

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
Кафедра дискретной математики и алгоритмики

МОЛОЧКО Илья Павлович

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ
МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ В КАПИЛЛЯРЕ**

Магистерская диссертация

специальность 1-31 80 09 «Прикладная математика и информатика»

Научный руководитель
Полевиков Виктор Кузьмич
кандидат физико-математических наук,
доцент

Допущен к защите

«_____» _____ 2022 г

Зав. кафедрой дискретной математики и алгоритмики,

_____ В.М. Котов

доктор физико-математических наук, профессор

Минск, 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ	3
РЕФЕРАТ.....	4
ВВЕДЕНИЕ	7
ГЛАВА 1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ	9
1.1 Основные уравнения.....	10
1.2 Параметрическая постановка.....	12
1.3 Непараметрическая постановка.....	15
1.4 Замена переменных.....	17
ГЛАВА 2 ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ.....	22
2.1 Параметрическая постановка.....	22
2.2 Непараметрическая постановка.....	27
2.3 Адаптивная сетка	30
ГЛАВА 3 ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.....	36
3.1 Поведение жидкости в отсутствие магнитного поля	36
3.2 Сравнение с теоретическими оценками.....	37
3.3 Поведение жидкости под влиянием гравитационных и магнитных полей.....	38
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	46
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	47

ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

C – объемная концентрация частиц

C_0 – средняя концентрация, соответствующая равномерному распределению частиц

M – намагниченность магнитной жидкости

M_s – намагниченность насыщения магнитной жидкости

v – скорость конвективного движения

D – коэффициент диффузии

H – напряженность магнитного поля

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\Gamma_H}{\text{м}}$ – магнитная проницаемость вакуума

m_m – магнитный момент частицы

$k = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{к}}$ – постоянная Больцмана

T – температура частицы

m – масса частицы

$L(\gamma) = cth\gamma - \frac{1}{\gamma}$ – функция Ланжевена

ρ – плотность жидкости

Ω – часть пространства, которое занимает жидкость

$\sigma, \tilde{\sigma}, \sigma_0$ – коэффициенты поверхностного натяжения на поверхностях контакта жидкости и газа со стенкой сосуда и между собой, соответственно

α_1, α_2 – углы смачивания со стенкой проводника и внешнего сосуда, соответственно

R_1, R_2 – радиусы капиллярной трубки и внешнего сосуда

K – сумма главных кривизн несвязной капиллярной поверхности

РЕФЕРАТ

Магистерская диссертация, 48 страниц, 8 рисунков, 15 источников.

Ключевые слова: МАГНИТНАЯ ЖИДКОСТЬ, КОНЦЕНТРАЦИЯ, ФЕРРОГИДРОСТАТИКА, МАГНИТНОЕ ПОЛЕ, СВОБОДНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ, ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ИТЕРАЦИОННО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД, АДАПТИВНАЯ СЕТКА, ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

Объектом исследования является осесимметричная задача феррогидростатики о равновесных формах свободной поверхности магнитной жидкости в вертикальном цилиндрическом капилляре, помещенном в широкий цилиндрический сосуд.

Цель работы – численное моделирование осесимметричных равновесных форм свободной поверхности магнитной жидкости в вертикальном цилиндрическом капилляре, помещенном в широкий цилиндрический сосуд, под влиянием магнитных и гравитационных сил.

Методы исследования – итерационно-разностный метод.

Результаты работы – разработан и реализован алгоритм численного решения задачи о равновесных формах свободной поверхности магнитной жидкости в капилляре; построен и реализован алгоритм генерации адаптивной сетки, который позволяет описывать пикообразные конфигурации магнитной жидкости в сильном магнитном поле; проиллюстрированы равновесные формы в капилляре и внешнем сосуде при различных физических и геометрических параметрах задачи.

Область применения – прикладные задачи феррогидростатики с несвязной свободной поверхностью, в том числе в условиях пониженной гравитации, а также сильного магнитного поля.

РЭФЕРАТ

Магістарская дысертацыя, 48 старонак, 8 малюнкаў, 15 крыніц.

КЛЮЧАВЫЯ СЛОВЫ: МАГНІТНАЯ ВАДКАСЦЬ, КАНЦЭНТРАЦЫЯ, ФЕРАГІДРАСТАТЫКА, МАГНІТНАЕ ПОЛЕ, СВАБОДНАЯ ПАВЕРХНЯ, ПАРАМЕТРЫЧНЫЯ ДЫФЕРЭНЦЫЯЛЬНЫЯ ЎРАЎНЕННІ, ЛІКАВАЕ МАДЭЛЯВАННЕ, ІТЭРАЦЫЙНА-РОЗНАСНЫ МЕТАД, АДАПТЫЎНАЯ СЕТКА, ЛІКАВЫЯ ВЫНІКІ.

Аб'ект даследавання – восевасіметрычная задача ферагідрастатыкі аб раўнаважкіх формах свабоднай паверхні магнітнай вадкасці ў вертыкальным цыліндрычным капіляры, змешчаным у шырокі цыліндрычны сасуд.

Мэта работы – лікавае мадэляванне восевасіметрычных раўнаважкіх формаў свабоднай паверхні магнітнай вадкасці ў вертыкальным цыліндрычным капіляры, змешчаным у шырокі цыліндрычны сасуд, пад уплывам магнітных і гравітацыйных сіл.

Метады даследавання - ітэрацыйна-рознасны метады.

Вынікі работы – распрацаваны і рэалізаваны алгарытм лікавага рашэння задачы аб раўнаважкіх формах свабоднай паверхні магнітнай вадкасці ў капіляры; пабудаваны і рэалізаваны алгарытм генерацыі адаптыўнай сеткі, які дазваляе апісваць пікападобныя канфігурацыі магнітнай вадкасці ў моцным магнітным полі; праілюстраваны раўнаважкія формы ў капіляры і знешнім сасудзе пры розных фізічных і геаметрычных параметрах задачы.

Вобласць прымянення – прыкладныя задачы ферагідрастатыкі з няскладнай свабоднай паверхняй, у тым ліку ва ўмовах паніжанай гравітацыі, а таксама моцнага магнітнага поля.

ABSTRACT

Master thesis, 48 pages, 8 figures, 15 references.

Keywords: MAGNETIC LIQUID, CONCENTRATION, FERROHYDROSTATICS, MAGNETIC FIELD, FREE SURFACE, PARAMETRIC DIFFERENTIAL EQUATIONS, NUMERICAL SIMULATION, ITERATIVE-DIFFERENCE METHOD, ADAPTIVE GRID, NUMERICAL RESULTS.

Object of research - an axisymmetric problem of ferrohydrostatics about the equilibrium forms of the free surface of a magnetic liquid in a vertical cylindrical capillary placed in a wide cylindrical vessel.

Purpose of work - the numerical simulation of axisymmetric equilibrium forms of the free surface of a magnetic liquid in a vertical cylindrical capillary placed in a wide cylindrical vessel in a capillary placed in a wide cylindrical vessel under the influence of magnetic and gravitational forces.

The methodology – iterative-difference method.

The result – algorithm for numerical solution of the problem of equilibrium forms of the free surface of a magnetic fluid in a capillary has been developed and implemented; to describe peak-shaped configurations of a magnetic fluid in a high magnetic field, an algorithm of generation of adaptive grid nodes in accordance with the surface curvature is developed; equilibrium forms in the capillary and external vessel are illustrated for various physical and geometric parameters of the problem.

The field of application – applied problems of ferrohydrostatics with a disconnected free surface, including in conditions of under low gravity and in a high magnetic field.

ВВЕДЕНИЕ

Магнитная жидкость является технологическим материалом, который нашел широкое применение в приборостроении, машиностроении, авиакосмической и оборонной промышленности. Она представляет собой стабильную коллоидную суспензию ферромагнитных частиц, размер которых порядка 10^{-8} м, и которые находятся в состоянии броуновского движения в жидкости-носителе, в качестве которой обычно выступает керосин, трансформаторное масло, вода, биосовместимая жидкость. Ферромагнитные частицы покрываются поверхностно-активным веществом, которое образует защитную оболочку вокруг частиц для предотвращения их слипания. Благодаря тому, что частицы обладают магнитными свойствами, в магнитной жидкости происходит не только броуновское движение, но и диффузионный процесс магнитофореза. Этот процесс диффузии становится значительным, если магнитная жидкость находится под воздействием высокоградиентного магнитного поля.

Основной целью настоящего исследования является осесимметричная задача капиллярной феррогидростатики о равновесных формах магнитной жидкости в вертикальном цилиндрическом капилляре, помещенном в широкий цилиндрический сосуд. Форма свободной поверхности жидкости определяется совместным действием силы тяжести, капиллярных сил, а также неоднородного магнитного поля, которое создается постоянным электрическим током, текущим по стенке капилляра. Специфической особенностью задачи, затрудняющей ее численное решение, является несвязная свободная поверхность. В настоящее время отсутствует универсальный алгоритм решения задач такого типа. Каждая конкретная задача с несвязной поверхностью требует индивидуального подхода как при построении математической модели, так и при разработке вычислительного алгоритма. Одна из важных задач предполагаемого исследования – изучить влияние магнитного и

гравитационного поля на применимость осесимметричной модели свободной поверхности. Отметим, что ранее в работах [13], [14] эта задача решалась при условии отсутствия магнитного поля. Тема диссертации соответствует заданию 1.4.01.4 ГПНИ «Конвергенция 2025» на 2021–2025 гг., поэтому является актуальной.

В первой главе данной работы построены математические модели, описывающие равновесную форму несвязной капиллярной поверхности магнитной жидкости в параметрической и непараметрической постановках. В каждой из постановок модель состоит из двух систем дифференциальных уравнений, описывающих свободную поверхность внутри проводника и во внешней области, соответственно. Решения полученных систем определяются физическими (магнитные, гравитационные и капиллярные силы; магнитные и капиллярные свойства жидкости) и геометрическими (радиусы капилляра и внешнего сосуда, объем жидкости) параметрами задачи.

Во второй главе разработан алгоритм численного решения задачи о равновесных формах свободной поверхности магнитной жидкости в капилляре, погруженный в широкий цилиндрический сосуд, в параметрической и непараметрической постановках. Для описания пикообразных конфигураций магнитной жидкости в сильном магнитном поле построен алгоритм генерации адаптивной сетки, плотность узлов которой зависит от кривизны свободной поверхности.

В третьей главе приводятся результаты численного моделирования при различных физических и геометрических параметрах задачи, проводится их сравнение известными теоретическими оценками.

В заключении подводятся итоги численного моделирования, делаются выводы о влиянии магнитного и гравитационных полей на применимость осесимметричной модели свободной поверхности.

ГЛАВА 1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается цилиндрический сосуд, наполненный магнитной жидкостью объемом V , в который погружается капиллярная трубка так, что их оси симметрии совпадают. Считаем, что капилляр является бесконечным цилиндрическим проводником с током, он имеет форму бесконечного кругового цилиндра, а его смачиваемые стенки имеют пористую структуру. Внешний сосуд представляет собой цилиндр достаточно большого радиуса. На свободную поверхность жидкости оказывают влияние сила тяжести, магнитные силы, распределение магнитных частиц в жидкости, капиллярные силы.

Сформулируем задачу об осесимметричной несвязной капиллярной поверхности магнитной жидкости. Для этого введем цилиндрические координаты R, Z так, чтобы ось Z совпадала с осью симметрии сосуда, и направим ее против вектора ускорения свободного падения \vec{g} . Тогда несвязная равновесная поверхность контакта жидкости и газа в капилляре и внешнем сосуде определяется равновесными линиями l_1, l_2 . Эти линии можно описать парой параметрических функций $R(S), Z(S)$, где S – длины дуг равновесных линий l_1, l_2 , отсчитываемые от оси симметрии проводника и его стенки соответственно. Расположение осей, а также другие введенные обозначения показаны на рисунке 1.1,

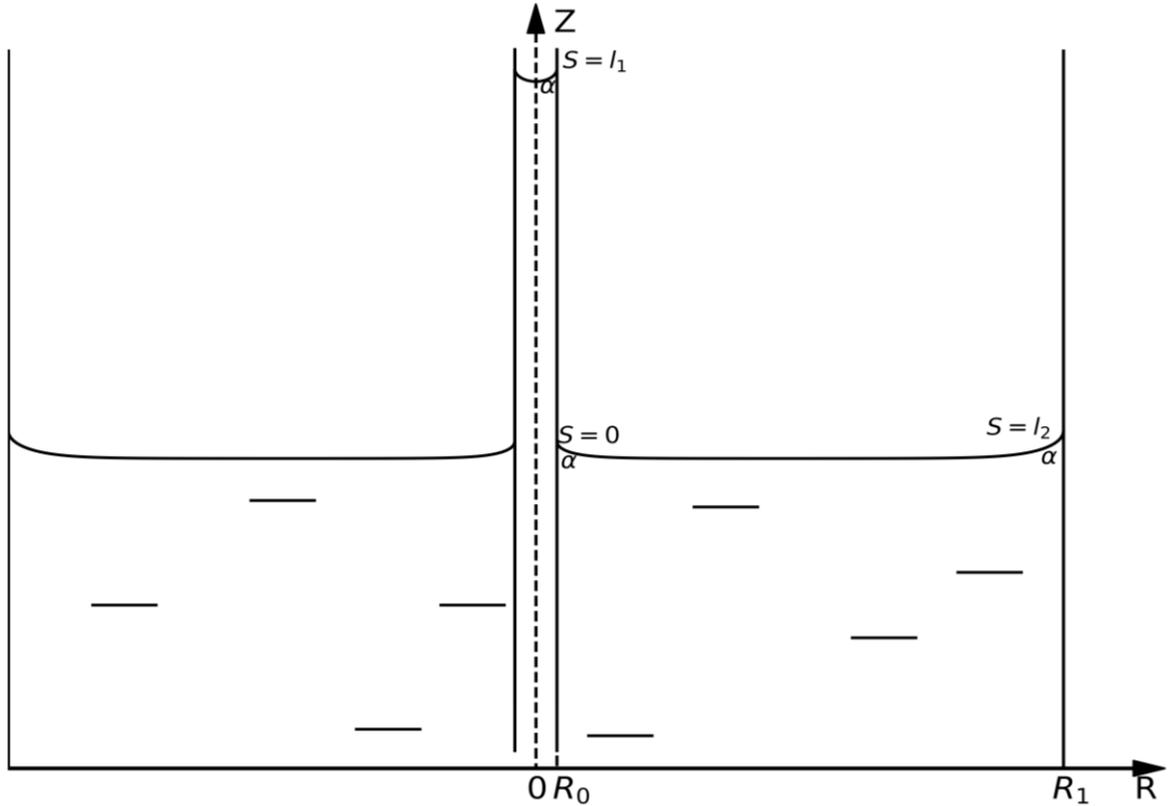


Рисунок 1.1 – иллюстрация постановки задачи.

