объемом выборки m) значения ранга l. Поэтому утверждение 2 хорошо применимо для практического вычисления оценки (2). Аналогичная табл. 2 таблица, вычисляемая с помощью приближенной формулы (7), не отличается от данной таблицы (при тех же m, n и $\varepsilon=0{,}01$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Закревский А. Д.— Докл. АН БССР, 1981, т. 25, № 3, с. 236.
2. Закревский А. Д.— Кибернетика, 1982, № 1, с. 1.
3. Закревский А. Д., Данг Динь Куанг.— Докл. АН БССР, 1983, т. 27, № 3, с. 225.
4. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложений.— М., 1967, т. 1.

УДК 519.21

В. П. КИРЛИЦА

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ДВУСТОРОННИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Рассмотрим следующую задачу линейного стохастического программирования:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max, \tag{1}$$

$$P\left\{\xi_i \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant \eta_i\right\} \geqslant \alpha_i, \ i=\overline{1,\ m}; \ x_j \geqslant 0, \ j=\overline{1,\ n}, \tag{2}$$

где ξ_i, η_i, $i=\overline{1,\ m}$ — независимые случайные величины, а остальные элементы, участвующие в (1), (2),— детерминированные величины; $1/2< <\alpha_i \leqslant 1$, $i=\overline{1,\ m}$.

В монографии [1] рассмотрена задача (1), (2) для случая, когда в (2) случайные величины ξ_i отсутствуют. Подробная библиография работ по стохастическому программированию содержится в [1, 2]. Задача (1), (2) является естественным стохастическим аналогом задач обычного линейного программирования с двусторонними ограничениями. В [3] рассмотрена задача (1), (2) для случая, когда случайные величины ξ_i, η_i распределены равномерно. Показано, что в этом случае задача (1), (2) сводится к задаче обычного линейного программирования с двусторонними ограничениями.

В данной работе, которая является развитием [4], рассматривается случай, когда одна из величин ξ_i, η_i распределена нормально, а другая — равномерно. Показано, что и тогда задача (1), (2) сводится к задаче обычного линейного программирования с двусторонними ограничениями.

Рассмотрим, каким образом вероятностные ограничения (2) сводятся к детерминированным. Поскольку ограничения (2) однотипны, но в дальнейшем, для упрощения обозначений, будем рассматривать ограничение:

$$P\left\{\xi \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant \eta\right\} \geqslant \alpha, \ 1/2<\alpha\leqslant 1. \tag{3}$$

В [3] показано, что стохастическое ограничение (3) сводится к детерминированному ограничению:

$$f(t)=F_\xi(t)[1-F_\eta(t)]\geqslant\alpha, \tag{4}$$

где $F_\xi(t)$, $F_\eta(t)$ — функции распределения случайных величин ξ и η, а $t=\sum_{j=1}^{n} a_j x_j$. Ниже будет показано, что функция $f(t)$ является унимодальной, т. е. имеет один локальный максимум, который совпадает с глобальным. В этом случае неравенство (4) для $\alpha \leqslant f_1$ разрешимо относительно $t: t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. Здесь и в дальнейшем через t_1 и t_2 обозначены корни уравнения $f(t)=\alpha$, а через f_1 — максимальное значение функции $f(t)$. Итак, если неравенство (4) разрешимо относительно t, то ограничение (3) сводится к детерминированному ограничению:

$$t_1 \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant t_2. \tag{5}$$

Таким образом, при сведении ограничения (3) к детерминированному ограничению (5) основным моментом является вычисление значений f_1, t_1 и t_2. Опишем процедуру вычисления этих значений.

1. Пусть случайная величина ξ распределена равномерно на интервале $[a, b]$, а случайная величина η распределена нормально, $\eta \in N(\beta, \sigma^2)$. Функция $f(t)$, $t \in [a, b]$, в этом случае задается формулой: $f(t) = \frac{t-a}{b-a} \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{t-\beta}{\sigma}\right)\right]$, где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-s^2/2}\, ds$ — табулированная функция. Возможны следующие случаи: 1) $b \leqslant \beta$, 2) $a < \beta < b$, 3) $\beta \leqslant a$.

