УДК 517.58

О ЛОКАЛЬНОЙ ОБРАТИМОСТИ ФУНКЦИЙ *h*-КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

В. А. ПАВЛОВСКИЙ[1)]***, И. Л. ВАСИЛЬЕВ***[1)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Теория функций *h*-комплексного переменного – альтернатива для обычной теории функций комплексного переменного, получающаяся заменой правил умножения. Это изменение приводит к появлению делителей нуля на множестве *h*-комплексных чисел. Такие числа образуют коммутативное кольцо, не являющееся полем. *h*-Голоморфные функции выступают решениями систем уравнений гиперболического типа, тогда как классические голоморфные функции – решениями систем уравнений эллиптического типа. Следствием этого является значительное отличие свойств *h*-голоморфных и классических голоморфных функций. Интерес к исследованию свойств функций *h*-комплексного переменного связан с необходимостью поиска новых методов решения задач механики и плоской теории относительности. В данной работе доказана теорема о локальной обратимости *h*-голоморфных функций, сформулированы принципы сохранения области и максимума нормы для *h*-голоморфных функций.

Ключевые слова: *h*-голоморфность; локальная обратимость; принцип сохранения области; принцип максимума нормы; кольцо *h*-комплексных чисел; делители нуля.

ON LOCAL INVERTIBILITY OF FUNCTIONS OF AN *h*-COMPLEX VARIABLE

V. A. PAVLOVSKY[a]***, I. L. VASILIEV***[a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*
Corresponding author: V. A. Pavlovsky (pavlad95@gmail.com)

The theory of functions of an *h*-complex variable is an alternative to the usual theory of functions of a complex variable, obtained by replacing the rules of multiplication. This change leads to the appearance of zero divisors on the set of *h*-complex numbers. Such numbers form a commutative ring that is not a field. *h*-Holomorphic functions are solutions of systems of equations of hyperbolic type, in comparison with classical holomorphic functions, which are solutions of systems of equations of elliptic type. A consequence of this is a significant difference between the properties of *h*-holomorphic functions and the classical ones. Interest in studying the properties of functions of an *h*-complex variable is associated with the need to search for new methods for solving problems in mechanics and the plane theory of relativity. The paper presents a theorem on the local invertibility of *h*-holomorphic functions, formulates the principles of preserving the domain and maximum of the norm.

Keywords: *h*-holomorphy; local invertibility; domain preservation principle; norm maximum principle; ring of *h*-complex numbers; zero divisors.

Образец цитирования:
Павловский ВА, Васильев ИЛ. О локальной обратимости функций *h*-комплексного переменного. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2022;1:103–107.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-1-103-107

For citation:
Pavlovsky VA, Vasiliev IL. On local invertibility of functions of an *h*-complex variable. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2022;1:103–107. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-1-103-107

Авторы:
Владислав Андреевич Павловский – аспирант кафедры теории функций механико-математического факультета. Научный руководитель – И. Л. Васильев.
Игорь Леонидович Васильев – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры теории функций механико-математического факультета.

Authors:
Vladislav A. Pavlovsky, postgraduate student at the department of function theory, faculty of mechanics and mathematics.
pavlad95@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-2916-1241
Igor L. Vasiliev, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of function theory, faculty of mechanics and mathematics.
vassilyevl@bsu.by

Введение

Пусть $\mathbb{C}_h$ – множество всех h-комплексных чисел [1–6]. Любое число из множества $\mathbb{C}_h$ представимо в алгебраической форме:

$$z = (a;\, b) = (a;\, 0) + (0;\, b) = a \cdot (1;\, 0) + b \cdot (0;\, 1) = a + jb = \operatorname{Re} z + j \operatorname{Hyp} z,$$

где $a = \operatorname{Re} z$ – вещественная часть числа z, а $b = \operatorname{Hyp} z$ – гиперболическая часть числа z. Как показано в работе [7], множество h-комплексных чисел $\mathbb{C}_h$ есть кольцо с делителями нуля, каковыми являются числа вида $a \pm aj$.

Норма элемента в кольце $\mathbb{C}_h$ определяется по формуле $\|z\| = |a| + |b|$, а модуль h-комплексного числа имеет вид $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ [7].