1.1 Основные уравнения

Массообмен магнитных частиц в жидкости описывается уравнением [5]:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v \cdot \nabla C = D \nabla (\nabla C - CL(\xi H) \nabla (\xi H) - C \eta g), \quad (1.1)$$

где $\xi = \frac{\mu_0 m_m}{kT}$, $\eta = \frac{m}{kT}$, при этом предполагается, что они сферической формы и одинакового размера. Считаем, что жидкость несжимаема, граница непроницаема, а концентрация ферромагнитных частиц в исходном состоянии имеет равномерное распределение, т.е. выполняется:

$$\operatorname{div} v = 0, v \cdot n = 0, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial C}{\partial n} - C \xi L(\xi H) \frac{\partial H}{\partial n} - C \eta g_n = 0, \quad (1.3)$$

$$C = C_0 = \text{const}, t = 0 \quad (1.4)$$

где n – единичная нормаль на границе, а g_n – нормальная компонента ускорения свободного падения. Таким образом, (1.1) – (1.4) описывают процесс диффузии ферромагнитных частиц в жидкости, при этом выполняется условие сохранения их массы:

$$\frac{1}{V} \int_V C dV = C_0, \forall t \geq 0 \quad (1.5)$$

При $t \rightarrow \infty$ получаем стационарную задачу на концентрацию при $v = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla(\nabla C - C \nabla(\ln \varphi)) = 0, \\ \frac{\partial C}{\partial n} - \frac{\partial(\ln \varphi)}{\partial n} C = 0, \\ \int_V C dV = C_0 V, \\ \varphi = e^{\int_0^{\xi H} L(\gamma) d\gamma + \eta g \cdot r} = \frac{\sinh(\xi H)}{\xi H} e^{\eta g \cdot r}, \end{array} \right. \quad (1.6)$$

где r – радиус-вектор текущей точки пространства. Данная задача имеет точное решение [5]:

$$C = \varphi \frac{C_0 V}{J_0}, J_0 = \int_V \varphi dV \quad (1.7)$$

Влияние силы тяжести на диффузию броуновских частиц незначительно, поэтому функцию φ можно определить следующим образом:

$$\varphi = e^{\int_0^{\xi H} L(\gamma) d\gamma} = \frac{\sinh(\xi H)}{\xi H} \quad (1.8)$$

Магнитные свойства магнитной жидкости определяются ее намагниченностью M , которая зависит как от напряженности магнитного поля H , так и от концентрации частиц C . Закон намагниченности Ланжевена для неравномерно концентрированной магнитной жидкости определяется формулой [3], [5]:

$$M = M(H, C) = \frac{M_s}{C_0} L(\xi H) C \quad (1.9)$$

Для того, чтобы некоторое положение жидкости в сосуде было равновесным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия [1], [2]:

$$\sigma K = \mu_0 \int_0^H M dH - \rho g Z + c, \quad (1.10)$$

$$\sigma \cos \alpha = \sigma_0 - \tilde{\sigma}, \quad (1.11)$$

где c – неопределенная константа. При этом условие равновесия (1.10) представляет собой дифференциальное уравнение, а равенство (1.11) – соответствующее краевое условие.

Так как мы имеем дело с несвязной областью Ω , которая состоит из двух частей, поэтому для каждой из этих частей должны выполняться (1.10), (1.11). Таким образом, для свободных поверхностей в капиллярной трубке и внешнем сосуде мы будем иметь соответствующие задачи. При этом, стоит отметить, что постоянный ток генерирует азимутальное магнитное поле только вокруг проводника, т.е. на свободную поверхность внутри капилляра влияют только угол смачивания, силы поверхностного натяжения и гравитационные силы. Тогда используя (1.7) – (1.9) представим условие равновесия (1.10) в виде:

$$\sigma K = \frac{\mu_0 M_s V_2}{\xi J_0} (\varphi - 1) - \rho g Z + c, \quad (1.12)$$

где

$$V_2 = 2\pi \left[\int_0^{l_2} Z R R' dS \right], \quad (1.13)$$

$$J_0 = \int_{V_2} \varphi dV_2 = 2\pi \int_0^{l_2} Z R R' \varphi dS, \quad (1.14)$$

$$H = H(R) = \frac{I}{2\pi R}.$$

1.2 Параметрическая постановка

Сумма главных кривизн определяется следующей формулой [1], [2]:

$$K = -\frac{1}{RR'} \left(\frac{RZ'}{\sqrt{R'^2 + Z'^2}} \right)' \quad (1.15)$$

Пусть $\beta = \beta(S)$ – угол наклона элемента равновесной линии, полученного при возрастании S , к оси R . Тогда

$$R' = \cos \beta, \quad Z' = \sin \beta, \quad (1.16)$$

откуда

$$R'' = -\beta'Z', \quad Z'' = \beta'R', \quad (1.17)$$

а сумма главных кривизн

$$K = -\left(\beta' + \frac{Z'}{R}\right) \quad (1.18)$$

Используя (1.12), (1.17), (1.18) получаем систему уравнений для равновесной линии

$$\begin{cases} Z'' = R' \left(\frac{\rho g}{\sigma} Z - \frac{\mu_0 M_s V}{\sigma \xi J_0} \varphi + q - \frac{Z'}{R} \right), \\ R'' = -Z' \left(\frac{\rho g}{\sigma} Z - \frac{\mu_0 M_s V}{\sigma \xi J_0} \varphi + q - \frac{Z'}{R} \right), \end{cases} \quad (1.19)$$

где q – неопределенная константа.

Получим задачу для описания равновесной формы свободной поверхности в капилляре, дополнив систему (1.19) условиями симметрии на его оси

$$R(0) = 0, \quad R'(0) = 1, \quad Z'(0) = 0 \quad (1.20)$$

и граничными условиями

$$R(l_1) = R_1, \quad R'(l_1) = \sin \alpha, \quad Z'(l_1) = \cos \alpha. \quad (1.21)$$

Для свободной поверхности во внешнем сосуде система (1.19) дополняется краевыми условиями

$$\begin{aligned} R(0) &= R_1, & R'(0) &= \sin \alpha, & Z'(0) &= -\cos \alpha, \\ R(l_2) &= R_2, & R'(l_2) &= \sin \alpha, & Z'(l_2) &= \cos \alpha. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Используя формулы (1.12), (1.13), (1.15), (1.20) – (1.22) выразим неопределенную константу q :

$$\sigma \frac{(RZ')'}{RR'} = \rho g Z - \frac{\mu_0 M_s V}{\xi J_0} \varphi + c,$$

$$\begin{aligned}
(RZ')' &= \frac{\rho g}{\sigma} ZRR' + qRR' - \frac{\mu_0 M_s V}{\sigma \xi J_0} \varphi RR', \\
RZ'|_0^{l_1} + RZ'|_0^{l_2} &= \frac{\rho g}{\sigma} \frac{V}{2\pi} + \frac{1}{2} q (R^2|_0^{l_1} + R^2|_0^{l_2}) - \frac{\mu_0 M_s V}{\sigma \xi J_0} \left(\int_0^{l_2} \varphi RR' dS \right), \\
R_1 \cos \alpha + R_2 \cos \alpha + R_1 \cos \alpha - \frac{\rho g}{\sigma} \frac{V}{2\pi} + \frac{\mu_0 M_s V}{\sigma \xi J_0} \left(\int_0^{l_2} \varphi RR' dS \right) &= \frac{1}{2} q R_2^2, \\
q &= \frac{2}{R_2^2} \left(\cos \alpha (2R_1 + R_2) - \frac{\rho g}{\sigma} \frac{V}{2\pi} + \frac{\mu_0 M_s V}{\sigma \xi J_0} \int_0^{l_2} \varphi RR' dS \right). \quad (1.23)
\end{aligned}$$

Таким образом, математическая модель, описывающая равновесную форму несвязной капиллярной поверхности магнитной жидкости параметрическими функциями $R(S)$, $Z(S)$, состоит из следующих систем:

$$\begin{cases}
Z'' = R' \left(\frac{\rho g}{\sigma} Z + q - \frac{Z'}{R} \right), & 0 \leq S \leq l_1, \\
Z'(0) = 0, & Z'(l_1) = \cos \alpha; \\
R'' = -Z' \left(\frac{\rho g}{\sigma} Z + q - \frac{Z'}{R} \right), & 0 \leq S \leq l_1, \\
R(0) = 0, & R(l_1) = R_1, \\
R'(0) = 1, & R'(l_1) = \sin \alpha;
\end{cases} \quad (1.24)$$

$$\begin{cases}
Z'' = R' \left(\frac{\rho g}{\sigma} Z - \frac{\mu_0 M_s V_2}{\sigma \xi J_0} \varphi + q - \frac{Z'}{R} \right), & 0 \leq S \leq l_2, \\
Z'(0) = -\cos \alpha, & Z'(l_2) = \cos \alpha; \\
R'' = -Z' \left(\frac{\rho g}{\sigma} Z - \frac{\mu_0 M_s V_2}{\xi J_0} \varphi + q - \frac{Z'}{R} \right), & 0 \leq S \leq l_2, \\
R(0) = R_1, & R(l_2) = R_2, \\
R'(0) = \sin \alpha, & R'(l_2) = \sin \alpha.
\end{cases} \quad (1.25)$$

Естественным свойством параметрических функций $R(S)$, $Z(S)$ является тождество [1], [4]

$$R'^2 + Z'^2 \equiv 1. \quad (1.26)$$

Если оно выполняется при каком-то одном значении S , то оно справедливо и для всех S . Тогда, в силу данного свойства при решении задач (1.24), (1.25) можно пренебречь одним из условий на производную. При этом,

$$R' = \sqrt{1 - Z'^2}. \quad (1.27)$$

Тогда для определения R вместо краевой задачи можно решать задачу Коши, где роль дифференциального уравнения играет (1.27), а $R_0 = R(0)$ – роль начального условия

$$\begin{cases} Z'' = R' \left(\frac{\rho g}{\sigma} Z + q - \frac{Z'}{R} \right), & 0 \leq S \leq l_1, \\ Z'(0) = 0, & Z'(l_1) = \cos \alpha; \\ R' = \sqrt{1 - Z'^2}, & 0 \leq S \leq l_1, \\ R(0) = 0; \end{cases} \quad (1.28)$$

$$\begin{cases} Z'' = R' \left(\frac{\rho g}{\sigma} Z - \frac{\mu_0 M_s V_2}{\sigma \xi J_0} \varphi + q - \frac{Z'}{R} \right), & 0 \leq S \leq l_2, \\ Z'(0) = -\cos \alpha, & Z'(l_2) = \cos \alpha; \\ R' = \sqrt{1 - Z'^2}, & 0 \leq S \leq l_2, \\ R(0) = R_1. \end{cases} \quad (1.29)$$

Отметим, что полученные системы (1.24) и (1.25), (1.28) и (1.29) связаны между собой через параметр q , зависящий от объема магнитной жидкости V .