1. Рассмотрим сначала первый случай: $b \leqslant \beta$. Покажем, что функция $f(t)$ — унимодальна. Для $t \geqslant b$, $f(t) = 1 - F_\eta(t)$ и для этих значений t функция $f(t)$ монотонно убывает. Для $a \leqslant t \leqslant b$ производная $f'(t)$ функции $f(t)$ вычисляется по формуле:

$$f'(t) = \frac{1}{b-a} \cdot \left[1 - \Phi\left(\frac{t-\beta}{\sigma}\right)\right] - \frac{t-a}{\sigma(b-a)} \cdot \varphi\left(\frac{t-\beta}{\sigma}\right), \tag{6}$$

где функция $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ — табулирована. Из (6) видно, что $f'(t)$ является разностью между монотонно убывающей функцией $\frac{1}{b-a} \times \left[1 - \Phi\left(\frac{t-\beta)}{\sigma}\right)\right]$ и монотонно возрастающей функцией $\frac{t-a}{\sigma(b-a)} \times \varphi\left(\frac{t-\beta}{\sigma}\right)$ и $f'(a+0) > 0$. Это означает, что иа интервале $[a, b]$ производная $f'(t)$ либо положительна, либо не более одного раза обращается в ноль. Таким образом показано, что $f(t)$ — унимодальная функция.

Итак, поведение функции $f(t)$, $t \in [a, b]$ существенным образом зависит от знака $f'(b-0)$. Значение

$$f'(b-0) = \frac{1}{b-a}\left[1 - \Phi\left(\frac{b-\beta}{\sigma}\right)\right] - \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{b-\beta}{\sigma}\right)$$

легко можно вычислить, поскольку функции $\Phi(x)$ и $\varphi(x)$ табулированы.

1.1. Если $f'(b-0) \geqslant 0$, то на интервале $[a, b]$ функция $f(t)$ строго монотонно возрастает, достигая в точке $t=b$ максимума $f_1 = f(b) = 1 - \Phi\left(\frac{b-\beta}{\sigma}\right)$. Сравниваем уровень α с f_1. Если $\alpha > f_1$, то задача (1), (2) не имеет решения. Если $\alpha = f_1$, то $t_1 = t_2 = b$. Если $\alpha < f_1$, то корни t_1 и t_2 обязаны принадлежать отрезку $[\underline{m}, \overline{m}]$, где $\underline{m}$ — корень уравнения $F_\xi(t) = \alpha$, а $\overline{m}$ — корень уравнения $1 - \Phi\left(\frac{t-\beta}{\sigma}\right) = \alpha$, т. е. $\underline{m} = a + \alpha(b-a)$, $t_2 = \overline{m} = \beta + \sigma\Phi^{-1}(1-\alpha)$. Вычислим приближенное значение корня t_1. Для этого зададим достаточно малый шаг $h > 0$, который будет характеризовать точность вычислений. Последовательно вычисляем значения $f(t) - \alpha$ в точках $y_k = \underline{m} + kh$, $k = 0, 1, \ldots, \left[\frac{b-\underline{m}}{h}\right]$, где символ $[s]$ означает целую часть числа s. Значение y_l, для которого $f(y_l) - \alpha \leqslant 0$, а $f(y_{l+1}) - \alpha > 0$, принимаем за приближенное значение t_1, т. е. $t_1 = y_l$.

1.2. Рассмотрим теперь случай, когда $f'(b-0) < 0$. Здесь функция $f(t)$ монотонно возрастает, достигая своего максимума, а затем начинает убывать. Вычисляем значения $\underline{m}$ и $\overline{m}$, которые имеют прежний смысл. Очевидно, если $\underline{m} \geqslant \overline{m}$, то исходная задача не имеет решения. Предположим, что $\underline{m} < \overline{m}$. Вычислим значение $f(b) = 1 - \Phi\left(\frac{b-\beta}{\sigma}\right)$.

1.2.1. В случае, если $\alpha > f(b)$, вычисляем приближенные значения t_1 и t_2 (если они существуют) следующим образом. Последовательно вычисляем значения функции $f(t) - \alpha$ и ее производной $f'(t)$ в точках $y_k = \underline{m} + kh$, $k = 0, 1, \ldots, \left[\frac{\overline{m} - \underline{m}}{h}\right]$. Значение t_1 получаем, используя алгоритм пункта 1.1. Отмечаем точку y_s, для которой $f'(y_s) \geqslant 0$, а $f'(y_{s+1}) < 0$. Полагаем $f_1 = f(y_s)$. Сравниваем полученное значение f_1 с уровнем α. Если $\alpha > f_1$, то исходная задача не имеет решения. Если $\alpha = f_1$, то $t_1 = t_2 = y_s$. Если $\alpha < f_1$, то продолжаем вычисление значений функции $f(t) - \alpha$ в точках y_k, $k \geqslant s+1$. Значения производных $f'(t)$ в этих точках можно не вычислять. Значение y_r, для которого $f(y_r) - \alpha \geqslant 0$, а $f(y_{r+1}) - \alpha < 0$, полагаем равным t_2, т. е. $t_2 = y_r$.

