УДК 515.12

О ВЛОЖЕНИИ Ω-НАСЫЩЕНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

А. С. БЕДРИЦКИЙ[1)], *В. Л. ТИМОХОВИЧ*[1)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Счетнокомпактификацией топологического пространства X называется такое расширение Y пространства X, что Y вполне регулярно и счетно-компактно и любое замкнутое счетно-компактное подмножество пространства X замкнуто и в Y. Однако подобное расширение не всегда существует. В связи с этим появилось понятие насыщения топологического пространства, которое является некоторым обобщением понятия счетнокомпактификации: вместо условия счетнокомпактности Y требуется, чтобы любое бесконечное подмножество в X имело предельную точку в Y, второе условие остается неизменным. Такое расширение уже определено для любого T_1-пространства. В работе рассмотрена конкретная конструкция насыщения, названная Ω-насыщением. Доказано, что при некотором дополнительном условии (необходимом и достаточном) на отделимость исходного пространства X его Ω-насыщение канонически вкладывается в стоун-чеховское расширение βX. Аналогичный результат для счетнокомпактификации получен К. Моритой.

Ключевые слова: насыщение топологического пространства; счетнокомпактификация в смысле Мориты; Ω-насыщение; компактификация Волмэна; Δ-база; компактификация Стоуна – Чеха.

Образец цитирования:
Бедрицкий АС, Тимохович ВЛ. О вложении Ω-насыщения топологического пространства. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2022;1:21–25.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-1-21-25

For citation:
Biadrytski AS, Timokhovich VL. On the embedding of the Ω-saturation of a topological space. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2022;1:21–25. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-1-21-25

Авторы:
Александр Сергеевич Бедрицкий – магистрант кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета. Научный руководитель – В. Л. Тимохович.
Владимир Леонидович Тимохович – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета.

Authors:
Aliaksandr S. Biadrytski, master's degree student at the department of geometry, topology and mathematics teaching methodology, faculty of mechanics and mathematics.
abedr@vk.com
Vladimir L. Timokhovich, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of geometry, topology and mathematics teaching methodology, faculty of mechanics and mathematics.
timvlaleo@gmail.com

ON THE EMBEDDING OF THE Ω-SATURATION OF A TOPOLOGICAL SPACE

***A. S. BIADRYTSKI*[a]*, V. L. TIMOKHOVICH*[a]**

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*
Corresponding author: A. S. Biadrytski (abedr@vk.com)

The countably-compactification of a topological space X is such its extension Y, that Y is a completely regular and countably-compact space, and any closed countably-compact subset of X is closed in Y. But this extension does not always exist. Due to this, the concept of a saturation of a topological space appeared, which is a generalisation of the countably-compactification: instead of the condition of the countably-compactness of Y, it is necessary that any infinite subset of X has a limit point in Y. Meanwhile, the second condition remains unchanged. Such an extension is already defined for any T_1-space. In this paper we consider a specific construction of saturation named as Ω-saturation. It is proved that under some additional (necessary and sufficient) condition to the separation of the initial space X, its Ω-saturation is canonically embedded in the Stone – Čech compactification βX. An analogous result is obtained for the countably-compactification by K. Morita.

Keywords: saturation of a topological space; countably-compactification in the sense of Morita; Ω-saturation of a topological space; Wallman compactification; Δ-base; Stone – Čech compactification.

Введение

Понятие перистого паракомпакта появилось в работе А. В. Архангельского [1], там же дана его внешняя характеристика. Чуть позже в статье Д. Нагаты [2] было показано, что перистые паракомпакты (и только они) представляются как замкнутые подпространства произведений метризуемых пространств на компакты. Параллельно теории перистых паракомпактов развивалась теория M-пространств [3; 4]. Ввиду схожести внешних характеристик перистых паракомпактов и M-пространств естественно возник вопрос о представлении последних в виде замкнутых подпространств произведений вполне регулярных счетно-компактных пространств на метризуемые пространства. К. Моритой в работе [5] было доказано, что данное представление M-пространства X равносильно его счетнокомпактифицируемости, т. е. существованию такого вполне регулярного счетно-компактного расширения Y, что любое замкнутое счетно-компактное подмножество в X замкнуто и в Y. В этой же работе доказано, что если счетнокомпактификация Y пространства X существует, то она канонически вкладывается в стоун-чеховское расширение βX. Но, как оказалось, даже не все нормальные локально компактные M-пространства имеют счетнокомпактификацию [6]. В связи с этим возникают две задачи:

1) нахождения необходимых и достаточных условий счетнокомпактифицируемости (не обязательно M-пространства);

2) нахождения некоторой конструкции расширения, близкой по свойствам к счетнокомпактификации, но существующей по крайней мере для достаточно широкого класса пространств.

В плане решения второй задачи в публикации [7] появилось понятие насыщения топологического пространства. В работе [8] были определены и исследованы конструкции ω- и Ω-насыщений.

В настоящей статье рассмотрена конструкция Ω-насыщения, обозначенная Y_γ, и показано, что при некотором дополнительном условии (необходимом и достаточном) на отделимость исходного пространства X это расширение канонически вкладывается в стоун-чеховское расширение βX. Данный результат аналогичен вышеупомянутому свойству счетнокомпактификации, установленному К. Моритой.

Под пространством, если не оговорено иное, будем понимать произвольное топологическое T_1-пространство. Пусть X – пространство, $A \subset X$. Тогда $[A]_X$ – замыкание множества A в X; $A \underset{op}{\subset} X$ ($A \underset{cl}{\subset} X$), если множество A открыто (замкнуто) в X; $C(X, I)$ – множество всех непрерывных функций из X в I, где $I = [0; 1]$.

Множество A называется дискретом в X, если A счетно, дискретно как подпространство и замкнуто в X. Через Δ будем обозначать семейство всех дискретов пространства X.

Дальнейшие построения и рассуждения существенно используют конструкцию и свойства волмэновского компактного расширения ωX, поэтому напомним основные положения, связанные с этим расширением. Нарост $\omega X \setminus X$ волмэновского расширения ωX составляют замкнутые (т. е. состоящие из замкнутых в X множеств) свободные (т. е. имеющие пустое пересечение) ультрафильтры. Базу топологии ωX образуют множества вида $W(U)=U\cup\{\xi\in\omega X\setminus X \mid U\supset F$ для некоторого $F\in\xi\}$, где $U\underset{op}{\subset}X$ [9, с. 272]. Отметим также, что $W(U)$ является максимальным открытым раздутием множества U в ωX, т. е. $W(U)=\bigcup\left\{G\underset{op}{\subset}\omega X \mid G\cap X=U\right\}$. Если $F\underset{cl}{\subset}X$ и $F\subset U\underset{op}{\subset}X$, то $[F]_{\omega X}=F\cup\{\xi\in\omega X\setminus X \mid F\in\xi\}$ и $[F]_{\omega X}\subset W(U)$. Также верно следующее: $W(U_1\cup\ldots\cup U_n)=W(U_1)\cup\ldots\cup W(U_n)$, $[F_1\cap\ldots\cap F_n]_{\omega X}=$ $=[F_1]_{\omega X}\cap\ldots\cap[F_n]_{\omega X}$, где $U_i\underset{op}{\subset}X$, $F_i\underset{cl}{\subset}X$, $1\le i\le n$ (подробнее см. [9, с. 272]).

Предварительные рассмотрения

Пусть X и Y – пространства и X – подпространство в Y.

Определение 1 [10]. Говорят, что пространство X относительно счетно-компактно в Y, если любое бесконечное множество $A\subset X$ имеет в Y предельную точку.

Определение 2 [7]. Пространство Y называют насыщением пространства X, если X всюду плотно в Y (т. е. Y – расширение для пространства X), X относительно счетно-компактно в Y и любое счетно-компактное замкнутое в X множество замкнуто и в Y.