1.3 Непараметрическая постановка

Уравнение равновесия (1.12) с учетом формулы (1.15), определяющей сумму главных кривизн, при $S = R$ принимает вид

$$\frac{1}{R} \left(\frac{RZ'}{\sqrt{1 + Z'^2}} \right)' = \frac{\rho g}{\sigma} Z + q - \frac{\mu_0 M_s V_2}{\sigma \xi J_0} \varphi, \quad (1.30)$$

где $Z = Z(R)$, $J_0 = \int_{R_1}^{R_2} ZR\varphi dR$, q – неопределенная константа. Получим краевую задачу для описания равновесной формы свободной поверхности магнитной жидкости в капилляре. Для этого уравнение равновесия (1.30) дополним условием симметрии на оси проводника

$$Z'(0) = 0 \quad (1.31)$$

и граничным условием

$$Z'(R_1) = \operatorname{ctg} \alpha_1. \quad (1.32)$$

Для описания свободной поверхности во внешнем сосуде уравнение равновесия (1.30) дополняется краевыми условиями

$$Z'(R_1) = -\operatorname{ctg} \alpha_1, \quad Z'(R_2) = \operatorname{ctg} \alpha_2. \quad (1.33)$$

Считая объем жидкости заданным, определим его как объем тела вращения

$$V = V_1 + V_2 = 2\pi \left[\int_0^{R_1} ZR \, dR + \int_{R_1}^{R_2} ZR \, dR \right]. \quad (1.34)$$

Выразим неопределенный параметр q , используя условия (1.30) – (1.34)

$$\begin{aligned} \left(\frac{RZ'}{\sqrt{1+Z'^2}} \right)' &= \frac{\rho g}{\sigma} ZR + qR - \frac{\mu_0 M_s V_2}{\sigma \xi J_0} \varphi R, \\ \left(\frac{RZ'}{\sqrt{1+Z'^2}} \right) \Big|_0^{R_1} + \left(\frac{RZ'}{\sqrt{1+Z'^2}} \right) \Big|_{R_1}^{R_2} &= \\ &= \frac{\rho g}{\sigma} \frac{V}{2\pi} + \frac{1}{2} q (R^2 \Big|_0^{R_1} + R^2 \Big|_{R_1}^{R_2}) - \frac{\mu_0 M_s V_2}{\sigma \xi J_0} \int_{R_1}^{R_2} \varphi R \, dR, \\ R_1 \cos \alpha_1 + R_2 \cos \alpha_2 + R_1 \cos \alpha_1 - \frac{\rho g}{\sigma} \frac{V}{2\pi} + \frac{\mu_0 M_s V_2}{\sigma \xi J_0} \int_{R_1}^{R_2} \varphi R \, dR &= \frac{1}{2} q R_2^2, \\ q &= \frac{2}{R_2^2} \left(2R_1 \cos \alpha_1 + R_2 \cos \alpha_2 - \frac{\rho g}{\sigma} \frac{V}{2\pi} + \frac{\mu_0 M_s V_2}{\sigma \xi J_0} \int_{R_1}^{R_2} \varphi R \, dR \right). \quad (1.35) \end{aligned}$$

Таким образом, математическая модель для описания равновесной формы несвязной капиллярной поверхности магнитной жидкости состоит из двух систем

$$\begin{cases} \frac{1}{R} \left(\frac{RZ'}{\sqrt{1+Z'^2}} \right)' = \frac{\rho g}{\sigma} Z + q, & 0 \leq R \leq R_1, \\ Z'(0) = 0, \\ Z'(R_1) = ctg \alpha_1, \end{cases} \quad (1.36)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{R} \left(\frac{RZ'}{\sqrt{1+Z'^2}} \right)' = \frac{\rho g}{\sigma} Z + q - \frac{\mu_0 M_s V_2}{\sigma \xi J_0} \varphi, & 0 \leq R \leq R_1, \\ Z'(R_1) = -ctg \alpha_1, \\ Z'(R_2) = ctg \alpha_2. \end{cases} \quad (1.37)$$

1.4 Замена переменных

Процедура обезразмеривания является важным элементом при построении алгоритмов, использующих итерационно-разностный подход [1], [4], [7]. Выберем в качестве характерного размера R_2 и введем безразмерные переменные и параметры

$$\begin{aligned} z &= \frac{Z}{R_2}, & r &= \frac{R}{R_2}, & \delta &= \frac{R_1}{R_2}, & s &= \frac{S}{R_2}, \\ Q &= qR_2, & L_1 &= \frac{l_1}{R_2}, & L_2 &= \frac{l_2}{R_2}, & U &= \frac{V}{R_2^3}. \end{aligned}$$

Тогда краевая задача (1.24), описывающая свободную поверхность магнитной жидкости внутри проводника, будет иметь вид

$$\begin{cases} z'' = r' \left(B_0 \cdot z + Q - \frac{z'}{r} \right), & 0 \leq s \leq L_1, \\ z'(0) = 0, & z'(L_1) = \cos \alpha_1; \\ r'' = -z' \left(B_0 \cdot z + Q - \frac{z'}{r} \right), & 0 \leq s \leq L_1, \\ r(0) = 0, & r(L_1) = \delta, \\ r'(0) = 1, & r'(L_1) = \sin \alpha_1, \end{cases} \quad (1.38)$$

а краевая задача (1.25) для свободной поверхности во внешнем сосуде будет определяться следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} z'' = r' \left(Bo \cdot z - \frac{A_1}{J_1} U \varphi + Q - \frac{z'}{r} \right), \quad 0 \leq s \leq L_2, \\ z'(0) = -\cos \alpha_1, \quad z'(L_2) = \cos \alpha_2; \\ r'' = -z' \left(Bo \cdot z - \frac{A_1}{J_1} U \varphi + Q - \frac{z'}{r} \right), \quad 0 \leq s \leq L_2, \\ r(0) = \delta, \quad r(L_2) = 1, \\ r'(0) = \sin \alpha_1, \quad r'(L_2) = \sin \alpha_2. \end{array} \right. \quad (1.39)$$

Системы (1.28) – (1.29), в которых для определения R вместо краевых задач решаются задачи Коши, будут иметь вид

$$\left\{ \begin{array}{l} z'' = r' \left(Bo \cdot z + Q - \frac{z'}{r} \right), \quad 0 \leq s \leq L_1, \\ z'(0) = 0, \quad z'(L_1) = \cos \alpha_1; \\ r' = \sqrt{1 - z'^2}, \quad 0 \leq s \leq L_1, \\ r(0) = 0; \end{array} \right. \quad (1.40)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z'' = r' \left(Bo \cdot z - \frac{A_1}{J_1} U_2 \varphi + Q - \frac{z'}{r} \right), \quad 0 \leq s \leq L_2, \\ z'(0) = -\cos \alpha_1, \quad z'(L_2) = \cos \alpha_2; \\ r' = \sqrt{1 - r'^2}, \quad 0 \leq s \leq L_2, \\ r(0) = \delta; \end{array} \right. \quad (1.41)$$

$$\varphi = \frac{r}{A_2} \sinh \frac{A_2}{r},$$

где $J_1 = 2\pi \int_0^{L_2} z r r' \varphi ds$, $Bo = \frac{\rho g}{\sigma} R_2^2$ – число Бонда, характеризующее отношение гравитационных сил к капиллярным, а параметры $A_1 = \frac{\mu_0 M_s R_2}{\sigma \xi}$ и $A_2 = \frac{\xi I}{2\pi R_2}$ характеризуют магнитные свойства жидкости и силу тока в проводнике, соответственно. Обезразмеренный объем U и параметр Q определяются по формулам

$$U = U_1 + U_2 = 2\pi \left[\int_0^{L_1} z r r' ds + \int_0^{L_2} z r r' ds \right], \quad (1.42)$$

$$Q = 2 \left(2\delta \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 - Bo \cdot \frac{U}{2\pi} + \frac{A_1 U_2}{J_1} J_2 \right), \quad (1.43)$$

где $J_2 = \int_0^{L_2} \varphi r r' ds$.

Системы (1.36) – (1.37), описывающие равновесную форму несвязной капиллярной поверхности магнитной жидкости, в случае непараметрической постановки будут иметь вид

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{r} \left(\frac{r z'}{\sqrt{1+z'^2}} \right)' \right) = Bo \cdot z + Q, & 0 \leq r \leq \delta, \\ z'(0) = 0, \\ z'(\delta) = ctg \alpha_1; \end{cases} \quad (1.44)$$

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{r} \left(\frac{r z'}{\sqrt{1+z'^2}} \right)' \right) = Bo \cdot z + Q - \frac{A_1}{J_1} U_2 \varphi, & \delta \leq r \leq 1, \\ z'(\delta) = -ctg \alpha_1, \\ z'(1) = ctg \alpha_2; \end{cases} \quad (1.45)$$

где $J_1 = \int_\delta^1 z r \varphi dr$. Обезразмеренный объем U и параметр Q определяются по формулам

$$U = U_1 + U_2 = 2\pi \left[\int_0^\delta z r dr + \int_\delta^1 z r dr \right], \quad (1.46)$$

$$Q = 2 \left(2\delta \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 - Bo \cdot \frac{U}{2\pi} + \frac{A_1 U_2}{J_1} J_2 \right), \quad (1.47)$$

где $J_2 = \int_\delta^1 r \varphi dr$.

Особенность параметрической постановки (1.38) – (1.41) заключается в отсутствии подходящей формулы для вычисления безразмерных длин L_1, L_2 равновесных линий, что создает трудности для численного решения. Поэтому воспользуемся процедурой обезразмеривания типа преобразования Ландау [9], которая позволит вынести неизвестные длины в уравнения и проводить вычисления на фиксированном промежутке $[0, 1]$. Отметим, что такое преобразование даст явную устойчивую формулу для корректировки

безразмерных величин L_1, L_2 в процессе итерационного решения. Поэтому, применяя подход [4], [7], сделаем замену переменных

$$\begin{cases} r = \bar{r}_1 L_1, & z = \bar{z}_1 L_1, & s = \bar{s}_1 L_1, \\ r = \bar{r}_2 L_2, & z = \bar{z}_2 L_2, & s = \bar{s}_2 L_2. \end{cases} \quad (1.48)$$

Тогда системы (1.38), (1.39), описывающие равновесную форму несвязной капиллярной поверхности магнитной жидкости, будут иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \bar{z}'' = \bar{r}' \left(Bo \cdot L_1^2 \cdot \bar{z} + L_1 \cdot Q - \frac{\bar{z}'}{\bar{r}} \right), & 0 \leq \bar{s} \leq 1, \\ \bar{z}'(0) = 0, & \bar{z}'(1) = \cos \alpha; \\ \bar{r}'' = -\bar{z}' \left(Bo \cdot L_1^2 \cdot \bar{z} + L_1 \cdot Q - \frac{\bar{z}'}{\bar{r}} \right), & 0 \leq \bar{s} \leq 1, \\ \bar{r}(0) = 0, & \bar{r}(1) = \frac{\delta}{L_1}, \\ \bar{r}'(0) = 1, & \bar{r}'(1) = \sin \alpha; \end{cases} \quad (1.49)$$

$$\begin{cases} \bar{z}'' = \bar{r}' \left(Bo \cdot L_2^2 \cdot \bar{z} + L_2 \cdot Q - \frac{\bar{z}'}{\bar{r}} - L_2 \cdot \frac{A_1}{J_1} U_2 \varphi \right), & 0 \leq \bar{s} \leq 1, \\ \bar{z}'(0) = -\cos \alpha, & \bar{z}'(1) = \cos \alpha; \\ \bar{r}'' = -\bar{z}' \left(Bo \cdot L_2^2 \cdot \bar{z} + L_2 \cdot Q - \frac{\bar{z}'}{\bar{r}} - L_2 \cdot \frac{A_1}{J_1} U_2 \varphi \right), & 0 \leq \bar{s} \leq 1, \\ \bar{r}(0) = \frac{\delta}{L_2}, & \bar{r}(1) = \frac{1}{L_2}, \\ \bar{r}'(0) = \sin \alpha, & \bar{r}'(1) = \sin \alpha; \end{cases} \quad (1.50)$$

где $\varphi = \frac{\bar{r} L_2}{A_2} \sinh \frac{A_2}{\bar{r} L_2}$, $J_1 = 2\pi L_2^3 \int_0^1 \bar{z} \bar{r} \bar{r}' \varphi d\bar{s}$, $L_1 = \frac{\delta}{\bar{r}(1)}$, $L_2 = \frac{1}{\bar{r}(1)}$.

Обезразмеренный объем U и параметр Q определяются по формулам

$$U = U_1 + U_2 = 2\pi \left[L_1^3 \int_0^1 \bar{z} \bar{r} \bar{r}' d\bar{s} + L_2^3 \int_0^1 \bar{z} \bar{r} \bar{r}' d\bar{s} \right], \quad (1.51)$$

$$Q = 2 \left(2\delta \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 - Bo \cdot \frac{U}{2\pi} + \frac{A_1 U_2}{J_1} J_2 \right), \quad (1.52)$$

где $J_2 = L_2^2 \int_0^1 \varphi r r' ds$. Системы (1.40), (1.41), в которых для определения r вместо краевых задач решаются задачи Коши, будут иметь вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{z}'' = \bar{r}' \left(Bo \cdot L_1^2 \cdot \bar{z} + L_1 \cdot Q - \frac{\bar{z}'}{\bar{r}} \right), \quad 0 \leq \bar{s} \leq 1, \\ \bar{z}'(0) = 0, \quad \bar{z}'(1) = \cos \alpha; \\ \bar{r}' = \sqrt{1 - \bar{z}'^2}, \quad 0 \leq \bar{s} \leq 1, \\ \bar{r}(0) = 0; \end{array} \right. \quad (1.53)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{z}'' = \bar{r}' \left(Bo \cdot L_2^2 \cdot \bar{z} + L_2 \cdot Q - \frac{\bar{z}'}{\bar{r}} - L_2 \cdot \frac{A_1}{J_1} U_2 \varphi \right), \quad 0 \leq \bar{s} \leq 1, \\ \bar{z}'(0) = -\cos \alpha, \quad \bar{z}'(1) = \cos \alpha; \\ \bar{r}' = \sqrt{1 - \bar{z}'^2}, \quad 0 \leq \bar{s} \leq 1, \\ \bar{r}(0) = \frac{\delta}{L_2}; \end{array} \right. \quad (1.54)$$

Таким образом, построены математические модели, описывающие равновесную форму несвязной капиллярной поверхности магнитной жидкости, в параметрической и непараметрической постановках. Решения полученных систем определяются следующими параметрами: число Bo характеризует отношение гравитационных сил к капиллярным, δ показывает отношение радиуса капиллярной трубки к радиусу внешнего сосуда, α_1 и α_2 – углы смачивания со стенками капилляра и внешнего сосуда, соответственно, U – объем жидкости, A_1 характеризует магнитные свойства жидкости, а A_2 – силу тока в проводнике.