1.2.2. Осталось рассмотреть случай, когда $\alpha \leqslant f(b)$. Очевидно, что здесь $t_2 = \overline{m}$. Значение t_1 вычисляем, следуя алгоритму пункта 1.1.

2. Перейдем к рассмотрению случая, когда $a < \beta < b$. Для $t \geqslant \beta$, $f(t) < 1/2$. На интервале $[a, \beta]$ функция $f(t)$ является унимодальной. Это подтверждается рассуждениями, аналогичными приведенным в пункте 1.

2.1. Случай, когда $f(t)$, $t \in [a, \beta]$ строго монотонно возрастает, не представляет интереса, так как $f(t) < 1/2$ и исходная задача не имеют решения. Этот случай реализуется, когда $f'(\beta) \geqslant 0$, т. е. когда $(\beta - a)/\sigma\sqrt{2\pi} \leqslant 1/2$.

2.2. Пусть $f'(\beta) < 0$, т. е. $(\beta - a)/\sigma\sqrt{2\pi} > 1/2$. Если $\underline{m} \geqslant \overline{m}$, то задача (1), (2) не имеет решения. Для $\underline{m} < \overline{m}$ вопрос о разрешимости исходной задачи и о вычислении значений t_1 и t_2 решается как и в пункте 1.2.1.

3. Рассмотрим третий случай: $\beta \leqslant a$. Здесь исходная задача не имеет решения, так как $f(t) \leqslant 1/2$.

II. Пусть теперь случайная величина $\xi \in N(\beta_1, \sigma_1^2)$, а величина η распределена равномерно на интервале $[a_1, b_1]$. Структура функции $f(t)$ задается в этом случае формулой: $f(t) = \Phi\left(\frac{t - \beta_1}{\sigma_1}\right) \cdot \frac{b_1 - t}{b_1 - a_1}$. Производная функции $f(t)$ вычисляется по формуле:

$$f'(t) = \frac{b_1 - t}{\sigma_1(b_1 - a_1)} \cdot \varphi\left(\frac{t - \beta_1}{\sigma_1}\right) - \frac{1}{b_1 - a_1} \cdot \Phi\left(\frac{t - \beta_1}{\sigma_1}\right).$$

Значения функций $f(t)$ и $f'(t)$ легко вычисляются по таблицам значений функций $\Phi(x)$ и $\varphi(x)$. Здесь также возможны три различных случая: 4) $\beta_1 \leqslant a_1$, 5) $a_1 < \beta_1 < b_1$, 6) $\beta_1 \geqslant b_1$.

4. Рассмотрим сначала случай, когда $\beta_1 \leqslant a_1$. Аналогично тому, как было доказано в первой части, можно показать, что функция $f(t)$ является унимодальной.

4.1. Предположим сначала, что $f(t)$, $t \in [a_1, b_1]$ строго монотонно убывает. Этот случай реализуется, когда $f'(a_1 + 0) \leqslant 0$. Здесь $f_1 = f(a_1)$. Сравниваем значение f_1 с уровнем α. Если $\alpha > f_1$, то исходная задача не имеет решения. Если $\alpha = f_1$, то $t_1 = t_2 = a_1$. Пусть $\alpha < f_1$. Обозначим через $\underline{m}_1$ корень уравнения $\Phi\left(\frac{t - \beta_1}{\sigma_1}\right) = \alpha$, а через $\overline{m}_1$ — корень уравнения $\frac{b_1 - t}{b_1 - a_1} = \alpha$, т. е. $\underline{m}_1 = \beta_1 + \sigma_1 \Phi^{-1}(\alpha)$, $\overline{m}_1 = b_1 - \alpha(b_1 - a_1)$. Очевидно, что в случае $\alpha < f_1$ корень $t_1 = \underline{m}_1$, а $t_2 \in (a_1, \overline{m}_1)$. Найдем приближенное значение t_2. Последовательно вычисляем значения $f(t) - \alpha$ в точках $y_k = \overline{m}_1 - kh$, $k = 0, 1, \ldots, \left[\frac{\overline{m}_1 - a_1}{h}\right]$. Значение y_s, для которого $f(y_s) - \alpha \leqslant 0$, а $f(y_{s+1}) - \alpha > 0$ полагаем равным t_2, т. е. $t_2 = y_s$.

4.2. Пусть $f'(a_1 + 0) > 0$. Вычисляем значения $\underline{m}_1$ и $\overline{m}_1$. Если окажется, что $m_1 \geqslant \bar{m}_1$, то задача (1), (2) не имеет решения. Предположим, что $\underline{m}_1 < \bar{m}_1$.