Следуя [8], подсемейство $\gamma\subset\Delta$ назовем Δ-базой в X, если для любого $A\in\Delta$ найдется $B\in\gamma$ такое, что $B\subset A$. Для $U\underset{op}{\subset}X$ максимальное открытое раздутие множества U в пространстве Y обозначим через $\hat{U}$, т. е. $\hat{U}=\bigcup\left\{G\underset{op}{\subset}Y \mid G\cap X=U\right\}$.

Определение 3 [8]. Пусть X всюду плотно в Y и γ – Δ-база в X. Пространство Y называется ω-насыщением пространства X, а Δ-база γ – ω-допустимой при выполнении следующих условий:

1) для любой точки $y\in Y\setminus X$ найдется дискрет $A\in\gamma$ такой, что $y\in[A]_Y$, и обратно, для любого $A\in\gamma$ $[A]_Y\cap(Y\setminus X)\ne\varnothing$;

2) если $A\in\gamma$, $B\subset A$ и $B\subset U\underset{op}{\subset}X$, то $[B]_Y\subset\hat{U}$;

3) множества вида $\hat{U}$, где $U\underset{op}{\subset}X$, образуют базу топологии пространства Y.

Если при этом для любого $A\in\gamma$ множество $[A]_Y$ компактно, то Y называется Ω-насыщением для X, а Δ-база γ – Ω-допустимой.

В работе [8] показано, что определенное таким образом ω-насыщение действительно является насыщением для пространства X. Там же определена и исследована следующая конкретная конструкция Ω-насыщения.

Фиксируем некоторую Δ-базу γ и положим

$$Y_\gamma=X\cup\{\xi\in\omega X\setminus X \mid \xi\cap\gamma\ne\varnothing\}.$$

Теорема 1 [8]. *Пространство Y_γ – насыщение пространства X, причем выполняются следующие условия:*

1) множества вида $\hat{U}$, где $U\underset{op}{\subset}X$, образуют базу топологии пространства Y_γ;

2) если $A\in\gamma$, то $[A]_{Y_\gamma}=[A]_{\omega X}$ и $[A]_{Y_\gamma}$ компактно;

3) если X регулярно, то пространство Y_γ хаусдорфово;

4) если $F\underset{cl}{\subset}X$ и $F\subset U\underset{op}{\subset}X$, то $[F]_{Y_\gamma}\subset\hat{U}$;

5) если $U=U_1\cup\ldots\cup U_n$, то $\hat{U}=\hat{U}_1\cup\ldots\cup\hat{U}_n$, если $F=F_1\cap\ldots\cap F_n$, то $[F]_{Y_\gamma}=[F_1]_{Y_\gamma}\cap\ldots\cap[F_n]_{Y_\gamma}$, где $U_i\underset{op}{\subset}X$, $F_i\underset{cl}{\subset}X$, $1\le i\le n$.

Очевидно, что Y_γ – Ω-насыщение для пространства X, а Δ-база γ является Ω-допустимой. Отметим также, что свойства, описанные в п. 1 и 5, есть прямые следствия соотношений $\hat{U}=W(U)\cap Y_\gamma$ и $[F]_{Y_\gamma}=$ $=[F]_{\omega X}\cap Y_\gamma$.

Об отделимости пространства Y_γ, помимо п. 3, известно следующее.

Определение 4 [11]. Пространство X называется δ-хаусдорфовым, если оно хаусдорфово и из любого множества $A\in\Delta$ можно выделить бесконечное подмножество $B\subset A$, допускающее раздутие до дискретного семейства $\{U_b \mid b\in B\}$, где $b\in U_b\underset{op}{\subset}X$, $b\in B$ (семейство множеств в X называют дискретным, если для любой точки из X найдется окрестность, пересекающаяся не более чем с одним множеством данного семейства).

Следуя [8], множество всех дискретов, допускающих раздутие до дискретного семейства окрестностей своих точек, обозначим через δ, а Δ-базу γ назовем δ-базой, если $\gamma \subset \delta$.