Стоит отметить, что в случае параметрической постановки решения $\bar{z}(\bar{s})$ и $\bar{r}(\bar{s})$ обладают тем свойством, что модуль производной не превосходит 1, в то время как для непараметрической постановки решение $z(r)$ такого ограничения на нет, в частности, в граничных точках модуль производной стремится к бесконечности, при углах смачивания близких к 0 и π . Таким образом, диапазон углов смачивания, при которых непараметрическая модель (1.44), (1.45) применима, ограничен.

ГЛАВА 2 ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ

2.1 Параметрическая постановка

Введем равномерную сетку $\{\bar{s}_i = ih \mid i = \overline{0, N}, h = 1/N\}$.

Рассмотрим системы (1.49), (1.50). Применяя стандартный подход построения конечно-разностных методов [4], [10], заменим производные в дифференциальных уравнениях соответствующими разностными аналогами. Тогда уравнения равновесия для системы (1.49), описывающие свободную поверхность магнитной жидкости внутри проводника, будут иметь вид

$$\bar{z}_{\bar{s}\bar{s},i} - Bo \cdot L_1^2 \cdot \bar{r}_{\bar{s},i} \cdot \bar{z}_i = \bar{r}_{\bar{s},i} \left(-\frac{\bar{z}_{\bar{s},i}}{\bar{r}_i} + L_1 \cdot Q \right), \quad (2.1)$$

$$\bar{r}_{\bar{s}\bar{s},i} = -\bar{z}_{\bar{s},i} \left(Bo \cdot L_1^2 \cdot \bar{z}_i - \frac{\bar{z}_{\bar{s},i}}{\bar{r}_i} + L_1 \cdot Q \right), \quad (2.2)$$

где

$$\bar{z}_{\bar{s}\bar{s},i} = \frac{\bar{z}_{i+1} - 2\bar{z}_i + \bar{z}_i}{h^2} + O(h^2), \quad \bar{r}_{\bar{s}\bar{s},i} = \frac{\bar{r}_{i+1} - 2\bar{r}_i + \bar{r}_i}{h^2} + O(h^2),$$

$$\bar{z}_{\bar{s},i} = \frac{\bar{z}_{i+1} - \bar{z}_{i-1}}{2h} + O(h^2), \quad \bar{r}_{\bar{s},i} = \frac{\bar{r}_{i+1} - \bar{r}_{i-1}}{2h} + O(h^2),$$

$$L_1 = \frac{\delta}{r_N}.$$

Теперь аппроксимируем дополнительные условия для системы (1.49), описывающей. Заменим условие симметрии на оси капилляра $\bar{z}'(0) = 0$ отношением, полученным из разложения в ряд Тейлора

$$\bar{z}'_0 = 0 = \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_0}{h} - \frac{h}{2} \bar{z}''_0 + O(h^2),$$

$$\frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_0}{h} - \frac{h}{2} \left(\bar{r}'_0 \left(Bo \cdot L_1^2 \cdot \bar{z}_0 + L_1 \cdot Q - \frac{\bar{z}'_0}{\bar{r}_0} \right) \right) + O(h^2) = 0.$$

Для раскрытия неопределенности $\frac{0}{0}$ применим правило Лопиталья

$$\lim_{\bar{s} \rightarrow 0} \frac{\bar{z}'(\bar{s})}{\bar{r}(\bar{s})} = \lim_{\bar{s} \rightarrow 0} \frac{\bar{z}''(\bar{s})}{\bar{r}'(\bar{s})} = \bar{z}_0''.$$

Откуда следует

$$\bar{z}_0'' = \frac{Bo \cdot L_1^2 \cdot \bar{z}_0 + L_1 \cdot Q}{2}.$$

Следовательно, с точностью до членов второго порядка аппроксимации

$$\frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_0}{h} = \frac{h}{4} (Bo \cdot L_1^2 \cdot \bar{z}_0 + L_1 \cdot Q) + O(h^2),$$

$$\bar{z}_1 - \frac{h^2}{4} L_1 \cdot Q = \bar{z}_0 \left(1 + \frac{h^2}{4} Bo \cdot L_1^2 \right),$$

$$\bar{z}_0 = \frac{\bar{z}_1}{1 + \frac{h^2}{4} Bo \cdot L_1^2} - \frac{\frac{h^2}{4} L_1 \cdot Q}{1 + \frac{h^2}{4} Bo \cdot L_1^2}. \quad (2.3)$$

Теперь аппроксимируем граничное условие $\bar{z}'(1) = \cos \alpha$. Из разложения в ряд Тейлора

$$\bar{z}'_N = \cos \alpha = \frac{\bar{z}_N - \bar{z}_{N-1}}{h} + \frac{h}{2} \bar{z}''_N + O(h^2),$$

$$\frac{\bar{z}_N - \bar{z}_{N-1}}{h} + \frac{h}{2} \left(\sin \alpha \left(Bo \cdot L_1^2 \cdot \bar{z}_N + L_1 \cdot Q - \frac{\cos \alpha}{\frac{\delta}{L_1}} \right) \right) + O(h^2) = \cos \alpha,$$

$$h \cos \alpha = \bar{z}_N - \bar{z}_{N-1} + \frac{h^2}{2} \left(\sin \alpha \left(Bo \cdot L_1^2 \cdot \bar{z}_N + L_1 \cdot Q - \frac{L_1 \cos \alpha}{\delta} \right) \right),$$

$$\bar{z}_{N-1} + h \cos \alpha - \frac{h^2}{2} \sin \alpha \cdot L_1 \cdot \left(Q - \frac{\cos \alpha}{\delta} \right) = \bar{z}_N \left(1 + \frac{h^2}{2} \cdot \sin \alpha \cdot Bo \cdot L_1^2 \right).$$

Тогда первое граничное условие для системы (1.49) будет иметь вид

$$\bar{z}_N = \frac{\bar{z}_{N-1}}{1 + \frac{h^2}{2} \cdot \sin \alpha \cdot Bo \cdot L_1^2} + \frac{h \cos \alpha - \frac{h^2}{2} \cdot \sin \alpha \cdot L_1 \cdot \left(Q - \frac{\cos \alpha}{\delta} \right)}{1 + \frac{h^2}{2} \cdot \sin \alpha \cdot Bo \cdot L_1^2}. \quad (2.4)$$

Теперь заменим второе граничное условие $\bar{r}'(1) = \sin \alpha$ системы (1.49) разностным аналогом. Используя разложение в ряд Тейлора

$$\begin{aligned} \bar{r}'_N = \sin \alpha &= \frac{\bar{r}_N - \bar{r}_{N-1}}{h} + \frac{h}{2} \bar{r}''_N + O(h^2), \\ \frac{\bar{r}_N - \bar{r}_{N-1}}{h} + \frac{h}{2} \left(-\cos \alpha \left(Bo \cdot L_1^2 \cdot \bar{z}_N + L_1 \cdot Q - \frac{\cos \alpha}{\frac{\delta}{L_1}} \right) \right) + O(h^2) &= \sin \alpha, \\ h \sin \alpha &= \bar{r}_N - \bar{r}_{N-1} - \frac{h^2}{2} \cos \alpha \left(Bo \cdot L_1^2 \cdot \bar{z}_N + L_1 \cdot Q - \frac{L_1 \cos \alpha}{\delta} \right), \\ \bar{r}_N &= \bar{r}_{N-1} + h \sin \alpha + \frac{h^2}{2} \cos \alpha \left(Bo \cdot L_1^2 \cdot \bar{z}_N + L_1 \cdot Q - \frac{L_1 \cos \alpha}{\delta} \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Как говорилось ранее, параметрические функции $\bar{r}(\bar{s})$ и $\bar{z}(\bar{s})$ обладают свойством $\bar{r}'^2 + \bar{z}'^2 \equiv 1$, поэтому условие $\bar{r}'(0) = 1$ можно опустить.

Уравнения равновесия для системы (1.50), описывающие свободную поверхность магнитной жидкости во внешнем сосуде, после замены разностными аналогами будут иметь вид

$$\bar{z}_{\bar{s}\bar{s},i} - Bo \cdot L_2^2 \cdot \bar{r}_{\bar{s},i} \cdot \bar{z}_i = \bar{r}_{\bar{s},i} \left(-\frac{\bar{z}_{\bar{s},i}}{\bar{r}_i} + L_2 \cdot Q - L_2 \frac{A_1}{J_1} U \varphi_i \right), \quad (2.6)$$

$$\bar{r}_{\bar{s}\bar{s},i} = -\bar{z}_{\bar{s},i} \left(Bo \cdot L_2^2 \cdot \bar{z}_i - \frac{\bar{z}_{\bar{s},i}}{\bar{r}_i} + L_2 \cdot Q - L_2 \frac{A_1}{J_1} U \varphi_i \right), \quad (2.7)$$

$$L_2 = \frac{1}{r_N}, \quad \varphi_i = \frac{L_2 r_i}{A_2} \sinh \frac{A_2}{L_2 r_i}.$$

Аппроксимируем граничные условия для системы (1.50). Краевое условие $\bar{z}'(0) = -\cos \alpha_1$ у левой границы заменим отношением, полученным из разложения в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} \bar{z}'_0 = -\cos \alpha_1 &= \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_0}{h} - \frac{h}{2} \bar{z}''_0 + O(h^2), \\ \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_0}{h} - \frac{h}{2} \left(\sin \alpha \left(Bo \cdot L_2^2 \cdot \bar{z}_0 + L_2 \cdot Q + \frac{L_2 \cos \alpha}{\delta} - L_2 \frac{A_1 U}{J_1} \varphi_0 \right) \right) + O(h^2) &= \\ &= -\cos \alpha_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{z}_1 + h \cos \alpha_1 - \frac{h^2}{2} \sin \alpha_1 \cdot L_2 \cdot \left(Q + \frac{\cos \alpha_1}{\delta} - \frac{A_1 U}{J_1} \varphi_0 \right) &= \\ &= \bar{z}_0 \left(1 + \frac{h^2}{2} \cdot \sin \alpha \cdot Bo \cdot L_2^2 \right).\end{aligned}$$

Таким образом, краевое условие $\bar{z}'(0) = -\cos \alpha_1$, после замены разностными аналогами, будет иметь вид

$$\begin{aligned}\bar{z}_0 &= \frac{\bar{z}_1}{1 + \frac{h^2}{2} \cdot \sin \alpha_1 \cdot Bo \cdot L_2^2} + \\ &+ \frac{h \cos \alpha_1 - \frac{h^2}{2} \cdot \sin \alpha_1 \cdot L_2 \cdot \left(Q + \frac{\cos \alpha_1}{\delta} - \frac{A_1 U}{J_1} \varphi_0 \right)}{1 + \frac{h^2}{2} \cdot \sin \alpha_1 \cdot Bo \cdot L_2^2}.\end{aligned}\quad (2.8)$$

Заменим краевое условие $\bar{z}'(1) = \cos \alpha_2$ у правой границы:

$$\begin{aligned}\bar{z}'_N = \cos \alpha_2 &= \frac{\bar{z}_N - \bar{z}_{N-1}}{h} + \frac{h}{2} \bar{z}''_N + O(h^2), \\ \frac{\bar{z}_N - \bar{z}_{N-1}}{h} + \frac{h}{2} \left(\sin \alpha_2 L_2 \left(Bo L_2 \bar{z}_N + Q - \cos \alpha_2 - \frac{A_1 U}{J_1} \varphi_N \right) \right) + O(h^2) &= \\ &= \cos \alpha_2, \\ \bar{z}_{N-1} + h \cos \alpha_2 - \frac{h^2}{2} \cdot \sin \alpha_2 \cdot L_2 \cdot \left(Q - \cos \alpha_2 - \frac{A_1 U}{J_1} \varphi_N \right) &= \\ &= \bar{z}_N \left(1 + \frac{h^2}{2} \cdot \sin \alpha_2 \cdot Bo \cdot L_2^2 \right),\end{aligned}$$

Таким образом

$$\begin{aligned}\bar{z}_N &= \frac{\bar{z}_{N-1}}{1 + \frac{h^2}{2} \cdot \sin \alpha_2 \cdot Bo \cdot L_2^2} + \\ &+ \frac{h \cos \alpha_2 - \frac{h^2}{2} \cdot \sin \alpha_2 \cdot L_2 \cdot \left(Q - \cos \alpha_2 - \frac{A_1 U}{J_1} \varphi_N \right)}{1 + \frac{h^2}{2} \cdot \sin \alpha_2 \cdot Bo \cdot L_2^2}.\end{aligned}\quad (2.9)$$

Теперь заменим граничное условие $\bar{r}'(1) = \sin \alpha_2$:

$$\begin{aligned}\bar{r}'_N &= \sin \alpha_2 = \frac{\bar{r}_N - \bar{r}_{N-1}}{h} + \frac{h}{2} \bar{r}''_N + O(h^2), \\ \frac{\bar{r}_N - \bar{r}_{N-1}}{h} + \frac{h}{2} \left(-\cos \alpha_2 L_2 \left(B_0 \cdot L_2 \bar{z}_N + Q - \cos \alpha - \frac{A_1 U}{J_1} \varphi_N \right) \right) + O(h^2) &= \\ &= \sin \alpha_2, \\ h \sin \alpha &= \bar{r}_N - \bar{r}_{N-1} - \frac{h^2}{2} L_2 \cos \alpha \left(B_0 \cdot L_2 \cdot \bar{z}_N + Q - \cos \alpha - \frac{A_1 U}{J_1} \varphi_N \right),\end{aligned}$$

Таким образом

$$\begin{aligned}\bar{r}_N &= \bar{r}_{N-1} + h \sin \alpha + \\ &+ \frac{h^2}{2} L_2 \cos \alpha \left(B_0 \cdot L_2 \cdot \bar{z}_N + Q - \cos \alpha - \frac{A_1 U}{J_1} \varphi_N \right).\end{aligned}\quad (2.10)$$

Как говорилось ранее, условие $\bar{r}'(0) = \sin \alpha$ можно опустить.

