

СПОСОБ ЛИНЕАРИЗАЦИИ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ Яр-Мухамедов И.Г.

Институт машиноведения и автоматики НАН КР, г. Бишкек

Многие задачи условной оптимизации с линейными ограничениями имеют нелинейные целевые функции. Это существенно снижает возможности их решения, в особенности, при значительных размерностях. Типовой случай нелинейной целевой функции – сумма квадратов отклонений значений некоторых переменных от их желаемых, нормативных либо наблюдаемых значений [1, 2].

Функция, подлежащая минимизации, имеет следующий вид:

$$\sum_i (X_i - C_i)^2 \rightarrow \min .$$

Здесь: X_i – переменная, характеризующая состояние объекта; C_i – константа, относительно которой определяется отклонение; i – индекс координаты пространства состояний объекта.

В последнее время все больше уделяется внимание другому, тоже нелинейному критерию – критерию суммы модулей отклонений:

$$\sum_i |X_i - C_i| \rightarrow \min .$$

К его достоинствам обычно относят слабую чувствительность к значительным отклонениям – медианный характер оценок, получаемых с его помощью. Робастность методов обуславливает качество управления.

Существуют различные подходы и методы линеаризации как полностью нелинейных моделей, так и только целевых функций с различными видами нелинейностей [3, 4]. Для нас интерес представляет способ, который, хоть и не универсален, но предельно прост и позволяет получить классическую задачу линейного программирования из задач, целевые функции которых представимы в виде суммы квадратов либо модулей отклонений..

Каждый из членов суммы может быть представлен в виде простой разности без квадрата или знака абсолютного значения. Эта разность должна быть минимизирована:

$$X_i - C_i \rightarrow \min .$$

При этом вполне оправдано требование, чтобы эта разность не стала отрицательной. Во-первых, это противоречит исходным формам критериев, а во-вторых, “перерегулирование” может быть связано с дополнительными затратами. Таким образом, система ограничений пополнится еще одним для каждой из переменных, входящих в целевую функцию:

$$X_i \geq C_i, \quad i \in I .$$

При таком преобразовании необходимо учесть еще два обстоятельства. Первое заключается в том, что минимизируемые разности должны быть объединены в единую целевую функцию. Второе связано с тем, что медианный характер получаемых решений может не вполне соответствовать исходной задаче. Например, нередко малые отклонения несут незначительные потери, а большие, наоборот, очень значимы. Это имеет место в случаях явно нелинейных функций потерь или издержек.

Для исключения возможных ухудшений значений всех переменных либо некоторых, имеющих экстремальные значения, введем дополнительные ограничения вида:

$$X_i \leq D_i .$$

Здесь D_i - текущее значение переменной состояния. В задачах управления текущее состояние известно и обычно рассматривается как отправная точка для конструирования оптимальной или субоптимальной траектории управляемого движения объекта.

Существенную роль в моделируемом объекте или ситуации могут играть характеристики важности переменных либо их значений. В этом случае имеет смысл ввести соответствующие весовые коэффициенты для отдельных членов целевой функции. Коэффициент может быть пропорционален значению функции потерь для текущего значения переменной состояния.

Следует отметить, что введение коэффициентов важности, хоть и очень похоже на то, что делается при свертке ряда критериев в один, не является способом преобразования многокритериальной задачи в однокритериальную.

До сих пор мы рассматривали случай, при котором текущее значение переменной состояния превышает требуемое или нормативное. Если же оно меньше требуемого, то необходимо просто поменять знаки неравенств на противоположные, в целевой функции поменять знаки переменной и ее нормативного значения.

Процесс линеаризации иллюстрируется рисунком 1.

