ПРЕДЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОЦЕНКИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА С ПУАССОНОВСКОЙ АМПЛИТУДНОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ

Т. И. Воротницкая

Институт бизнеса БГУ, г. Минск, Беларусь
E-mail: varatnitskaya@gmail.com

В статье рассмотрена оценка спектральной плотности стационарного случайного процесса с пуассоновской амплитудной модуляцией, приведены ее статистические свойства и исследовано предельное распределение статистики при наложении условия m-зависимости процесса.

Ключевые слова: *спектральная плотность, предельное распределение, стационарный процесс*

Одной из задач статистического анализа случайных процессов является построение оценок их основных характеристик и исследование их статистических свойств. Асимптотические методы анализа позволяют найти предельное распределение предлагаемых оценок при числе наблюдений, стремящемся к бесконечности. Это позволяет получить информацию о структуре исследуемых процессов при обработке данных.

Большинство исследований, связанных с анализом амплитудно-модулированных случайных процессов, посвящено изучению процессов с пропущенными наблюдениями [1, 2]. В данной работе рассмотрены оценки спектральной плотности стационарных случайных процессов в более общем случае пуассоновской амплитудной модуляции.

Пусть $X(t),\ t\in Z$ стационарный в широком смысле случайный процесс с математическим ожиданием m^X, ковариационной функцией $R^X(\tau),\ \tau\in Z$, спектральной плотностью $f^X(\lambda),\ \lambda\in\Pi=[-\pi,\pi]$. Предположим, что мы не имеем возможности получать наблюдения за стационарным случайным процессом $X(t),\ t\in Z,$ а получаем наблюдения за некоторым процессом $Y(t),\ t\in Z,$ который связан с процессом $X(t),\ t\in Z$ соотношением

$$Y(t)=X(t)d(t), \tag{1}$$

$t\in Z$, где $d(t)$ - пуассоновская случайная величина с параметром α, α>0. Заметим, что в этом случае математическое ожидание $d(t)$ равно дисперсии $d(t),$ т.е. $m^d=D^d=\alpha.$

Для процесса $Y(t),\ t\in Z$ введем следующие обозначения: математическое ожидание $m^Y(t),\ t\in Z$ ковариационная функция $R^Y(t_1,t_2),\ t_1,t_2\in Z$, спектральная плотность $f^Y(\lambda_1,\lambda_2),\ \lambda_1,\lambda_2\in\Pi$.

Пусть в результате некоторого эксперимента получено T последовательных через равные промежутки времени наблюдений

$$Y(0),\ Y(1), \ldots, Y(T-1) \qquad (2)$$

за процессом $Y(t)$, $t \in Z$, который связан с процессами $X(t)$ и $d(t)$, $t \in Z$ соотношением (1).

В качестве оценки спектральной плотности [3], построенной по результатам наблюдений (2), рассматривается статистика вида

$$\hat{f}^T(\lambda_s) = \sum_{k=-\left[\frac{T}{2}\right]+1}^{\left[\frac{T}{2}\right]} \varphi^T(k) \hat{I}^T(\lambda_{s+k}) \qquad (3)$$

где $\varphi(x)$ - спектральное окно: четная, не зависящая от T действительная функция, для которой обычно предполагается, что при $T \to \infty$, $m_T \to 0,\ Tm_T \to \infty, m_T > 0, T = 1,2,\ldots$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left| \varphi\left(\frac{j}{m_T T}\right) \right| < \infty \text{ и } \sum_{j=-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{j}{m_T T}\right) \neq 0,$$

$$I^T(\lambda) = \frac{1}{2\pi T} \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{s=0}^{T-1} \frac{Y(t)Y(s)}{C_{t-s}^d} e^{-i\lambda(t-s)}, \lambda \in \Pi,$$

$$C_\tau^d = Md(t+\tau)d(t) = \begin{cases} \alpha + \alpha^2, \tau = 0, \\ \alpha^2, \tau \neq 0, \end{cases} \qquad (4)$$

$\lambda_s = \frac{2\pi s}{T},\ -\left[\frac{T}{2}\right] + 1 \le s \le \left[\frac{T}{2}\right],\ \left[\frac{T}{2}\right]$ - целая часть числа $\frac{T}{2}$, для которой справедлива следующая теорема.

Теорема. Если семиинвариантная спектральная плотность четвёртого порядка $f_4^X(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ непрерывна на Π^3, спектральная плотность $f^X(\lambda)$ непрерывна на Π и $\sum_{k=-\left[\frac{T}{2}\right]+1}^{\left[\frac{T}{2}\right]} \left[\varphi^T(k)\right]^2 \xrightarrow[T\to\infty]{} 0$, то статистика $\hat{f}^T(\lambda_s)$, задаваемая равенством (3) является состоятельной в среднеквадратическом смысле.

Если предположить, что $X(t),\ t\in Z$ стационарный в широком смысле m-зависимый процесс [4] с непрерывной на Π^3 семиинвариантной спектральной плотностью четвёртого порядка $f_4^X(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ и непрерывной на

Π спектральной плотностью $f^X(\lambda)$, то можно доказать следующую теорему.

Теорема. Статистика (3) имеет предельное нормальное распределение с математическим ожиданием, удовлетворяющим соотношению $\lim\limits_{T\to\infty} M \hat{f}^T(\lambda_s) = f^X(\lambda)$, и дисперсией

$$D\hat{f}^T(\lambda_s) = \sum_{k_1=-\left[\frac{T}{2}\right]+1}^{\left[\frac{T}{2}\right]} \sum_{k_2=-\left[\frac{T}{2}\right]+1}^{\left[\frac{T}{2}\right]} \varphi^T(k_1)\varphi^T(k_2)\operatorname{cov}\left\{I^T(\lambda_{s+k_1}), I^T(\lambda_{s+k_2})\right\}.$$

Доказательство теоремы основывается на свойствах ядерных функций и следующем свойстве ковариации периодограммной оценки спектральной плотности (4), полученном, исходя из свойств смешанных моментов и семиинвариантов случайного процесса *X(t)*:

$$\operatorname{cov}\left\{I^T(\lambda_1), I^T(\lambda_2)\right\} \xrightarrow[T\to\infty]{} \begin{cases} 0, \ \lambda_1 \pm \lambda_2 \neq 0(\operatorname{mod} 2\pi) \\ f^X(\lambda_1)f^X(\lambda_2), \lambda_1 \pm \lambda_2 = 0(\operatorname{mod} 2\pi) \end{cases},$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \Pi$$

Далее доказательство проводится аналогично теореме, доказанной в работе [1] для периодограммной оценки спектральной плотности немодулированного случайного процесса.

В работе получена оценка спектральной плотности случайного процесса в том случае, когда его непосредственное исследование невозможно, а могут быть получены лишь наблюдения, на которые наложен модулирующий пуассоновский случайный процесс. Такая оценка полезна при проектировании различных стохастических систем, функционирующих в условиях случайных внешних воздействий.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. Труш Н. Н. Асимптотические методы статистического анализа временных рядов // Минск, БГУ, 1999. 220 с.
2. Myung Sook Lee Strong consistency for AR model with missing data // J. Korean Math. Soc. 2004. №6. С. 1071-1086.
3. Воротницкая Т. И. Оценки ковариационной функции и спектральной плотности стационарного случайного процесса с пуассоновскими пропусками наблюдений // Вестник БрГУ им. А.С. Пушкина. 2008. Т. 31, №2. С. 3-11.
4. Бриллинджер Д. Временные ряды. Обработка данных и теория // М.: Мир, 1980. 536 с.