Таким образом, разностные уравнения (2.1) – (2.5) соответствуют системе (1.49), а уравнения (2.6) – (2.10) соответствуют (1.50).

В случае задач (1.53), (1.54) для приближения координат \bar{z}_i равновесных линий свободных поверхностей в капиллярной трубке и внешнем сосуде будем использовать уравнения (2.1), (2.3), (2.4) и (2.6), (2.8), (2.9), соответственно. Для определения \bar{r}_i заменим производные в уравнении $\bar{r}' = \sqrt{1 - \bar{z}'^2}$ разностными аналогами:

$$K_{i-\frac{1}{2}} = \sqrt{1 - A_{i-\frac{1}{2}}},$$

где $K_{i-\frac{1}{2}}$, $A_{i-\frac{1}{2}}$ – центральные разностные производные

$$\begin{aligned}K_{i-\frac{1}{2}} &= \frac{\bar{r}_i - \bar{r}_{i-1}}{h} + O(h^2), \\ A_{i-\frac{1}{2}} &= \frac{\bar{z}_i - \bar{z}_{i-1}}{h} + O(h^2).\end{aligned}$$

Тогда \bar{r}_i можно находить явно по рекуррентным формулам:

$$\bar{r}_0 = \bar{r}(0), \quad \bar{r}_i = \bar{r}_{i-1} + \sqrt{h^2 - (\bar{z}_i - \bar{z}_{i-1})^2}, \quad i = \overline{1, N}. \quad (2.11)$$

Таким образом, разностные уравнения (2.1), (2.3), (2.4), (2.11) соответствуют системе (1.53), а уравнения (2.6), (2.8), (2.9), (2.11)

соответствуют (1.54). Отметим, что построенные схемы имеют второй порядок аппроксимации [4], [7], [10].

2.2 Непараметрическая постановка

Для непараметрических систем (1.44), (1.45), описывающих равновесную форму несвязной капиллярной поверхности, построим разностные схемы второго порядка аппроксимации. Получим приближение для уравнения равновесия. Для этого сделаем замену:

$$K(z) = \frac{r}{\sqrt{1 + (z')^2}}.$$

Таким образом, уравнение Юнга-Лапласа будет иметь вид:

$$\frac{1}{r} (Kz')' = Bo z + Q - \frac{A_1}{J_1} U_2 \varphi \quad (2.12)$$

Сделаем замену

$$a_i = K_{i-\frac{1}{2}},$$

где $K_{i-\frac{1}{2}} = \frac{r_{i-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{z_i - z_{i-1}}{h}\right)^2}} + O(h^2)$ – центральная разностная производная. Тогда

соответствующее разностное уравнение для (2.12) будет иметь вид:

$$\frac{1}{r_i} (a_i z_{\bar{r},i})_{r,i} = Bo z_i + Q - \frac{A_1}{J_1} U_2 \varphi_i. \quad (2.13)$$

Теперь аппроксимируем дополнительные условия для задачи (1.44). Заменим условие симметрии на оси капилляра $z'(0) = 0$ отношением полученным, из разложения в ряд Тейлора

$$z'_0 = 0 = \frac{z_1 - z_0}{h} - \frac{h}{2} z''_0 + O(h^2).$$

Из уравнения равновесия имеем

$$\frac{z''}{(1 + (z')^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{z'}{r\sqrt{1 + (z')^2}} = Bo z + Q - \frac{A_1}{J_1} U_2 \varphi. \quad (2.14)$$

Тогда

$$z''(0) + \frac{z'(0)}{r(0)} = B_0 z_0 + Q.$$

Для раскрытия неопределенности $\frac{0}{0}$ применим правило Лопиталья

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{z'(r)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{z''(r)}{1} = z_0''.$$

Откуда следует

$$\bar{z}_0'' = \frac{B_0 z_0 + Q}{2},$$

Следовательно, с точностью до членов второго порядка аппроксимации

$$\frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_0}{h} = \frac{h}{4} (B_0 z_0 + Q) + O(h^2),$$

$$z_0 = \frac{z_1}{1 + \frac{h^2}{4} B_0} - \frac{\frac{h^2}{4} Q}{1 + \frac{h^2}{4} B_0}. \quad (2.15)$$

Теперь приблизим граничное условие $z'(\delta) = ctg \alpha_1$ для системы (1.44). Из разложения в ряд Тейлора

$$z'_N = ctg \alpha_1 = \frac{z_N - z_{N-1}}{h} + \frac{h}{2} z''_N + O(h^2).$$

Используя (2.14), имеем

$$z''_N \sin^3 \alpha_1 + \frac{\cos \alpha_1}{\delta} = B_0 z_N + Q.$$

Откуда следует

$$z''_N = \frac{1}{\sin^3 \alpha_1} \left(B_0 z_N + Q - \frac{\cos \alpha_1}{\delta} \right).$$

Следовательно, с точностью до членов второго порядка аппроксимации

$$\frac{z_N - z_{N-1}}{h} + \frac{h}{2} \left(\frac{1}{\sin^3 \alpha_1} \left(B_0 z_N + Q - \frac{\cos \alpha_1}{\delta} \right) \right) = ctg \alpha_1,$$

$$z_N = \frac{z_{N-1} + h ctg \alpha_1 - \frac{h^2}{2} \frac{1}{\sin^3 \alpha_1} \left(Q - \frac{\cos \alpha_1}{\delta} \right)}{1 + \frac{h^2}{2} \frac{1}{\sin^3 \alpha_1} B_0}. \quad (2.16)$$

Теперь аппроксимируем краевые условия для задачи (1.45). Заменяем $z'(\delta) = -ctg \alpha_1$ отношением, полученным из разложения в ряд Тейлора

$$z'_0 = -ctg \alpha_1 = \frac{z_1 - z_0}{h} - \frac{h}{2} z''_0 + O(h^2).$$

Используя (2.14), имеем

$$z''_0 \sin^3 \alpha_1 - \frac{\cos \alpha_1}{\delta} = B_0 z_0 + Q - \frac{A_1}{J_1} U_2 \varphi_0,$$

$$z''_0 = \frac{1}{\sin^3 \alpha_1} \left(B_0 z_0 + Q + \frac{\cos \alpha_1}{\delta} - \frac{A_1}{J_1} U_2 \varphi_0 \right).$$

Следовательно, с точностью до членов второго порядка аппроксимации

$$\frac{z_1 - z_0}{h} - \frac{h}{2} \left(\frac{1}{\sin^3 \alpha_1} \left(B_0 z_0 + Q + \frac{\cos \alpha_1}{\delta} - \frac{A_1}{J_1} U_2 \varphi_0 \right) \right) = -ctg \alpha_1,$$

$$z_0 = \frac{z_1 + h ctg \alpha_1 - \frac{h^2}{2} \frac{1}{\sin^3 \alpha_1} \left(Q + \frac{\cos \alpha}{\delta} - \frac{A_1}{J_1} U_2 \varphi_0 \right)}{1 + \frac{h^2}{2} \frac{1}{\sin^3 \alpha_1} B_0}. \quad (2.17)$$

Теперь заменим граничное условие $z'(1) = ctg \alpha_2$ отношением, полученным из разложения в ряд Тейлора

$$z'_N = ctg \alpha_2 = \frac{z_N - z_{N-1}}{h} + \frac{h}{2} z''_N + O(h^2).$$

Используя (2.14), имеем

$$z''_N \sin^3 \alpha_1 + \frac{\cos \alpha_2}{\delta} = B_0 z_N + Q - \frac{A_1}{J_1} U_2 \varphi_N.$$

Откуда следует

$$z''_N = \frac{1}{\sin^3 \alpha_2} \left(B_0 z_N + Q - \frac{\cos \alpha_2}{\delta} - \frac{A_1}{J_1} U_2 \varphi_N \right).$$

Тогда

$$\frac{z_N - z_{N-1}}{h} + \frac{h}{2} \left(\frac{1}{\sin^3 \alpha_2} \left(B_0 z_N + Q - \frac{\cos \alpha_2}{\delta} - \frac{A_1}{J_1} U_2 \varphi_N \right) \right) = ctg \alpha_2,$$

$$z_N = \frac{z_{N-1} + h \operatorname{ctg} \alpha_1 - \frac{h^2}{2} \frac{1}{\sin^3 \alpha_2} \left(Q - \frac{\cos \alpha_2}{\delta} - \frac{A_1}{J_1} U_2 \varphi_N \right)}{1 + \frac{h^2}{2} \frac{1}{\sin^3 \alpha_2} Bo}. \quad (2.18)$$

Таким образом, разностные уравнения (2.13), (2.15), (2.16) соответствуют системе (1.44), а уравнения (2.13), (2.17), (2.18), соответствуют (1.45).

2.3 Адаптивная сетка

Численное моделирование свободной поверхности магнитной жидкости, подверженной воздействию сильного магнитного поля, представляет значительную трудность из-за возникающих на поверхности пикообразных структур. При усилении поля кривизна в некоторых точках поверхности может увеличиться в тысячи раз. Вычисление таких конфигураций требует особых подходов, основанных на применении адаптивных сеток.

Введем новую независимую переменную $t \in [0, 1]$ и предположим, что она связана с безразмерной длиной \bar{s} дуги взаимно однозначными преобразованиями $\bar{s}(t) \in G$, где G – множество функций $g(t)$ возрастающих на отрезке $[0, 1]$, так что $g(0) = 0$, $g(1) = 1$. Тогда краевую задачу (1.50) можно записать следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\dot{z}}{\dot{s}} \right)' = \dot{r} \left(Bo \cdot L_2^2 \cdot \bar{z} + L_2 \cdot Q - \frac{\dot{z}}{\bar{r}\dot{s}} - L_2 \cdot \frac{A_1}{J_1} U\varphi \right), \quad 0 \leq t \leq 1, \\ \dot{z}(0) = -\dot{s}(0) \cos \alpha, \quad \dot{z}(1) = \dot{s}(1) \cos \alpha; \\ \left(\frac{\dot{r}}{\dot{s}} \right)' = -\dot{z} \left(Bo \cdot L_2^2 \cdot \bar{z} + L_2 \cdot Q - \frac{\dot{z}}{\bar{r}\dot{s}} - L_2 \cdot \frac{A_1}{J_1} U\varphi \right), \quad 0 \leq t \leq 1, \\ \bar{r}(0) = \frac{\delta}{L_2}, \quad \bar{r}(1) = \frac{1}{L_2}, \\ \dot{r}(0) = \dot{s}(0) \sin \alpha, \quad \dot{r}(1) = \dot{s}(1) \sin \alpha; \end{array} \right. \quad (2.19)$$

а краевую задачу (1.45), которая задана в непараметрической постановке, может быть представлена следующим образом:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\dot{\bar{s}}} \frac{\left(\frac{\dot{z}}{\dot{\bar{s}}}\right)^{\cdot}}{\left(1 + \left(\frac{\dot{z}}{\dot{\bar{s}}}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\frac{\dot{z}}{\dot{\bar{s}}}}{r\sqrt{1 + \left(\frac{\dot{z}}{\dot{\bar{s}}}\right)^2}} &= Bo \cdot z + Q - \frac{A_1}{J_1} U_2 \varphi, 0 \leq t \leq 1, \\ \dot{z}(0) &= -ctg \alpha_1 \dot{s}(0), \\ \dot{z}(1) &= ctg \alpha_2 \dot{s}(0); \end{aligned} \right. \quad (2.20)$$

Введем равномерную сетку $\{t_i = ih \mid i = \overline{0, N}, h = 1/N\}$. Преобразование $\bar{s}(t)$ переводит ее в неравномерную сетку по естественной переменной \bar{s} . При фиксированном количестве разбиений N точность решения разностной задачи будет зависеть от распределения узлов \bar{s}_i . Таким образом возникает задача оптимального выбора узлов, чтобы ошибка разностного решения была минимальной.

Известно, что с ростом параметров A_1, A_2 и уменьшением числа Бонда Bo магнитная жидкость вытягивается по направлению магнитного поля, образуя пикообразную вершину. Кроме того, кривизна поверхности k монотонно уменьшается по мере удаления от пика. Таким образом, если предположить, что плотность узлов \bar{s}_i зависит от кривизны k , то преобразование $\bar{s}(t)$ можно задать следующим образом [4], [6]:

$$\bar{s}(t) = \bar{s}(t, a) = -a + \frac{2(a + 1)}{1 + \left(1 + \frac{2}{a}\right)^{1-t}}, a = const > 0. \quad (2.21)$$

Функция $\bar{s}(t, a)$ вида (2.21) определена и изменяется на отрезке $[0, 1]$. Она выполняет отображение сжатия в направлении вершины $\bar{s}_0 = 0$, за счет растяжения области, прилегающей к экваториальной линии $\bar{s}_N = 1$. Степень сжатия зависит от параметра a : чем он меньше, тем сжатие сильнее. Следовательно, преобразование (2.21) отображает однородную сетку $\{t_i = ih \mid i = \overline{0, N}, h = 1/N\}$ в неоднородную $\{\bar{s}_i = \bar{s}(t_i) \mid i = \overline{0, N}\}$, которая плотнее вблизи пикообразной вершины, что соответствует ожидаемой структуре разностного решения.