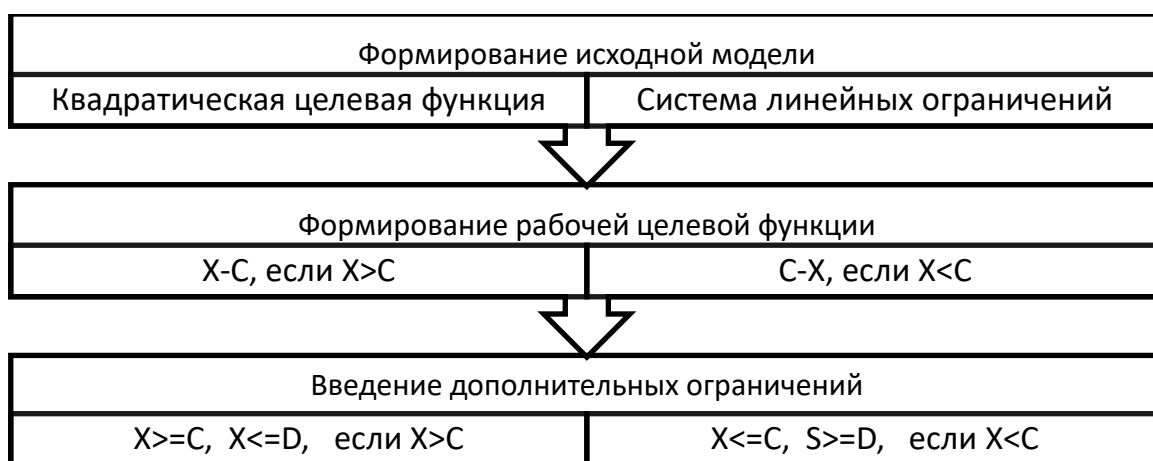


Рисунок 1. Последовательность действий по линеаризации целевой функции.

Особенность предложенного способа линеаризации в том, что он неприменим к задаче “в общем виде”. Для такого преобразования необходима дополнительная информация. А именно: текущее состояние объекта. Только наличие этой информации позволяет ввести дополнительные ограничения и “конкретизировать” финальную версию целевой функции.

Не следует думать, что требование по введению данных о текущем состоянии противоречит сути методов поиска оптимума. Достаточно того, что методы линейного программирования являются численными. И даже без дополнительных ограничений стандартным приемом является выбор начального “нулевого” решения для запуска, например, процедуры симплекс-метода.

Литература

1. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. – Л.: Физматгиз, 1962. – 352 с.
2. Теория управления (дополнительные главы): Учебное пособие / Под ред. Д. А. Новикова. — М.: ЛЕНАНД, 2019. — 552 с
3. Пшеничный Б.Н. Метод линеаризации. – М.: Наука, 1983. – 136 с.

4. Киселев В.Д. Методы и алгоритмы решения задач целочисленного квадратичного программирования на основе линеаризации целевой функции // Известия ТулГУ. Технические науки. 2014. Вып. 11. Ч. 1. – С. 402-412.

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ СОДЕРЖАТЕЛЬНОЙ НАПОЛНЯЕМОСТИ ДИСЦИПЛИНЫ «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА» ДЛЯ СТУДЕНТОВ-МЕНЕДЖЕРОВ

¹Яшкин В. И., ²Марков А. В., ¹Воробьева В. П.

¹Белорусский государственный университет, г. Минск

²Белорусский государственный экономический университет, г. Минск

Практически все направления менеджмента в современных условиях предполагают обязательное присутствие такой составляющей, как математика.

Математическое образование менеджера включает изучение основ высшей математики: математического анализа, линейной алгебры, аналитической геометрии, теории графов, теории вероятностей и математической статистики, методов интегрирования дифференциальных моделей, а также методов применения компьютерных технологий к исследованию математических моделей экономических процессов и прикладных задач в разных сферах экономики. На начальном этапе изучения разделов экономики и управления математика используется для оперирования с количественными характеристиками. Деятельность различных экономических объектов всегда связана с исследованием и решением ряда сложных математических задач. Некоторые из них можно решить с помощью математического моделирования. Учитывая накопленный опыт создания и реализации математических моделей в экономике, научные разработки по их систематизации и анализу с целью выработки системного подхода применения математических методов, следует уделять особое внимание подготовке студентов в этом направлении уже с первого семестра. Такой подход в полной мере учитывается при определении содержания материала учебной дисциплины «Высшая математика», преподаваемой авторами студентам родственных специальностей: «Менеджмент (в сфере международного туризма)» в Белорусском государственном университете и «Экономика и управление торговлей и туристической индустрией» в Белорусском государственном экономическом университете.

Традиционно сложным для студентов является изучение раздела, посвященного исследованию на экстремум функции многих действительных переменных. Учебными программами для указанных выше специальностей предусмотрено рассмотрение следующих понятий и методов: частные производные; частные производные и дифференциалы высших порядков; теорема Шварца; понятие экстремума функции двух действительных переменных; необходимые условия; достаточные условия; наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных; метод наименьших квадратов и его приложения. На практических занятиях в качестве содержательных примеров, закрепляющих интуитивное понимание экстремума функции многих переменных, авторы используют рассмотрение простых моделей экономики и управления. Далее приводится пример такой модели.

Постановка задачи. Производятся два вида товаров, цены которых соответственно равны p_1 и p_2 условных единиц. Функция затрат, связанных с производством этих товаров, имеет вид

$$C(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2,$$

где x , y – количества товаров первого и второго вида. Требуется составить функцию