4.2.1. Если $\alpha > f(a_1)$, то поступаем следующим образом. Вычисляем значения $f(t)-\alpha$ и ее производной $f'(t)$ в точках $y_k = \underline{m}_1 + kh$, $k = 0, 1, \ldots, \left[\frac{\bar{m}_1 - \underline{m}_1}{h}\right]$. Если найдется значение y_s, для которого $f(y_s)-\alpha \leqslant 0$, а $f(y_{s+1})-\alpha > 0$, то полагаем $t_1 = y_s$. Находим значение y_l, для которого $f'(y_l) \geqslant 0$, а $f'(y_{l+1}) < 0$. Полагаем $f_1 = f(y_l)$. Сравниваем значение f_1 с уровнем α. Если $\alpha > f_1$, то исходная задача не имеет решения. Если $\alpha = f_1$, то $t_1 = t_2 = y_l$. Если $\alpha < f_1$, то продолжаем вычисление значений $f(y_k)-\alpha$ для $k \geqslant l$. Значения производных $f'(y_k)$, $k \geqslant l$, теперь можно не вычислять. Значение y_r, для которого $f(y_r)-\alpha \geqslant 0$, а $f(y_{r+1})-\alpha < 0$, полагаем равным t_2, т. е. $t_2 = y_r$.

4.2.2. В случае, когда $\alpha \leqslant f(a_1)$, $t_1 = \underline{m}_1$. Значение t_2 находим, следуя пункту 4.1.

5. Рассмотрим случай, когда $a_1 < \beta_1 < b_1$. Можно показать, что на интервале $[\beta_1, b_1]$ функция $f(t)$ унимодальна.

5.1. Случай, когда $f(t)$ строго монотонно убывает на $[\beta_1, b_1]$, соответствует тому, что $f'(\beta_1) \leqslant 0$. В этом случае задача (1), (2) не имеет решения, так как $f(t) < 1/2$ для всех t.

5.2. Пусть $f'(\beta_1) > 0$. Вычислим $\underline{m}_1$ и $\bar{m}_1$. Если $\underline{m}_1 \geqslant \bar{m}_1$, то исходная задача не имеет решения. Если $\underline{m}_1 < \bar{m}_1$, то вопрос о разрешимости задачи (1), (2) и о вычислении значений t_1 и t_2 решается как и в пункте 4.2.1.

6. В случае, когда $\beta_1 \geqslant b_1$, исходная задача не имеет решения, так как $f(t) < 1/2$ для всех t.

7. Рассмотрим иллюстративный пример:

$$x_1 + 2x_2 \to \max,$$
$$P(\xi_1 \leqslant x_1 + x_2 \leqslant \eta_1) \geqslant 0{,}6;$$
$$P(\xi_2 \leqslant x_1 - x_2 \leqslant \eta_2) \geqslant 0{,}7; \; x_1 \geqslant 0, \; x_2 \geqslant 0,$$

где ξ_1 и η_2 распределены равномерно, $\xi_1 \in [0,3]$, $\eta_2 \in [2,4]$, а $\eta_1 \in N(3{,}5;\ 1)$, $\xi_2 \in N(1{,}5;\ 0{,}25)$.

Используя вышеизложенную теорию, можно показать, что стохастические ограничения сводятся к следующим: $1{,}9 \leqslant x_1 + x_2 \leqslant 3{,}3$; $1{,}8 \leqslant x_1 - x_2 \leqslant 2{,}7$; $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$. Вычисления проведены с точностью $h = 0{,}1$. Линейная форма $x_1 + 2x_2$ достигает своего максимального значения при $x_1^0 = 2{,}5$; $x_2^0 = 0{,}7$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Юдин Д. Б. Математические методы управления в условиях неполной информации.— М., 1974.
2. Ермольев Ю. М. Методы стохастического программирования.— М., 1976.
3. Кирлица В. П.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, мат., физ. и мех., 1979, № 3.
4. Kirlitza V. P., Vazquez R. e Yordi I.— Revista Investigaciòn Operacional, 1982, v. 3, № 3, p. 135.

УДК 519.854.2

В. А. СТРУСЕВИЧ

ЗАДАЧА ТРЕХ СТАНКОВ: ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СВОДИМОСТИ В ВЫПУКЛОЙ ФОРМЕ

В статье доказывается справедливость одного условия, достаточного для сведения известной в теории расписаний трехстаночной задачи Беллмана — Джонсона к задаче с двумя станками.

Рассматриваемую задачу можно сформулировать следующим обра-