Параметр a зависит от формы свободной поверхности и определяется таким образом, чтобы произведение безразмерной кривизны $k(0)$ в вершине на шаг $h_1 = \bar{s}_1 - \bar{s}_0 = \bar{s}(h, a)$ было постоянным для любых A_1, A_2, Bo и равнялось произведению кривизны при $A_1 = 0$ на шаг равномерной сетки h [4], [6]. Таким образом, в случае параметрической постановки должно выполняться условие:

$$\begin{aligned} -\left(BoL_2^2\bar{z}_0 + L_2Q - L_2\frac{A_1}{J_1}U_2\varphi_0\right)\left(-a + \frac{2(a+1)}{1 + \left(1 + \frac{2}{a}\right)^{1-h}}\right) = \\ = -(BoL_2^2\bar{z}_0 + L_2Q)h; \end{aligned} \quad (2.22)$$

а для непараметрической постановки оно будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} -\left(Boz_0 + Q - \frac{A_1}{J_1}U_2\varphi_0\right)\left(-a + \frac{2(a+1)}{1 + \left(1 + \frac{2}{a}\right)^{1-h}}\right) = \\ = -(Boz_0 + Q)h. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Для задачи (2.19) разностные аналоги для уравнений равновесия будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}\left(\frac{\bar{r}_{t,i+0.5}^{n+1}}{\dot{\bar{s}}_{i+0.5}} - \frac{\bar{r}_{i-0.5}^{n+1}}{\dot{\bar{s}}_{i-0.5}}\right) = -\frac{1}{2}\left(\bar{z}_{t,i+0.5}^n + \bar{z}_{t,i-0.5}^n\right) \times \\ \times \left(Bo \cdot L_2^2 \cdot \bar{z}_i^n + L_2 \cdot Q - \frac{(\bar{z}_{t,i+0.5}^n + \bar{z}_{t,i-0.5}^n)}{2\bar{r}_i^n \dot{\bar{s}}_i} - L_2 \cdot \frac{A_1}{J_1}U_2\varphi_i\right), \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}\left(\frac{\bar{z}_{t,i+0.5}^{n+1}}{\dot{\bar{s}}_{i+0.5}} - \frac{\bar{z}_{i-0.5}^{n+1}}{\dot{\bar{s}}_{i-0.5}}\right) - \frac{1}{2}\left(\bar{r}_{t,i+0.5}^n + \bar{r}_{t,i-0.5}^n\right)BoL_2^2\bar{z}_i^{n+1} = \\ = \frac{L_2}{2}\left(\bar{r}_{t,i+0.5}^n + \bar{r}_{t,i-0.5}^n\right)\left(Q - \frac{(\bar{z}_{t,i+0.5}^n + \bar{z}_{t,i-0.5}^n)}{2\bar{r}_i^n \dot{\bar{s}}_i} - \frac{A_1}{J_1}U_2\varphi_i\right), \end{aligned} \quad (2.25)$$

$i = \overline{1, N-1}$;

а для граничных условий:

$$\bar{r}_0^{n+1} = \frac{\delta}{L_2}, L_2^{n+1} = \frac{1}{\bar{r}_N^{n+1}}; \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \bar{r}_N^{n+1} &= \bar{r}_{N-1}^{n+1} + h \dot{s}_N \sin \alpha + \frac{h^2}{2} \dot{s}_N^2 \cos \alpha \times \\ &\times \left(Bo \cdot L_2^2 \cdot \bar{z}_N^n + L_2 \cdot Q - L_2 \cos \alpha - L_2 \frac{A_1 U_2}{J_1} \varphi_N \right) - \frac{h^2}{2} \ddot{s}_N \sin \alpha \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \bar{z}_0^{n+1} &= \frac{\bar{z}_1^{n+1}}{1 + \frac{h^2}{2} \dot{s}_0^2 \sin \alpha Bo L_2^2} + \\ &+ \frac{h \dot{s}_0 \cos \alpha - \frac{h^2}{2} \dot{s}_0^2 \sin \alpha L_2 \left(Q + \frac{\cos \alpha}{\delta} - \frac{A_1 U_2}{J_1} \varphi_0 \right) + \frac{h^2}{2} \cos \alpha \ddot{s}_0}{1 + \frac{h^2}{2} \dot{s}_0^2 \sin \alpha Bo L_2^2} \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \bar{z}_N^{n+1} &= \frac{\bar{z}_{N-1}^{n+1}}{1 + \frac{h^2}{2} \dot{s}_N^2 \sin \alpha Bo L_2^2} + \\ &+ \frac{h \dot{s}_N \cos \alpha - \frac{h^2}{2} \dot{s}_N^2 \sin \alpha L_2 \left(Q - \cos \alpha - \frac{A_1 U_2}{J_1} \varphi_N \right) - \frac{h^2}{2} \cos \alpha \ddot{s}_N}{1 + \frac{h^2}{2} \dot{s}_N^2 \sin \alpha Bo L_2^2} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Для задачи (2.20) разностные уравнения для граничных условий будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{z_1}{1 + \frac{h^2}{2} \frac{\dot{s}_0^2}{\sin^3 \alpha_1} Bo} + \\ &+ \frac{h \dot{s}_0 \operatorname{ctg} \alpha_1 - \frac{h^2}{2} \frac{\dot{s}_0^2}{\sin^3 \alpha_1} \left(Q + \frac{\cos \alpha}{\delta} - \frac{A_1}{J_1} U_2 \varphi_0 \right) + \frac{h^2}{2} \operatorname{ctg} \alpha_1 \ddot{s}_0}{1 + \frac{h^2}{2} \frac{\dot{s}_0^2}{\sin^3 \alpha_1} Bo}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} z_N &= \frac{z_{N-1}}{1 + \frac{h^2}{2} \frac{\dot{s}_N^2}{\sin^3 \alpha_2} Bo} + \\ &+ \frac{h \dot{s}_N \operatorname{ctg} \alpha_1 - \frac{h^2}{2} \frac{\dot{s}_N^2}{\sin^3 \alpha_2} \left(Q - \frac{\cos \alpha_2}{\delta} - \frac{A_1}{J_1} U_2 \varphi_N \right) - \frac{h^2}{2} \operatorname{ctg} \alpha_2 \ddot{s}_N}{1 + \frac{h^2}{2} \frac{\dot{s}_N^2}{\sin^3 \alpha_2} Bo}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

а для условия равновесия:

$$\begin{aligned}
& \frac{\left(\frac{z_{t,i+0.5}^{n+1}}{\dot{s}_{i+0.5}} - \frac{z_{t,i-0.5}^{n+1}}{\dot{s}_{i-0.5}} \right)}{\dot{s}_i h \left(1 + \left(\frac{z_{t,i+0.5}^n}{\dot{s}_{i+0.5}} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\frac{z_{t,i+0.5}^n}{\dot{s}_{i+0.5}}}{r_i \sqrt{1 + \left(\frac{z_{t,i+0.5}^n}{\dot{s}_{i+0.5}} \right)^2}} = \\
& = Bo z_i^{n+1} + Q - \frac{A_1}{J_1} U_2 \varphi_i, \tag{2.32} \\
& i = \overline{1, N-1}.
\end{aligned}$$

Уравнения (2.22), (2.23) решались методом Ньютона, выбирая $k(0)$ с предыдущей итерации, а затем преобразованием (2.21) обновлялась сетка для схем (2.24) – (2.29) и (2.30) – (2.32), соответственно.

На каждой итерации реализация полученных схем сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений методом прогонки, который устойчив, так как матрицы систем имеют диагональное преобладание по строкам. В случае систем (1.53), (1.54), в которых вместо краевой задачи для определения \bar{r} задана задача Коши, \bar{r}_i^n будут находится по явным рекуррентным формулам. В результате получаем новые приближения \bar{z}_i^{n+1} , \bar{r}_i^{n+1} для координат равновесных линий свободной поверхности. Для улучшения устойчивости итерационных схем в алгоритмах использовался параметр релаксации [10] $q = 0.1$. Критерий остановки

$$\max_i |\bar{z}_i^{n+1} - \bar{z}_i^n| < \varepsilon q, \quad \max_i |\bar{r}_i^{n+1} - \bar{r}_i^n| < \varepsilon q, \quad \varepsilon = 10^{-6}.$$

В качестве начального итерационного приближения выбиралось точное решение при $\alpha = \frac{\pi}{2}, A_1 = 0$:

$$z^0 = const, r_1 = s, r_2 = s + \delta, L_1 = \delta, L_2 = 1 - \delta;$$

Используя выражения для определения безразмерного объема U и константы Q получим

$$\begin{aligned}
0 &= Bo \cdot z^0 + Q, \\
z^0 &= -\frac{Q}{Bo} = \frac{U}{\pi}.
\end{aligned}$$

Медленно продвигаясь от $\alpha = \frac{\pi}{2}$ к заданным значениям угла смачивания, можно получить приближения координат равновесных линий свободных поверхностей при различных значениях параметров A_1, A_2 , которые характеризуют магнитные свойства жидкости и величину силы тока в проводнике, соответственно. Реализация на языке Python 3 построенных разностных схем представлена в [11].

Таким образом, разработан алгоритм численного решения задачи о равновесных формах свободной поверхности магнитной жидкости в капилляре, погруженный в широкий цилиндрический сосуд, в параметрической и непараметрической постановках. Для описания пикообразных конфигураций магнитной жидкости в сильном магнитном поле построен алгоритм генерации адаптивной сетки, плотность узлов которой зависит от кривизны свободной поверхности.

ГЛАВА 3 ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

3.1 Поведение жидкости в отсутствие магнитного поля

Для заданных параметров $\delta = 0.04$, $U = 3$, $Bo = 300$ расчеты проводились на равномерной сетке с шагом $h = \frac{1}{N} = 10^{-3}$, где N – число узлов. Эволюция поведения жидкости в капилляре и внешнем сосуде при различных углах смачивания в отсутствие магнитного поля, показана на рисунке 3.1

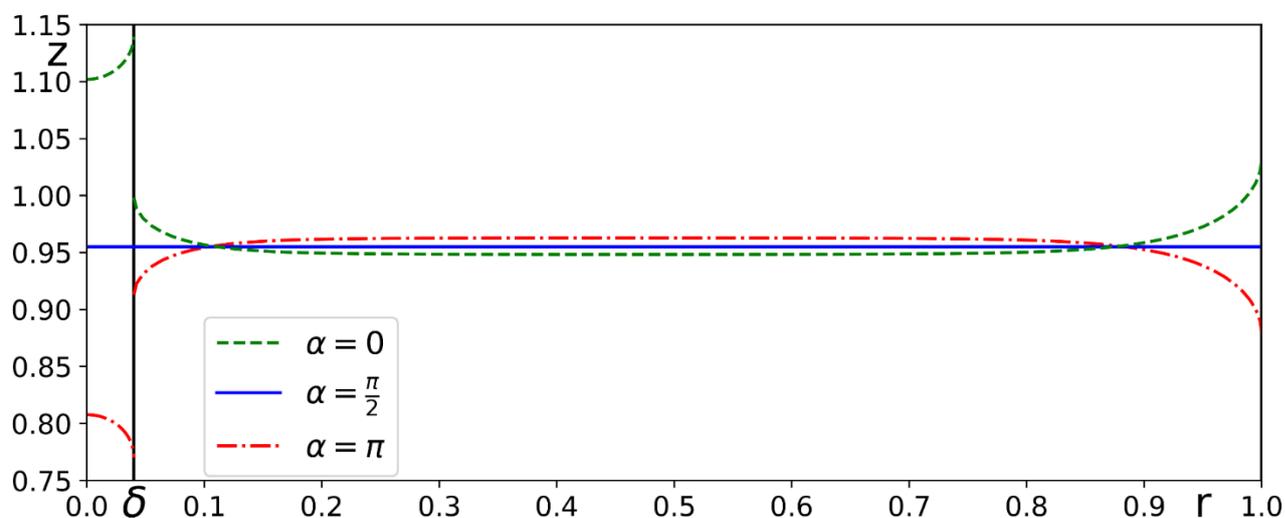


Рисунок 3.1 – Поведение жидкости в капилляре и внешнем сосуде при изменении угла смачивания.

Как видим, равновесная форма свободной поверхности в капилляре сильно зависит от угла смачивания α . При $\alpha = \pi$ уровень жидкости опускается значительно ниже значения z_0 , соответствующего нейтральному углу $\alpha = \pi/2$, а при $\alpha = 0$ – поднимается значительно выше z_0 . Это связано со смачивающим эффектом капиллярных сил, приводящим к натеканию жидкости на стенки при $\alpha < \pi/2$, при которых свободная поверхность вогнута в сторону жидкости. При $\alpha > \pi/2$ свободная поверхность выпукла в сторону газа; в этом случае капиллярные силы сдерживают поднятие жидкости в капилляре, приводя к понижению ее уровня относительно z_0 . В тоже время, уровень жидкости во внешнем сосуде остается практически постоянным и только вблизи точек

контакта незначительно зависит от α . Это связано со смачивающим эффектом. Отметим, что результаты, полученные в случае непараметрической и параметрической постановках опубликованы в [13], [14].

