2. PISA: математическая грамотность. – Минск: РИКЗ, 2020. – 252 с.

3.Кленина Л.И. Гибридное и смешанное образование в университете при изучении математики. Publisher: LAP LAMBERT Academic Publishing, Republic of Moldova Europe Printed, 2021. – 137 p. (ISBN: 978-620-4-19823-1).

4. .Кленина Л.И., Дорофеева И.Н. Свойства, вычисления и некоторые приложения кратных интегралов: Учебное пособие по курсу «Высшая математика» для студентов, обучающихся по техническим направлениям. М.: Издательство «Спутник +». 2019. – 101 с. (ISBN: 978-5-9973-5181-6).

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГРАФИЧЕСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ В ИССЛЕДОВАНИЯХ ХИМИКО-БИОЛОГИЧЕСКИКИХ ПРОЦЕССОВ

**Коваленко Н.С., Асадчий М.В.**

*Белорусский государственный университет, г. Минск*

Операцию интегрирования часто понимают, как процесс отыскания множества первообразных заданной подынтегральной функции. Известны различные способы нахождения неопределенного и определённого интеграла, однако большинство методов основаны на алгебраических преобразованиях заранее известной подынтегральной функции (подынтегрального выражения) [1]. Это в равной мере относится и к приближенным методам вычисления определенных интегралов с помощью квадратурных формул и рядов. Серьезную проблему представляет процесс вычисления определенных интегралов, когда подынтегральная функция в аналитическом виде заранее не известна. Проблема возникает каждый раз при работе с современными приборами (хроматографы, масс-спектрометры и др.) в физико-химических и биомедицинских исследованиях, когда результатом является графическое представление протекания процессов и структуры объектов [2]. В этом случае можно воспользоваться графическим интегрированием. Этой проблеме и посвящена данная работа.

Пусть задано графическое представление некоторой функции $y = f(x)$. Задача состоит в том, чтобы геометрическими методами, не прибегая к использованию аналитических методов, приближенных квадратурных формул и числовых рядов для нахождения определенного интеграла, найти приближенное значение этого интеграла $I = \int_a^b f(x)dx$.

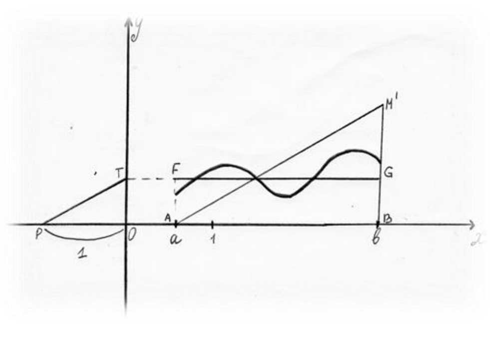


Рис. 1. График функции $y = f(x)$.

Будем предполагать, что масштаб по оси $Ox$ равен масштабу по оси $Oy$ и что полюс графика $P$ находится на расстоянии единицы масштаба от начала координат: $|OP|=1$ (рис.1). Выполним следующие построения. Проведем прямую $FG$, параллельную оси $Ox$ и пересекающую линию $y=f(x)$ так, чтобы площадь полученного прямоугольника как можно меньше отличалась от площади нашей криволинейной трапеции. Для этого нужно, чтобы площадь, заключенная между линией $y=f(x)$ и прямой $FG$ и лежащая над этой прямой, по возможности, точно равнялась площади, заключенной между заданной линией и прямой и лежащей под прямой $FG$. Продолжим прямую $FG$ до пересечения с осью $Oy$ в точке $T$ и соединим эту точку с полюсом графика. Дале, из точки $A$ проведем прямую, параллельную $PT$, до пересечения с прямой $x=b$ в точке $M'$. Легко убедиться в том, что длина отрезка $BM'$ изображает искомую площадь, т.е. отрезок $BM'$ содержит столько линейных масштабных единиц, сколько квадратных единиц содержит площадь криволинейной трапеции. В самом деле, из подобия треугольников $POT$ и $ABM'$ находим $\frac{BM'}{AB}=\frac{OT}{OP}$. Откуда следует, что $BM'=\frac{AB\cdot OT}{OP}$. По условию, $OP=1$. Следовательно,