Предложение 1 [8] (см. также [12, лемма 2, теорема 5]). *Если насыщение Y_γ регулярно для некоторой Δ-базы γ, то пространство X δ-хаусдорфово и $\gamma \subset \delta$, и обратно, если X регулярно и δ-хаусдорфово, то Y_γ регулярно для любой δ-базы γ.*

Предложение 2 [8]. *Пусть X вполне регулярно и δ-хаусдорфово. Тогда и Y_γ вполне регулярно для любой δ-базы γ.*

Следующая теорема показывает, что рассмотренная выше конструкция насыщения Y_γ является универсальным пространством для всех ω-насыщений с ω-допустимой Δ-базой γ.

Теорема 2 [8]. *Для любого ω-насыщения Y пространства X с ω-допустимой Δ-базой γ существует каноническое (т. е. тождественное на X) вложение пространства Y в Y_γ, причем если Y – Ω-насыщение, а γ Ω-допустима, то Y и Y_γ канонически гомеоморфны.*

Вложение Y_γ в βX

На основании предложений 1 и 2 можем заключить, что условие δ-хаусдорфовости вполне регулярного пространства X является необходимым для вложения Y_γ в βX. Действительно, если существует вложение Y_γ в βX, то Y_γ вполне регулярно, а тогда согласно предложению 1 пространство X δ-хаусдорфово. Покажем, что это условие является и достаточным.

Перед формулировкой следующей теоремы напомним, что если отображение $f: X \to Y$ непрерывно, а Y вполне регулярно, то f единственным образом непрерывно продолжается до отображения $\varphi: \omega X \to \beta Y$ [9, с. 272].

Теорема 3. *Пусть X – вполне регулярное δ-хаусдорфово пространство, $\varphi: \omega X \to \beta X$ – непрерывное продолжение тождественного отображения Id_X пространства X на себя, γ – δ-база в X. Тогда сужение $\varphi_{|Y_\gamma}: Y_\gamma \to \varphi(Y_\gamma)$ – гомеоморфизм.*

Для доказательства нам понадобится следующая лемма.

Лемма. *Пусть $f: X \to Y$ – замкнутое отображение (т. е. $f(F) \underset{cl}{\subset} Y$ для любого $F \underset{cl}{\subset} X$), $B \subset Y$, $A = f^{-1}(B)$. Тогда сужение $f_{|A}: A \to B$ – также замкнутое отображение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $C \underset{cl}{\subset} A$, т. е. существует множество $F \underset{cl}{\subset} X$ такое, что $C = F \cap A$. Утверждение будет доказано, если покажем, что $f(C) \underset{cl}{\subset} B$. Исходя из общих свойств отображений, имеем

$$f(C) = f(A \cap F) \subset f(A) \cap f(F) = f\left(f^{-1}(B)\right) \cap f(F) \subset B \cap f(F).$$

Обратно, пусть $y \in f(F) \cap B$. Тогда $f^{-1}(y) \subset A$ и $y = f(x)$, где $x \in F$. Очевидно, что $x \in f^{-1}(y) \cap \cap F \subset A \cap F$, откуда $y \in f(A \cap F) = f(C)$. Таким образом, $f(C) = f(F) \cap B$. По условию $f(F) \underset{cl}{\subset} Y$, а значит, $f(C) = f(F) \cap B \underset{cl}{\subset} B$. Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 3. Легко видеть, что отображение φ замкнуто. В самом деле, любое замкнутое в ωX множество компактно, следовательно, его непрерывный образ является компактом в βX, а значит, и замкнутым множеством. Пространство Y_γ представим в виде $Y_\gamma = X \cup \left(\bigcup\limits_{A \in \gamma} [A]_{\omega X}\right)$. Поскольку $\varphi\left([A]_{\omega X}\right) = \left[\varphi(A)\right]_{\beta X} = [A]_{\beta X}$ для любого $A \in \gamma$, то $\varphi(Y_\gamma) = X \cup \left(\bigcup\limits_{A \in \gamma} [A]_{\beta X}\right)$.