3.2 Сравнение с теоретическими оценками

Сравним полученные результаты с известными теоретическими оценками [2], [15]. Оценка Лапласа, описывающая высоту подъема жидкости в капилляре на оси симметрии при $\alpha = 0$, имеет вид:

$$z(0) \geq \frac{2 \cos \alpha}{B} - \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1 - \sin^3 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 3.83,$$

где $B = B_0 \cdot \delta^2$; а оценки Финна, которые дают нижнюю и верхнюю границы при $\alpha = 0$:

$$z(0) \leq \frac{2 \cos \alpha}{B} - \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1 - \sin^3 \alpha}{\cos^2 \alpha} + B \frac{\cos \alpha (1 + 2 \sin \alpha)}{6(1 + \sin \alpha)^4} = 3.91,$$

$$z(0) \geq \frac{\cos \alpha}{B} \left(1 + \sqrt{1 + B \left(\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi - \alpha}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)} \right)^2} \right) \times e^{1 - \sqrt{1 + B \left(\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi - \alpha}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)} \right)^2}} = 3.78,$$

$$z(0) \geq 4 \frac{\cos \alpha}{B} \frac{1 + \sqrt{1 + B}}{1 + \sin \alpha + \sqrt{2(1 + \sin \alpha)}} \times e^{2 \cdot \cos\left(\frac{\pi - \alpha}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) - \sqrt{1 + B} - 1} = 3.43.$$

В результате численного моделирования в данной работе высота подъема жидкости на оси симметрии капилляра при $\alpha = 0$:

$$z(0) = 3.84.$$

Рассмотрим оценки высоты мениска, то есть изменение высоты капиллярной поверхности от точки симметрии до точек соприкосновения поверхности со стенкой трубки $H = z(1) - z(0)$. Формула Лапласа, которая дает нижнюю оценку для H при $\alpha = 0$:

$$H \geq \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{1 - \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \sin^3 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \frac{\sin \alpha}{2 \cos \alpha} \right) \cdot B = 0.84,$$

а оценка Финна при $\alpha = 0$:

$$H \geq \sqrt{\frac{p+1}{p}} \sqrt{\frac{2}{B}(1 - \sin \alpha) + \frac{p+1}{4} + \frac{\left(\frac{2 \cos \alpha}{B}\right)^2}{2} - \frac{2 \cos \alpha}{B}} = 0.83,$$

где $p = \sqrt{1 + \frac{2B}{1 + \sin \alpha}}$.

В данной работе получено следующее значение высоты мениска при $\alpha = 0$:

$$H = 0.94.$$

Таким образом, полученные численные результаты согласуются с известными теоретическими оценками.

3.3 Поведение жидкости под влиянием гравитационных и магнитных полей

Расчеты проводились при $Bo = 370$, $A_1 = 116$, $A_2 = 0.24$, $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$, $U = 3$. Отметим, что значения $Bo = 370$, $A_1 = 116$, $A_2 = 0.24$ соответствуют экспериментальным данным, используемым в [12].

Эволюция поведения жидкости в капилляре и внешнем сосуде при изменении параметра A_1 , характеризующего магнитные свойства жидкости, показана на рисунке 3.2.

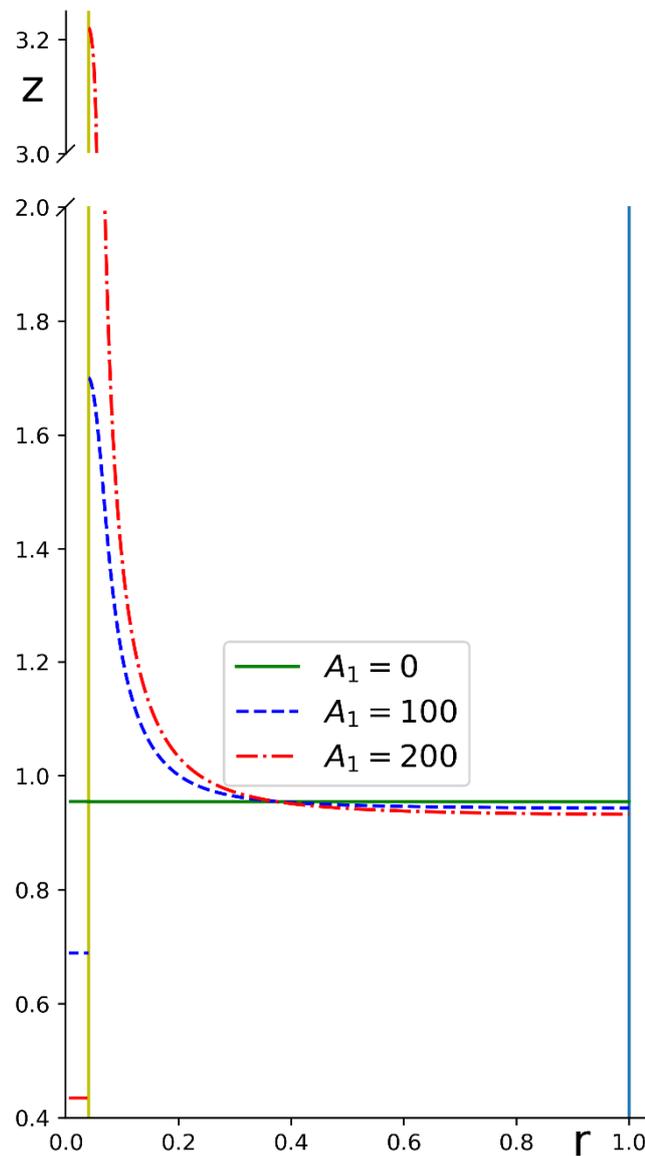


Рисунок 3.2 – Влияние параметра A_1 на равновесную форму свободной поверхности при $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ и $A_2 = 0.2$.

Как видим, чем больше значение A_1 , тем сильнее опускается уровень жидкости внутри капиллярной трубки и тем сильнее меняется форма свободной поверхности во внешней области: линия контакта жидкости со стенкой проводника становится выше, в то время как по мере удаления от него жидкость немного опускается. Это объясняется тем, что магнитное поле ослабевает по квадратичному закону.

Эволюция поведения жидкости в капилляре и внешнем сосуде при изменении параметра A_2 , характеризующего силу тока, показана на рисунке 3.3.

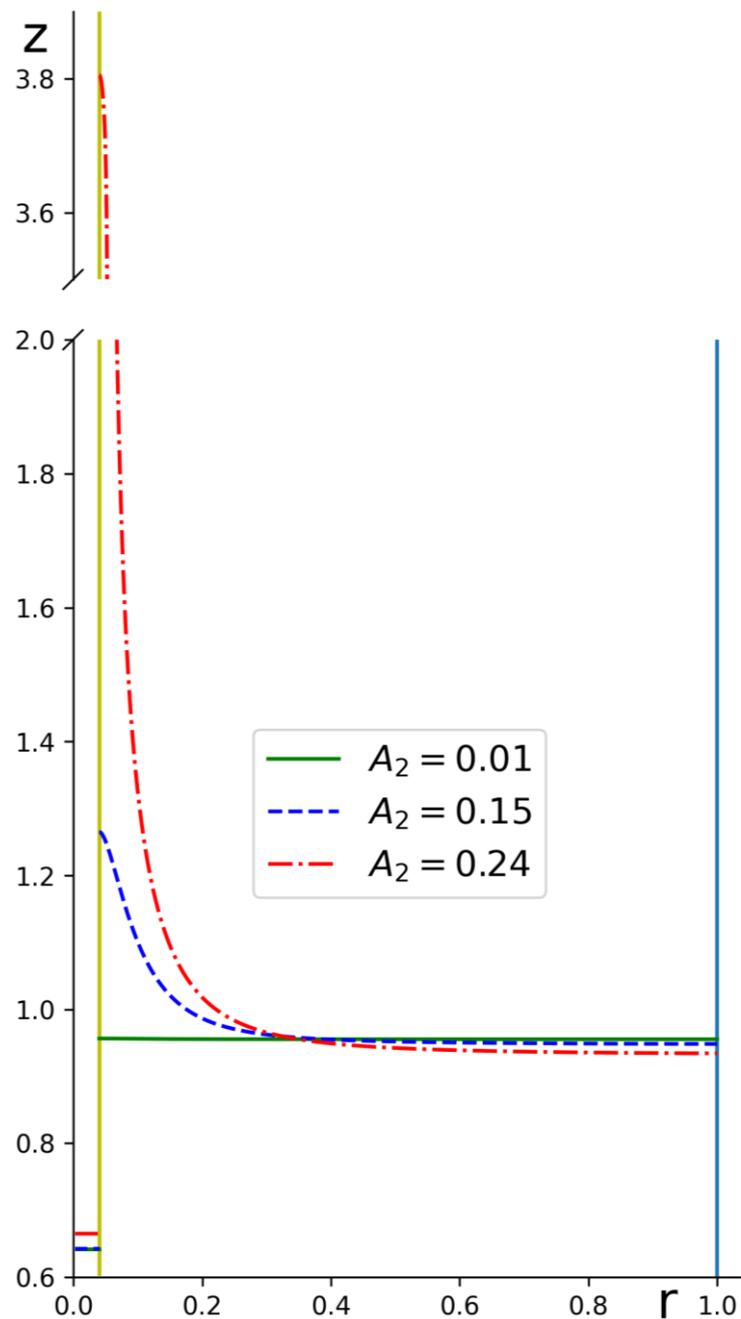


Рисунок 3.3 – Влияние параметра A_2 на равновесную форму свободной поверхности при

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} \text{ и } A_1 = 116.$$

Как видим, при увеличении A_2 внутри капилляра столб жидкости немного растет, в то время как во внешнем сосуде меняется форма свободной поверхности: вблизи проводника наблюдается сильный подъем жидкости, а по мере удаления от него жидкость немного опускается относительно уровня, соответствующего значению параметра $A_2 = 0.01$.

Эволюция поведения жидкости в капилляре и внешнем сосуде при изменении параметра A_2 и значении угла смачивания жидкости со стенкой проводника $\alpha_1 = 0$ показана на рисунке 3.4.

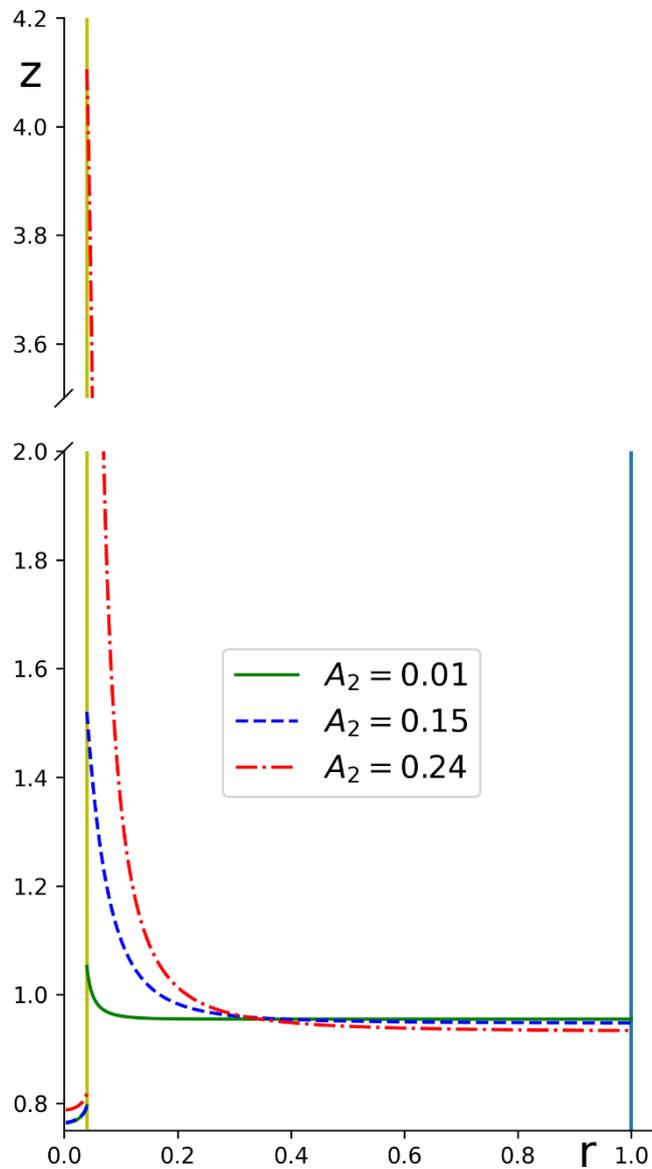


Рисунок 3.4 – Влияние параметра A_2 на форму свободной поверхности при $\alpha_1 = 0$.

Так как при $\alpha_1 = 0$ имеет место эффект смачивания, поэтому внутри капилляра и во внешнем сосуде линии соприкосновения жидкости со стенкой проводника находятся выше, чем в случае $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$. Таким образом, угол смачивания влияет не только на уровень жидкости внутри капилляра и ее свободную поверхность, но и на равновесную форму во внешней области.

Эволюция поведения жидкости в капилляре и внешнем сосуде при объеме $U = 10$ в зависимости от параметра A_2 показана на рисунке 3.5

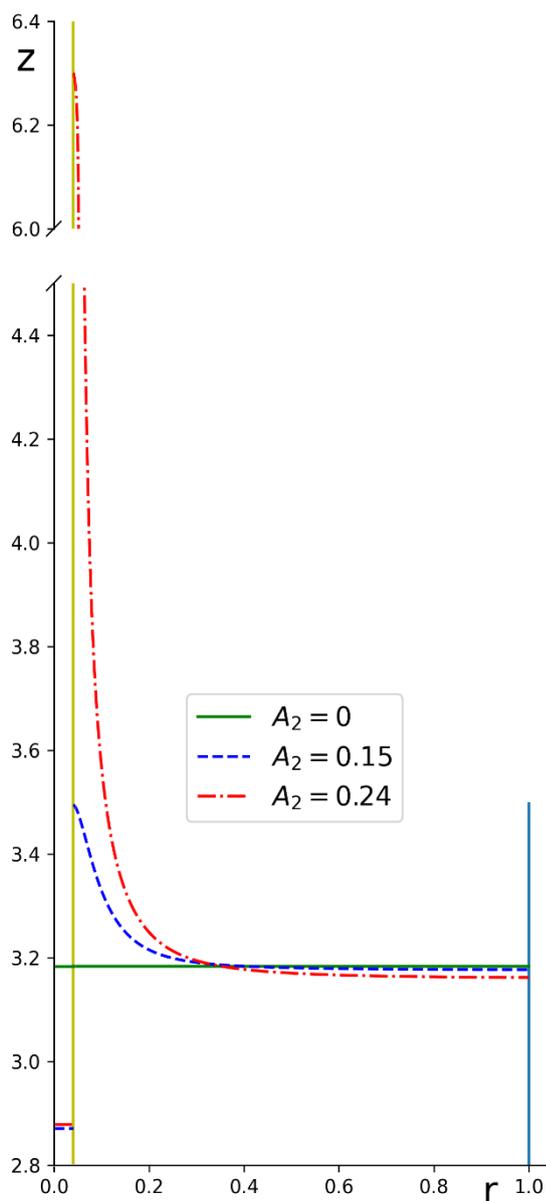


Рисунок 3.5 – Влияние параметра A_2 на форму свободной поверхности при $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$.