$$BM'=AB\cdot OT \quad . \tag{1}$$

Так как (1) выражает площадь под графиком функции $y=f(x)$, то $BM'=\int_a^b f(x)dx$. Если интервал $[a,b]$ недостаточно мал, то построение прямой $FG$ “на глаз” может привести к ощутимой ошибке. Для того чтобы уточнить построение, разобьем интервал интегрирования на частичные интервалы (не обязательно равные между собой), а всю трапецию – на ряд трапеций, опирающихся на эти частичные интервалы. Точки деления выберем таким образом, чтобы каждый частичный интервал был интервалом монотонности подынтегральной функции и в числе точек деления находились все точки пересечения линии $y=f(x)$ с осью $Ox$. Если в каждом интервале линия незначительно отличается от прямой, то в качестве средних линий частичных трапеций можно брать просто ординаты в средних точках частичных интервалов. Тогда отпадает необходимость проводить на глаз вспомогательные линии. На практике обычно так и поступают. Последовательно для каждой из частичных криволинейных трапеций построим указанным выше путем отрезок, изображающий ее площадь. В целях ясности чертежа удобно откладывать этот отрезок не от данной оси $Ox$, а от другой оси $Oy$, параллельной первой (рис.2). В точке $x=a$ площадь трапеции, отсчитываемая от прямой $x=a$, очевидно, равна нулю. Отметим на оси $O_1x$ точку $M_0'(a,0)$, она соответствует точке $M_0$ линии $y=f(x)$. До прямой $x=x_1$ площадь трапеции равна площади первой частичной трапеции; она изобразится отрезком $M_1x_1$, которой мы получим, если из точки $M_0'$ проведем прямую, параллельную $PT_1$, до пересечения с прямой $x=x_1$ в точке $M_1'$. Эта точка соответствует точке $M_1$ на линии. Площадь трапеции до прямой $x=x_2$ (т.е. значение интеграла, взятого от $a$ до $x_2$ ) равна сумме (в алгебраическом смысле) площадей первой и второй частичных трапеций. Она изобразится отрезком $M_2'x_2$, который получится, если из точки $M_1'$ провести прямую, параллельную $PT_2$, до пересечения с прямой $x = x_2$ в точке $M_2'$. Эта точка соответствует точке $M_2'$ на линии. Продолжая так же дальше, построим последовательно точки $M_3'$, $M_4'$, ... , соответствующие точкам $M_3, M_4$, ... линии. Ордината точки $M_n'$, соответствующей точке $M_n'[b, f(b)]$линии, и даст нам искомое значение интеграла $I$. Ясно, что чем больше точек деления, тем точнее получится построение. Соединим полученные точки $M_0', M_1', M_2'$, ... , $M_n'$ плавной линией. Ординаты этой линии, очевидно, приближенно изображают значения интеграла, взятого от $x = a$ до соответствующих точек основания трапеции. Другими словами, эта линия является графиком функции, определяемой нашим интегралом с переменным верхним пределом: $I(x) = \int_a^x f(x) dx$.

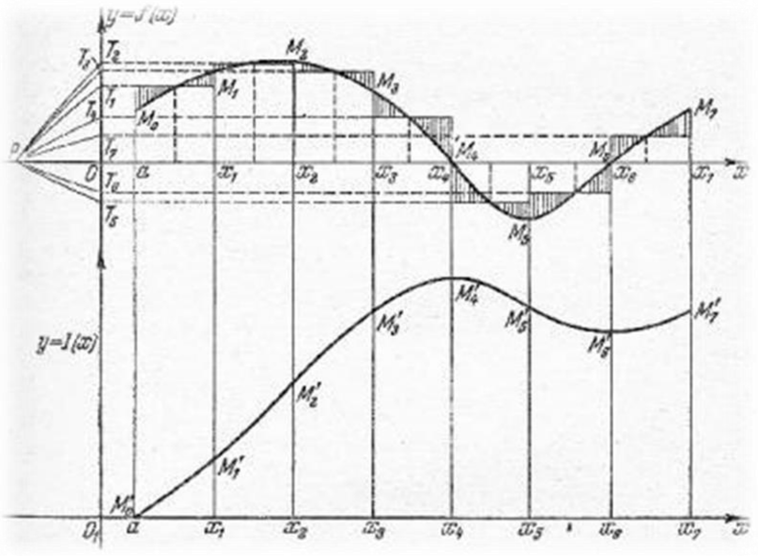


Рис. 2. Интегрирование в больших диапазонах

Линия $y = I(x)$ называется интегральной кривой функции $y = f(x)$. Рассмотренное выше геометрическое построение интегральной кривой по графику подынтегральной функции называется графическим интегрированием. Графическое интегрирование можно применять в тех случаях, когда подынтегральная функция задается графически, а ее аналитическое выражение неизвестно. Это нередко встречается в практике, например, когда функция определяется графиком, записываемым самопишущим прибором.

**Литература**

1. Высшая математика. Практикум: учебное пособие в 2 ч. / О. М. Матейко, Н. А. Дегтяренко, В. И. Яшкин, Н.С. Коваленко [и др.]; под ред. С. А. Самаля. – Минск: РИВШ, 2020. – Ч. 1. – 332 с.

2. Беккер Ю. Спектроскопия / Ю. Беккер. Серия "Мир химии". – М.:Техносфера, 2021. – 528 с.