Докажем далее, что сужение φ на множестве $\varphi^{-1}\left(\varphi(Y_\gamma)\right)$ инъективно. Пусть $x \in X$, $\xi \in \omega X \setminus X$. Покажем, что $\varphi(x) = x \neq \varphi(\xi)$. Выберем $F \in \xi$ такое, что $x \notin F$. Так как $\xi \in [F]_{\omega X}$, то $\varphi(\xi) \in \varphi\left([F]_{\omega X}\right) = \left[\varphi(F)\right]_{\beta X} = [F]_{\beta X}$, следовательно, $\varphi(\xi) \in [F]_{\beta X}$. Но при замыкании F в βX будут добавляться только точки нароста, значит, $x \notin [F]_{\beta X}$. Таким образом, $\varphi(\xi) \neq x$.

Пусть теперь $\xi_1 \in Y_\gamma \setminus X$, $\xi_2 \in \omega X \setminus X$ и $\xi_1 \neq \xi_2$. Тогда найдутся $F_1 \in \xi_1$, $F_2 \in \xi_2$ такие, что $F_1 \cap F_2 = \varnothing$. Выберем дискрет $A \in \gamma \cap \xi_1$ и положим $A_1 = A \cap F_1$. Отметим, что $A_1 \in \xi_1$ и $F_2 \cap A_1 = \varnothing$. Так как A – элемент δ-базы γ, то A можно раздуть до дискретного семейства окрестностей $\left\{U_a \middle| a \in A\right\}$, где $a \in U_a \underset{op}{\subset} X$, $a \in A$. Рассмотрим далее подсемейство $\left\{U_a \middle| a \in A_1\right\}$. Затем для каждой точки $a \in A_1$ определим окрестность $O_a = U_a \cap (X \setminus F_2)$. Так как X вполне регулярно, то найдутся функции $f_a \in C(X, I)$ такие, что

$f_a(x)=1$, если $x = a$, и $f_a(x)=0$, если $x \in X \setminus O_a$. Рассмотрим новую функцию $f(x)=\sum_{a \in A_1} f_a(x)$. Покажем, что $f \in C(X, I)$. Пусть $x \in X$. В силу того, что семейство $D=\{O_a \mid a \in A_1\}$ дискретное, существует окрестность U точки x такая, что U пересекается не более чем с одним множеством семейства D. В том случае, когда U вовсе не пересекается ни с одним элементом из D, непрерывность очевидна, так как $f_{|U} \equiv 0$. Если же U пересекается с некоторой окрестностью O_a, $a \in A_1$, то $f_{|U} \equiv f_{a|U}$, и непрерывность f в точке x будет следовать из непрерывности f_a. В силу произвольности выбора точки x можем считать, что $f \in C(X, I)$. Как известно, любая непрерывная ограниченная функция на X может быть непрерывно продолжена на βX единственным образом [9, с. 266]. Пусть $\tilde{f} : \beta X \to I$ – непрерывное продолжение функции f. Обозначим $y_i = \varphi(\xi_i)$. Имеем $\tilde{f}(y_1) \in \tilde{f}\left([A_1]_{\beta X}\right) = \left[f(A_1)\right]_I = \{1\}$ и $\tilde{f}(y_2) \in \tilde{f}\left([F_2]_{\beta X}\right) = \left[f(F_2)\right]_I = \{0\}$, откуда следует, что $\varphi(\xi_1) \neq \varphi(\xi_2)$.

Итак, доказано, что $\varphi^{-1}\left(\varphi\left(Y_\gamma\right)\right) = Y_\gamma$ и $\varphi_{|Y_\gamma} : Y_\gamma \to \varphi\left(Y_\gamma\right)$ – биекция. Согласно приведенной выше лемме отображение замкнуто, и, таким образом, оно является гомеоморфизмом. Теорема доказана.