Как видим, за счет того, что магнитное поле оказывает сильное влияние на большой объем жидкости, высота линии соприкосновения со стенкой проводника во внешней области находится выше, чем в случае $U = 3$.

Стоит отметить, что для алгоритмов с равномерной сеткой, имеет место неустойчивость при $A_1 = 116$, $A_2 = 0.08$, $Bo = 370$, $h = 10^{-3}$ и $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$. В то время как для алгоритмов с адаптивной сеткой с таким же числом разбиений удалось

получить решение при $A_1 = 116$, $A_2 = 5$, $Bo = 370$ и $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$, при этом минимальный шаг равен $h_0 = 10^{-7}$, а максимальный $h_N = 10^{-3}$.

Рассмотрим влияние числа Бонда на равновесную форму свободной поверхности. Эволюция поведения магнитной жидкости в капилляре и внешней области при $A_1 = 20$, $A_2 = 0.1$, $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$ и изменении числа Бонда показана на рисунке 3.6.

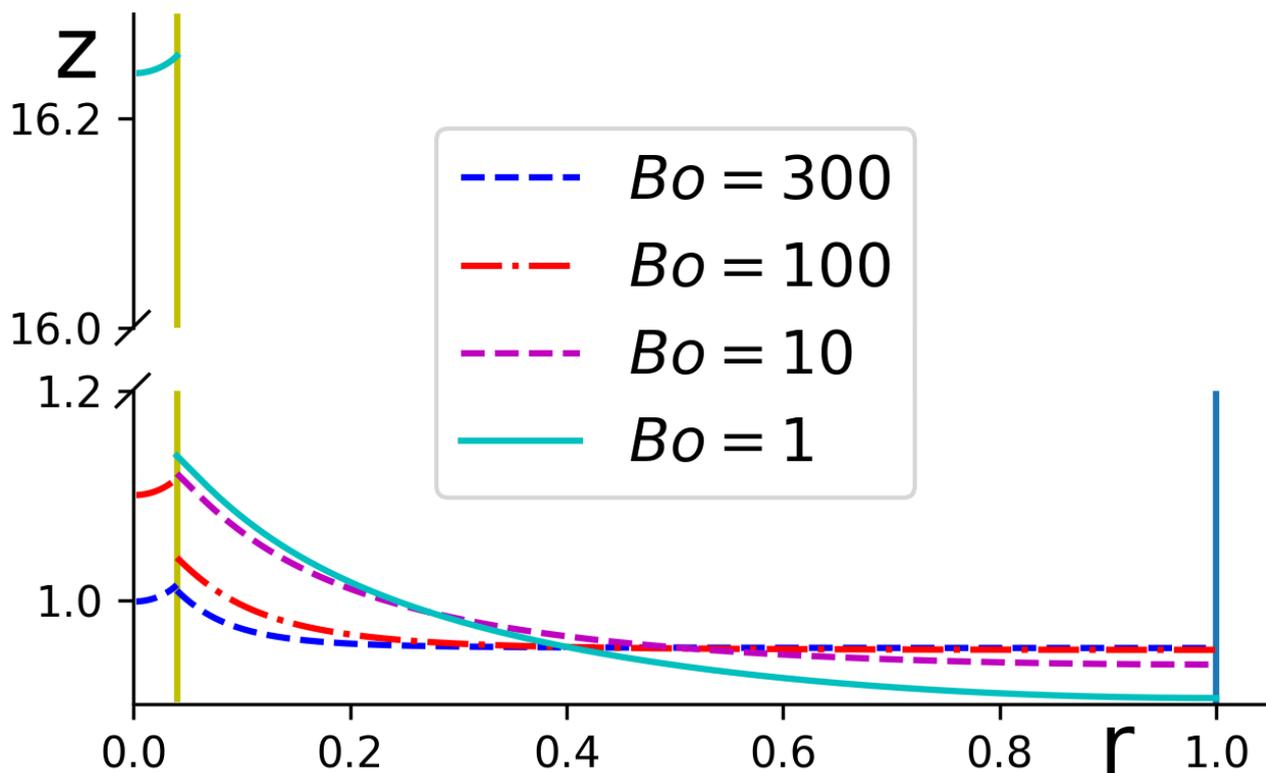


Рисунок 3.6 – Влияние числа Бонда на форму свободной поверхности при $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$.

Как видим, при уменьшении числа Бонда, т.е. уменьшении влияния гравитационных сил, внутри проводника наблюдается подъем уровня жидкости, в то время как во внешнем сосуде вблизи капилляра линия соприкосновения жидкости с проводником становится выше, а вблизи стенки внешнего сосуда уровень жидкости значительно опускается.

Теперь рассмотрим, как влияет увеличение параметра A_2 на форму свободной поверхности при малом значении числа Бонда. Эволюция поведения магнитной жидкости во внешней области показана на рисунке 3.7

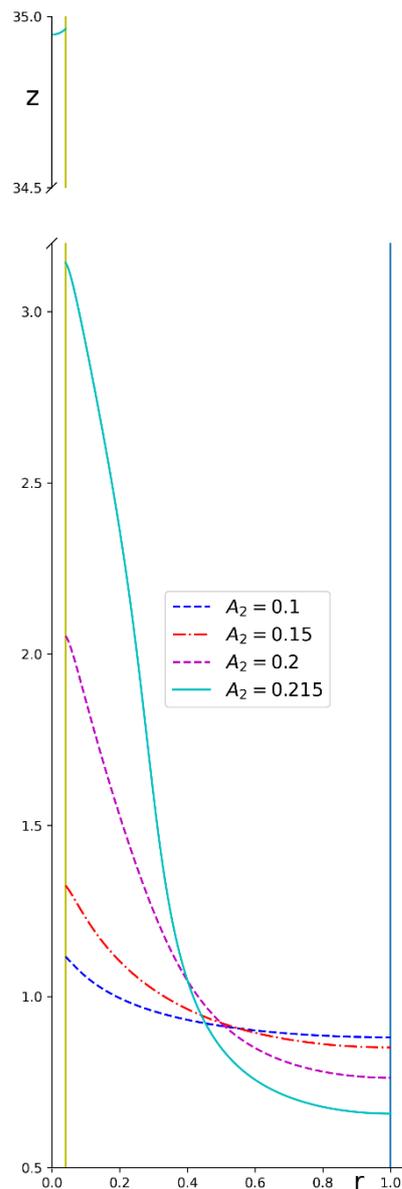


Рисунок 3.7 – Влияние параметра A_2 на форму свободной поверхности во внешнем сосуде при $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$ и $Bo = 0.5$.

Как видим, при увеличении параметра A_2 магнитное поле оказывает сильное влияние на свободную поверхность во внешней области. В частности, вблизи проводника уровень жидкости значительно выше значения z_0 , а вблизи стенки сосуда – значительно ниже. Стоит отметить, что в отсутствие магнитного поля при следующих значениях параметров $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$, $U = 3$, $\delta = 0.04$ и $Bo = 0.5$ имеет место неустойчивость. Это обусловлено тем фактом, что существование равновесных состояний в исходной задаче, при условии отсутствия магнитного поля ограничено [1]. Так, при малых значениях числа Бонда жидкость переходит в такое состояние, при котором ее потенциальная энергия минимальна, то есть при которой ее свободная поверхность имеет наименьшую площадь. В таком случае на свободной поверхности во внешнем цилиндре будут образовываться трехмерные структуры, из-за чего нарушится осевая симметрия задачи, которая не будет иметь решения согласно [2]. При значениях числа Бонда Bo меньших 0.0381, $A_1 = 20$, $A_2 = 0.2$, $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$, $U = 3$, $\delta = 0.04$ также имеет место неустойчивость.

Таким образом, удалось получить численные результаты при различных физических и геометрических параметрах задачи и сравнить их известными теоретическими оценками.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе численно решена задача о равновесных формах несвязной поверхности магнитной жидкости. Построены итерационные алгоритмы численного решения задачи как в параметрической, так и непараметрической постановках. Преимуществом параметрической постановки является ее применимость на всем диапазоне углов смачивания, в то время как для непараметрической постановки он ограничен. Для описания пикообразных конфигураций магнитной жидкости в сильном магнитном поле был построен и реализован алгоритм генерации адаптивной сетки, плотность узлов которой зависела от кривизны свободной поверхности.

Полученные численные результаты в отсутствие магнитного поля согласуются с известными теоретическими оценками, при этом можно сделать вывод, что угол смачивания, радиус капилляра, а также число Бонда оказывают сильное влияние не только на форму свободной поверхности, но и на ее высоту. В случае наличия магнитного поля, магнитные свойства жидкости, а также сила тока влияют не только на свободную поверхность во внешнем сосуде, но и на высоту столба жидкости внутри капилляра.

Получены не только равновесные формы свободной поверхности жидкости в широком диапазоне чисел Бонда, но и критические значения числа Бонда, при которых нарушается осевая симметрия задачи. Таким образом, построенные алгоритмы позволяют не только моделировать несвязные капиллярные поверхности, но и исследовать на применимость осесимметричную модель в условиях слабой гравитации.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Бабский, В.Г. [и др.] Гидромеханика невесомости. Под редакцией А.Д. Мышкиса./ А.Д. Мышкис – М.: Наука, 1976. – 504 с.
2. Финн, Р. Равновесные капиллярные поверхности. Математическая теория: Пер. с англ./ Р. Финн. – М.: Мир, 1989. – 312 с.
3. Rosensweig, R. E., Ferrohydrodynamics. / R. E. Rosensweig – Dover Publ. Inc., New York, 1997.
4. Polevnikov, V.K. Methods for numerical modeling of two-dimensional capillary surfaces / V.K. Polevnikov // Computational Methods in Applied Mathematics. – 2004. Vol. 4, No. 1. – P. 66–93.
5. Polevnikov, V. On the solution of the steady-state diffusion problem for ferromagnetic particles in a magnetic fluid. / V. Polevnikov, L. Tobiska // Mathematical Modelling and Analysis. – 2008/ Vol. 13, No. 2. – P. 233–240.
6. Полевиков В. К. О применении адаптивных сеток при расчете свободной поверхности в задачах статики магнитной жидкости / В. К. Полевиков // Дифференциальные уравнения. – 1994. – Т. 30, № 12. – С. 2146 – 2152.
7. Полевиков, В.К. О методах численного моделирования равновесных капиллярных поверхностей / В.К. Полевиков // Дифференциальные уравнения.– 1999 .– Т.35, № 7. – С. 975-981.
8. Gille, M. Simulation of a pending drop at a capillary tip / M. Gille [et al.] // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2015. – Vol. 26, No. 9. – P. 137 –151.
9. Вабищевич, П.Н. Численные методы решения задач со свободной границей. / П.Н. Вабищевич. – М.: МГУ, 1987. – 162 с.
10. Самарский, А.А Численные методы. / А.А. Самарский, А.В. Гулин – М.: Наука, 1989. –432 с.
11. Molochko, I. Master thesis // colab.research.google.com [Electronic resource] / Molochko Плуа – 2022. – Mode of access:

https://colab.research.google.com/drive/10DGp4LVsEFEuD87mzO8yZyI4s6CQ-Z_0?usp=sharing. – Date of access: 17.03.2022.

12. Баштовой В.Г., Будник А.М., Полевиков В.К., Рекс А.Г. Исследование двухсвязных равновесных форм магнитной жидкости в магнитном поле вертикального проводника // Магнитная гидродинамика. – 1984, №2. – С. 47-53.
13. Молочко, И.П. Численное моделирование осесимметричной несвязной капиллярной поверхности / И.П. Молочко // 75-я научная конференция студентов и аспирантов Белорусского государственного университета [Электронный ресурс]: материалы конф. В 3 ч. Ч. 2, Минск, 14–23 мая 2018 г. / Белорус. гос. ун-т, Гл. упр. науки; редкол.: В. Г. Сафонов (пред.) [и др.]. – Минск: БГУ, 2018. – С. 254-257.
14. Молочко, И.П. Численное моделирование осесимметричной несвязной капиллярной поверхности / И.П. Молочко // 76-я научная конференция студентов и аспирантов Белорусского государственного университета [Электронный ресурс]: материалы конф. В 3 ч. Ч. 1, Минск, 13–24 мая 2019 г. / Белорус. гос. ун-т; редкол.: В. Г. Сафонов (пред.) [и др.]. – Минск: БГУ, 2019. – С. 101-104.
15. Finn, R. On the Laplace formula and meniscus height for capillary surface / R. Finn // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. – 1981. – Vol. 61, No. 1. – P. 165 – 173.