Пусть D – область в $\mathbb{C}_h$, тогда любая h-комплексная функция $f : D \to \mathbb{C}_h$ представима в алгебраической форме:

$$f(z) = f(x + jy) = u(x,\, y) + jv(x,\, y).$$

Функция $f(z) = u(x,\, y) + jv(x,\, y)$ называется h-голоморфной в точке $z_0 = x_0 + jy_0 \in D$, если функции u и v имеют непрерывные вторые частные производные и выполнены условия

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Функция $f(z)$ h-голоморфна в области $D \subset \mathbb{C}_h$, если она h-голоморфна в каждой точке этой области.

Теорема о локальной обратимости *h*-голоморфных функций

Пусть $f(z) = u(x,\, y) + jv(x,\, y)$ – функция, h-голоморфная в области $D \subset \mathbb{C}_h$. Тогда всюду в D $u'_x = v'_y$, $u'_y = v'_x$, $f'(z) = u'_x + jv'_x$ [7]. В отличие от классических голоморфных функций условие $f'(z) \neq 0$ не является достаточным даже для локальной обратимости h-голоморфных функций. Например, для функции $f(z) = (1 + j)z$ производная $f'(z) = 1 + j \neq 0$ всюду в $\mathbb{C}_h$, однако эта функция ни в одной точке локально не обратима. Покажем, что при более сильных ограничениях локальная обратимость h-голоморфных функций имеет место. Верна следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть функция* $w = f(z) = u(x,\, y) + jv(x,\, y)$ *h-голоморфна в области* $D \subset \mathbb{C}_h$, $z_0 = a + {}$ ${}+ jb \in D$. *Если* $|u'_x(a,\, b)| \neq |u'_y(a,\, b)|$, *то существуют открытая окрестность U точки z_0 и открытая окрестность V точки* $w_0 = f(z_0)$ *такие, что функция* $f : U \to V$ *имеет обратную функцию* $f^{-1} : V \to U$, *которая непрерывно h-дифференцируема в V, и, следовательно,*

$$\left\{f^{-1}\right\}'(w) = \left\{f'(z)\right\}^{-1}. \tag{1}$$

Если $|u'_x(x,\, y)| \equiv |u'_y(x,\, y)|$ *в некоторой окрестности точки z_0, то f не обратима в этой окрестности.*

Доказательство. 1. Функции f поставим в соответствие непрерывно дифференцируемое в окрестности точки $(a;\, b) \in \mathbb{R}^2$ согласованное отображение

$$F(x,\, y) = \begin{bmatrix} u(x,\, y) \\ v(x,\, y) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{J} = \det F'(x,\, y) = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ u'_y & u'_x \end{vmatrix} = (u'_x)^2 - (u'_y)^2 \neq 0.$$

По теореме об обратном отображении существуют открытая окрестность U^* точки $(a;\, b) \in \mathbb{R}^2$ и открытая окрестность V^* точки $F(a;\, b) \in \mathbb{R}^2$ такие, что отображение $F : U^* \to V^*$ имеет обратное отображение $F^{-1} : V^* \to U^*$. Это отображение также непрерывно дифференцируемо и, таким образом,

$$\left\{F^{-1}\right\}'(u,\, v) = \left\{F'(x,\, y)\right\}^{-1}. \tag{2}$$

Отображению $F^{-1}(u,v)=\begin{bmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{bmatrix}$ поставим в соответствие функцию $z=f^{-1}(w)=x(u,v)+jy(u,v)$. Окрестностям U^* и V^* соответствуют окрестности U и V точек $z_0=a+jb$ и $w_0=f(z_0)$. Тогда функции $f:U\to V$ и $f^{-1}:V\to U$ являются обратными друг другу.

2. Докажем формулу (1). Имеем

$$F'(x,y)=\begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ u'_y & u'_x \end{vmatrix},$$

тогда

$$\left\{F'(x,y)\right\}^{-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{u'_x}{\mathbf{J}} & -\dfrac{u'_y}{\mathbf{J}} \\ -\dfrac{u'_y}{\mathbf{J}} & \dfrac{u'_x}{\mathbf{J}} \end{bmatrix},\ \left\{F^{-1}\right\}'(u,v)=\begin{bmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{bmatrix}.$$