Библиографические ссылки

1. Архангельский АВ. Об одном классе пространств, содержащем все метрические и все локально бикомпактные пространства. *Математический сборник.* 1965;67(1):55–88.
2. Nagata J. A note on *M*-space and topologically complete space. *Proceedings of the Japan Academy.* 1969;45(7):541–543. DOI: 10.3792/pja/1195520664.
3. Morita K. Products of normal spaces with metric spaces. *Mathematische Annalen.* 1964;154(4):365–382. DOI: 10.1007/BF01362570.
4. Morita K. A survey of the theory of *M*-spaces. *General Topology and its Applications.* 1971;1(1):49–55. DOI: 10.1016/0016-660X(71)90110-3.
5. Morita K. Countably-compactifiable spaces. *Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku. Section A.* 1973;12(313/328):7–15.
6. Burke DK, van Douwen EK. On countably compact extensions of normal locally compact *M*-spaces. In: Reed GM, editor. *Set-theoretic topology.* New York: Academic Press; 1977. p. 81–89. DOI: 10.1016/B978-0-12-584950-0.50012-2.
7. Голдовт ИЮ, Тимохович ВЛ. Насыщения топологических пространств и проблема Мориты. *Доклады Академии наук БССР.* 1977;21(9):777–780.
8. Кукрак ГО, Тимохович ВЛ. О счетнокомпактифицируемости в смысле Мориты. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2021;1:46–53. DOI: 10.33581/2520-6508-2021-1-46-53.
9. Энгелькинг Р. *Общая топология.* Антоновский МЯ, Архангельский АВ, переводчики. Москва: Мир; 1986. 752 с.
10. Архангельский АВ. Компактность. *Итоги науки и техники. Серия: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.* 1989;50:5–128.
11. Кукрак ГО, Тимохович ВЛ. О пределе обратного спектра экспоненциальных пространств. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика.* 2001;1:51–55.
12. Фролова ДС. О секвенциально собственных топологиях пространства отображений. *Труды Института математики.* 2013;21(1):102–108.

References

1. Arkhangel'skii AV. [One class of spaces containing all metric and all locally compact spaces]. *Matematicheskii sbornik.* 1965; 67(1):55–88. Russian.
2. Nagata J. A note on *M*-space and topologically complete space. *Proceedings of the Japan Academy.* 1969;45(7):541–543. DOI: 10.3792/pja/1195520664.
3. Morita K. Products of normal spaces with metric spaces. *Mathematische Annalen.* 1964;154(4):365–382. DOI: 10.1007/BF01362570.
4. Morita K. A survey of the theory of *M*-spaces. *General Topology and its Applications.* 1971;1(1):49–55. DOI: 10.1016/0016-660X(71)90110-3.
5. Morita K. Countably-compactifiable spaces. *Science Reports of the Tokyo Kyoiku Daigaku. Section A.* 1973;12(313/328):7–15.
6. Burke DK, van Douwen EK. On countably compact extensions of normal locally compact *M*-spaces. In: Reed GM, editor. *Set-theoretic topology.* New York: Academic Press; 1977. p. 81–89. DOI: 10.1016/B978-0-12-584950-0.50012-2.
7. Goldovt IYu, Timokhovich VL. [Saturations of topological spaces and the Morita problem]. *Doklady Akademii nauk BSSR.* 1977;21(9):777–780. Russian.
8. Kukrak HO, Timokhovich VL. On the countably-compactifiability in the sense of Morita. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2021;1:46–53. Russian. DOI: 10.33581/2520-6508-2021-1-46-53.
9. Engelking R. *General topology.* Warszawa: Polish Scientific Publishers; 1977. 626 p. (Monografie matematyczne; tom 60).
Russian edition: Engelking R. *Obshchaya topologiya.* Antonovskii MYa, Arkhangel'skii AV, translators. Moscow: Mir; 1986. 752 p.
10. Arkhangel'skii AV. [Compactness]. *Itogi nauki i tekhniki. Seriya: Sovremennye problemy matematiki. Fundamental'nye napravleniya.* 1989;50:5–128. Russian.
11. Kukrak HO, Timokhovich VL. [On the limit of the inverse spectrum of exponential spaces]. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematica. Informatica.* 2001;1:51–55. Russian.
12. Frolova DS. On the family of sequentially proper topologies on the space of maps. *Trudy Instituta matematiki.* 2013;21(1): 102–108. Russian.

Получена 24.09.2021 / исправлена 14.02.2022 / принята 14.02.2022.
Received 24.09.2021 / revised 14.02.2022 / accepted 14.02.2022.