нетрудно видеть, что в случае выполнения условия (9) при некотором $\tau \in [0,\ 1]$ детали можно разбить на два класса. Деталь $i \in N$ будем называть R-деталью, если для всех $j\ (<i,\ j> \in R(N))$ выполняются неравенства $a_i \leqslant c_i$ и $b_j \leqslant c_i$, и Q-деталью, если для всех $j\ (<i,\ j> \in R(N))$ справедливы неравенства $a_i \geqslant c_i$ и $b_j \leqslant a_i$. Пусть $P_1(N) \subset P(N)$ — множество всех таких перестановок деталей, в которых R-детали предшествуют Q-деталям.

Имеет место

Лемма 1. Если существует такое $\tau \in [0,\ 1]$, что выполняется условие (9), при всех $\Pi \in P_1(N)$ справедливо соотношение (4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что существует перестановка $\Pi \in P_1(N)$, для которой

$$K(\Pi) = \sum_{i=1}^{u} a_{\pi_i} + \sum_{i=u}^{v} b_{\pi_i} + \sum_{i=v}^{n} c_{\pi_i} \quad (1 \leqslant u < v \leqslant n). \tag{10}$$

Тогда деталь π_u должна быть R-деталью, а деталь π_v — Q-деталью, ибо в противном случае функционал $K(\Pi)$ удовлетворял бы (4) в силу теоремы 1. Из (10) вытекают неравенства

$$\sum_{i=u}^{v-1} b_{\pi_i} > \sum_{i=u+1}^{v} a_{\pi_i} \quad (11), \qquad \sum_{i=u+1}^{v} b_{\pi_i} > \sum_{i=u}^{v-1} c_{\pi_i}. \quad (12)$$

С другой стороны, из (9) можно заключить, что имеют место неравенства:

$$\tau\Big(\sum_{i=u+1}^{v} a_{\pi_i} - \sum_{i=u}^{v-1} b_{\pi_i}\Big) + (1-\tau)\Big(\sum_{i=u+1}^{v} c_{\pi_i} - \sum_{i=u}^{v-1} b_{\pi_i}\Big) \geqslant 0, \tag{13}$$

$$\tau\Big(\sum_{i=u}^{v-1} a_{\pi_i} - \sum_{i=u+1}^{v} b_{\pi_i}\Big) + (1-\tau)\Big(\sum_{i=u}^{v-1} c_{\pi_i} - \sum_{i=u+1}^{v} c_{\pi_i}\Big) \geqslant 0, \tag{14}$$

где $\tau \in [0,\ 1]$. Сравнивая (11) и (13), а также (12) и (14), убеждаемся, что выполняются неравенства

$$\sum_{i=u+1}^{v} c_{\pi_i} > \sum_{i=u}^{v-1} b_{\pi_i}, \quad (15) \qquad \sum_{i=u}^{v-1} a_{\pi_i} > \sum_{i=u+1}^{v} b_{\pi_i}. \quad (16)$$

Складывая (11) и (16), а также (12) и (15), после простых преобразований получим соотношение $a_{\pi_u} - c_{\pi_u} > a_{\pi_v} - c_{\pi_v}$, которое противоречит тому, что деталь π_u является R-деталью. Лемма доказана.

Для дальнейших рассуждений нам понадобится

Лемма 2 [8]. Пусть $\Pi \in P(N)$ — перестановка, минимизирующая функционал (2). Если для этой перестановки выполняется условие (5), то она будет минимизировать функционал (1).

Пусть перестановка $\Pi \in P_1(N)$ получена следующим образом: сначала упорядочены R-детали по неубыванию значений $a_i + b_i$, а затем Q-детали по невозрастанию значений $b_i + c_i$. Как и для всякой перестановки из $P_1(N)$, для Π выполняется соотношение (4), а значит, и (5). С другой стороны, учитывая (3), можно заключить, что Π будет той перестановкой, которую генерирует алгоритм 1, т. е. Π минимизирует функционал (2). Тогда из леммы 2 следует, что Π — оптимальное решение исходной задачи трех станков. Теорема 3 доказана.

Отметим, что условия (8) и (9) представляют собой выпуклые линейные комбинации условий (6) и (7), причем при $\tau = 1$ (8) и (9) совпадают с (6), а при $\tau = 0$ — с (7). Проверку выполнения условий (8) и (9) можно осуществить за $O(n^2)$ операций.

Вопрос о возможности обобщения условия (9) на случай произвольного числа станков заслуживает специального рассмотрения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Garey M. R., Johnson D. S., Sethi R.— Math. Oper. Res., 1976, v. 1, N 2, p. 117.
2. Джонсон С. М.— В кн.: Календарное планирование.— М., 1966, с. 33.
3. Szwarc W.— Oper. Res., 1977, v. 25, N 1, p. 70.
4. Nabeshima I.— Дэнки цусин дайгаку гакухо, Repts Univ. Electro-Communs, 1977, v. 28, N 1, p. 35.
5. Глебов Н. И.— Управляемые системы, 1978, вып. 17, с. 46.
6. Струсевич В. А.— Докл. АН БССР, 1981, т. 25, № 6, с. 518.
7. Graham R. L., Lawler E. L., Lenstra J. K., Rinnooy Kan A. H. G.— Ann. Discr. Math., 1979, v. 5, p. 287.
8. Szwarc W.— Nav. Res. Log. Quart., 1974, v. 21, N 1, p. 145.

УДК 519.24

Н. Н. ТРУШ

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕПРЕРЫВНОГО СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА И ИХ СВОЙСТВА

Исследованию оценок основных характеристик дискретного стационарного случайного процесса посвящена обширная литература (см., например, работы [1—6]). В то же время много прикладных задач в радиофизике, геофизике, статистических задач турбулентности жидкостей и газа требуют развития подобных вопросов в непрерывном случае. Некоторые аспекты исследования оценок характеристик непрерывного стационарного случайного процесса с помощью ковариационной функции можно найти в работах [3, 5].

В настоящей статье, используя спектральный подход, изучаем статистические свойства оценок математического ожидания m и ковариационной функции $R(\tau)$, $-\infty < \tau > \infty$, построенным по наблюдениям $x(t)$, $t \in [0, T]$, за непрерывным стационарным случайным процессом $x(t)$.

Следуя работам [3, 5], пусть

$$\widehat{m}_T = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)\,dt \tag{1}$$

оценка математического ожидания m, а статистика

$$\widehat{R}_T(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} [x(t) - m][x(t+\tau) - m]\,dt, \tag{2}$$