Из выражения (2) получаем $x'_u=\dfrac{u'_x}{\mathbf{J}},\ x'_v=-\dfrac{u'_y}{\mathbf{J}},\ y'_u=-\dfrac{u'_y}{\mathbf{J}},\ y'_v=\dfrac{u'_x}{\mathbf{J}}$. Для функции $z=f^{-1}(w)=x(u,v)+$ $+\,jy(u,v)$ имеем

$$x'_u=y'_v=\frac{u'_x}{\mathbf{J}},\ x'_v=y'_u=-\frac{u'_y}{\mathbf{J}}.$$

Следовательно, функция f^{-1} h-голоморфна в V, и тогда

$$\left\{f^{-1}\right\}'(w)=x'_u+jy'_u=\frac{u'_x-ju'_y}{\mathbf{J}}=\frac{u'_x-jv'_x}{\mathbf{J}}=\frac{1}{u'_x+jv'_x}=\left\{f'(z)\right\}^{-1}.$$

3. Пусть $\left|u'_x(x,y)\right|\equiv\left|u'_y(x,y)\right|$ в некоторой окрестности U точки z_0. Введем характеристические координаты $\xi=\dfrac{1}{2}(x+y),\ \eta=\dfrac{1}{2}(x-y)$. Имеем

$$\begin{cases} u'_\xi=u'_x+u'_y, \\ u'_\eta=u'_x-u'_y, \end{cases}\ \begin{cases} v'_\xi=v'_x+v'_y, \\ v'_\eta=v'_x-v'_y. \end{cases}$$

Если $u'_x=u'_y$, то с учетом $u'_x=v'_y,\ u'_y=v'_x$ выводим

$$u'_\xi=v'_\xi=2u'_x,\ u'_\eta=v'_\eta=0.$$

Отсюда

$$u=u(\xi)=u\left(\frac{x+y}{2}\right),\ v=v(\eta)=v\left(\frac{x+y}{2}\right)=u\left(\frac{x+y}{2}\right)+C,$$

где $C\in\mathbb{R}$. Тогда

$$f(z)=u\left(\frac{x+y}{2}\right)+jv\left(\frac{x+y}{2}\right)=(1+j)\cdot u\left(\frac{x+y}{2}\right)+jC.$$

Пусть $z_0\in D,\ z_0=a+jb$. Все точки интервала $\gamma=\left\{x+y=a+b \,\middle|\, z=x+jy\in U\right\}$ переходят в точку $w_0=(1+j)\cdot u\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+jC$, лежащую на прямой $y=x+C$. Если $u'_x=-u'_y$, то $u'_\xi=v'_\xi=0,\ u'_\eta=-v'_\eta=2u'_x$. Отсюда

$$u=u(\eta)=u\left(\frac{x-y}{2}\right),\ v=v(\eta)=v\left(\frac{x-y}{2}\right)=-u\left(\frac{x-y}{2}\right)+C.$$

Тогда

$$f(z)=u\left(\frac{x-y}{2}\right)+j\left(-u\left(\frac{x-y}{2}\right)+C\right)=(1-j)\cdot u\left(\frac{x-y}{2}\right)+jC,$$

где $C \in \mathbb{R}$. В этом случае для любой точки $z_0 \in D$ и ее окрестности U все точки интервала $\overline{\gamma} = \{x - y = a - b | z = x + jy \in U\}$ переходят в точку $w_0 = (1 - j) \cdot u\left(\frac{a - b}{2}\right) + jC$, лежащую на прямой $y = -x + C$.

Таким образом, при $|u'_x(x, y)| \equiv |u'_y(x, y)|$ всюду в D функция f локально не обратима ни в одной точке области D. Теорема доказана.

Замечание 1. В отличие от классического комплексного анализа условие $f'(z) \neq 0$ не является необходимым для локальной обратимости h-голоморфных функций в окрестности точки z. Например, $f(z) = z^3$ обратима в любой окрестности точки $z = 0$, в то время как $f'(0) = 0$.

Принцип сохранения области

Для h-голоморфных функций обычный принцип сохранения области не имеет места. Например, образом открытого h-круга $D = \{\|z\| < 1\}$ при отображении $f(z) = (1 + j) \cdot u(x + y)$ будет интервал $\gamma = \{w = (1 + j) \cdot u(x + y) | -1 < x + y < 1\}$, который не является областью в $\mathbb{C}_h$. Для h-голоморфных функций верна следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть функция* $w = f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ *h-голоморфна в области* $D \subset \mathbb{C}_h$, *а функции* $u'_x(x, y)$, $u'_y(x, y)$ *непрерывны в области* $D^* = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 | z = x + jy \in D\}$. *Если* $|u'_x(x, y)| \neq |u'_y(x, y)|$ *всюду в* D^*, *то множество* $E = f(D)$ *является областью. Если* $|u'_x(x, y)| \equiv |u'_y(x, y)|$ *всюду в* D, *то* $f(D)$ – *открытый интервал вида*

$$\gamma = \left\{w = (1 \pm j) \cdot u\left(\frac{x \pm y}{2}\right) + jC \middle| C \in \mathbb{R}, (x; y) \in D^*\right\}.$$

Доказательство. 1. Пусть $|u'_x(x, y)| \neq |u'_y(x, y)|$. Докажем, что множество $E = f(D)$ открыто. Выберем произвольную точку $w_0 = f(z_0) \in E$, $z_0 = x_0 + jy_0 \in D$. В силу теоремы 1 существуют такие открытые окрестности U и V точек z_0 и w_0 соответственно, что функция $f : U \to V$ имеет обратную функцию $f^{-1} : V \to U$. Тогда для любой точки $w_1 \in V$ существует такая точка $z_1 \in U$, что $z_1 = f^{-1}(w_1) \in D$, $w_1 = f(z_1) \in E$. Следовательно, множество E открытое.

2. Докажем, что E связно. Для открытых множеств связность эквивалентна линейной связности [8]. Пусть $w_1, w_2 \in E$, $z_1 \in D$ – один из прообразов w_1, $z_2 \in D$ – один из прообразов w_2. Существует путь $\gamma : z = z(t)$, $t \in [0, 1]$, связывающий в D точки z_1 и z_2. Из непрерывности f вытекает, что образ $\gamma^* = f[z(t)]$, $t \in [0, 1]$, будет путем, связывающим в E точки w_1 и w_2. Очевидно, что $\gamma^* \in E$, следовательно, множество E связное. Таким образом, при $|u'_x(x, y)| \neq |u'_y(x, y)|$ всюду в D множество $E = f(D)$ есть область.

3. Пусть $|u'_x(x, y)| \equiv |u'_y(x, y)|$ для любой точки $(x; y) \in D^*$. Если $u'_x = u'_y$, то $f(z) = (1 + j) \cdot u\left(\frac{x + y}{2}\right) + jC$ и для любой точки $z \in D$ точка $w = f(z)$ лежит на интервале $\gamma = \left\{w = (1 + j) \cdot u\left(\frac{x + y}{2}\right) + jC \middle| C \in \mathbb{R}, (x; y) \in D^*\right\}$. Если $u'_x = -u'_y$, то $f(z) = (1 - j) \cdot u\left(\frac{x - y}{2}\right) + jC$ и образы любой точки $z \in D$ лежат на интервале $\overline{\gamma} = \left\{w = (1 - j) \cdot u\left(\frac{x - y}{2}\right) + jC \middle| C \in \mathbb{R}, (x; y) \in D^*\right\}$. Указанные интервалы не являются областями в $\mathbb{C}_h$. Теорема доказана.

Принцип максимума нормы

Теорема 3. *Пусть функция* $w = f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ *h-голоморфна в области* $D \subset \mathbb{C}_h$, *а функции* $u'_x(x, y)$, $u'_y(x, y)$ *непрерывны в области* $D^* = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 | z = x + jy \in D\}$. *Если* $|u'_x(x, y)| \neq |u'_y(x, y)|$ *всюду в* D^*, *то функция* $\|f(z)\|$, $f(z) \neq \text{const}$, *не может достигать локального максимума во внутренней точке области* D.

Доказательство. В силу теоремы 2 множество $E = f(D)$ является областью. Пусть $\|f(z)\|$ достигает локального максимума в точке $z_0 \in D$, $w_0 = f(z_0) \in E$. Тогда существуют такие открытые окрестности U и V точек z_0 и w_0 соответственно, что функция $f : U \to V$ обратима. В окрестности V найдется такая точка w_1, что $\|w_1\| > \|w_0\|$. Это противоречит тому, что $\|f(z)\|$ достигает максимума в точке z_0. Теорема доказана.

Следствие 1. *Если в условиях теоремы 3* $f \in C(\bar{D})$, *то функция* $\|f(z)\|$ *достигает максимума на границе* ∂D.

Следствие 2. *Если в условиях теоремы 3* $f(z) \neq 0$ *для любой точки* $z \in D$, *то* $\|f(z)\|$ *не может достигать локального минимума внутри* D.

Библиографические ссылки

1. Ивлев ДД. О двойных числах и их функциях. В: Бронштейн ИН, Варпаховский ФЛ, редакторы. *Математическое просвещение. Серия: Математика, ее преподавание, приложения и история. Выпуск 6.* Москва: Государственное издательство физико-математической литературы; 1961. с. 197–203.

2. Розенфельд БА. *Неевклидовы геометрии.* Москва: Государственное издательство технико-теоретической литературы; 1955. 744 с.

3. Khrennikov A. Hyperbolic quantum mechanics. *Advances in Applied Clifford Algebras.* 2003;13(1):1–9. DOI: 10.1007/s00006-003-0001-1.

4. Khrennikov A. An introduction to hyperbolic analysis. arXiv:math-ph/0507053v2 [Preprint]. 2005 [cited 2021 March 15]: [42 p.]. Available from: https://arxiv.org/abs/math-ph/0507053v2.

5. Зверович ЭИ, Павловский ВА. Нахождение областей сходимости и вычисление сумм степенных рядов от *h*-комплексного переменного. *Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук.* 2020;56(2):189–193. DOI: 10.29235/1561-2430-2020-56-2-189-193.

6. Павловский ВА. Алгебраические уравнения с вещественными коэффициентами в кольце *h*-комплексных чисел. *Весці БДПУ. Серыя 3. Фізіка. Матэматыка. Інфарматыка. Біялогія. Геаграфія.* 2020;4:25–31.

7. Pavlovsky VA, Vasiliev IL. On *h*-holomorphy and *h*-analyticity of functions of an *h*-complex variable. *Bulletin of L. N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics Series.* 2020;4:19–27. DOI: 10.32523/2616-7182/2020-133-4-19-27.

8. Шабат БВ. *Введение в комплексный анализ. Часть 1. Функции одного переменного.* 5-е издание. Москва: Ленанд; 2015. 336 с. (Классический университетский учебник).

References

1. Ivlev DD. [On double numbers and their functions]. In: Bronshtein IN, Varpakhovskii FL, editors. *Matematicheskoe prosveshchenie. Seriya: Matematika, ee prepodavanie, prilozheniya i istoriya. Vypusk 6* [Mathematical education. Series: Mathematics, its teaching, applications and history. Issue 6]. Moscow: Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoi literatury; 1961. p. 197–203. Russian.

2. Rosenfeld BA. *Neevklidovy geometrii* [Non-Euclidean geometries]. Moscow: Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoi literatury; 1955. 744 p. Russian.

3. Khrennikov A. Hyperbolic quantum mechanics. *Advances in Applied Clifford Algebras.* 2003;13(1):1–9. DOI: 10.1007/s00006-003-0001-1.

4. Khrennikov A. An introduction to hyperbolic analysis. arXiv:math-ph/0507053v2 [Preprint]. 2005 [cited 2021 March 15]: [42 p.]. Available from: https://arxiv.org/abs/math-ph/0507053v2.

5. Zverovich EI, Pavlovsky VA. Finding the areas of convergence and calculating the sums of power series from an *h*-complex variable. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series.* 2020;56(2):189–193. Russian. DOI: 10.29235/1561-2430-2020-56-2-189-193.

6. Pavlovsky VA. Algebraic equations with material coefficients in the ring of *h*-complex numbers. *BSPU Bulletin. Series 3. Physics. Mathematics. Informatics. Biology. Geography.* 2020;4:25–31. Russian.

7. Pavlovsky VA, Vasiliev IL. On *h*-holomorphy and *h*-analyticity of functions of an *h*-complex variable. *Bulletin of L. N. Gumilyov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics Series.* 2020;4:19–27. DOI: 10.32523/2616-7182/2020-133-4-19-27.

8. Shabat BV. *Vvedenie v kompleksnyi analiz. Chast' 1. Funktsii odnogo peremennogo* [Introduction to complex analysis. Part 1. Functions of one variable]. 5th edition. Moscow: Lenand; 2015. 336 p. (Klassicheskii universitetskii uchebnik). Russian.

Получена 23.04.2021 / исправлена 09.02.2022 / принята 18.02.2022.
Received 23.04.2021 / revised 09.02.2022 / accepted 18.02.2022.