УДК 513.6

БИРАЦИОНАЛЬНАЯ КОМПОЗИЦИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ С БИНАРНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМОЙ

А. А. БОНДАРЕНКО[1)]

[1)]*Белорусский государственный университет, пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Беларусь*

Пусть $f(X)$ и $g(Y)$ – невырожденные квадратичные формы размерностей m и n соответственно над полем K, $\mathrm{char} K \neq 2$. Рассматривается проблема бирациональной композиции $f(X)$ и $g(Y)$: когда произведение $f(X)g(Y)$ бирационально эквивалентно над K квадратичной форме $h(Z)$ над K размерности $m + n$? Основной результат статьи – полное решение проблемы бирациональной композиции квадратичных форм $f(X)$ и $g(Y)$ над полем K при $m = 2$. Получены необходимые и достаточные условия существования бирациональной композиции $h(Z)$ для квадратичных форм $f(X)$ и $g(Y)$ над полем K при $m = 2$. Описано множество квадратичных форм, которые подходят в качестве $h(Z)$ в этом случае.

Ключевые слова: квадратичная форма; бирациональная эквивалентность; бирациональная композиция.

Образец цитирования:
Бондаренко АА. Бирациональная композиция произвольной квадратичной формы с бинарной квадратичной формой. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика.* 2022;1:14–20.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-1-14-20

For citation:
Bondarenko AA. The birational composition of arbitrary quadratic form with binary quadratic form. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics.* 2022;1:14–20. Russian.
https://doi.org/10.33581/2520-6508-2022-1-14-20

Автор:
Александр Адамович Бондаренко – кандидат физико-математических наук, доцент; доцент кафедры высшей алгебры и защиты информации механико-математического факультета.

Author:
Alexandr A. Bondarenko, PhD (physics and mathematics), docent; associate professor at the department of higher algebra and information security, faculty of mechanics and mathematics.
bondarenko@bsu.by
https://orcid.org/0000-0002-9264-9397

THE BIRATIONAL COMPOSITION OF ARBITRARY QUADRATIC FORM WITH BINARY QUADRATIC FORM

A. A. BONDARENKO[a]

[a]*Belarusian State University, 4 Niezaliežnasci Avenue, Minsk 220030, Belarus*

Let $f(X)$ and $g(Y)$ be non-degenerate quadratic forms of dimensions m and n respectively over a field K, char$K \neq 2$. Herein, the problem of the birational composition of $f(X)$ and $g(Y)$ is considered, namely, the condition is established when the product $f(X)g(Y)$ is birationally equivalent over K to a quadratic form $h(Z)$ over K of dimension $m + n$? The main result of this paper is the complete solution of the problem of the birational composition for quadratic forms $f(X)$ and $g(Y)$ over a field K when $m = 2$. The sufficient and necessary conditions for the existence of birational composition $h(Z)$ for quadratic forms $f(X)$ and $g(Y)$ over a field K for $m = 2$ are obtained. The set of quadratic forms is described which can be considered as $h(Z)$ in this case.

Keywords: quadratic form; birational equivalence; birational composition.

Введение

Пусть K – поле характеристики, не равной двум, $X = (x_1, \ldots, x_m)$, $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ и $Z = (z_1, \ldots, z_{m+n})$ – независимые наборы переменных над K, $f(X)$ и $g(Y)$ – невырожденные квадратичные формы над K.

Определение. Если произведение $f(X)g(Y)$ бирационально эквивалентно над K квадратичной форме $h(Z)$ над K, т. е. $f(X)g(Y)$ представляется квадратичной формой $h(Z)$ над K и $x_i, y_i \in K(Z)$, то будем говорить, что квадратичные формы $f(X)$ и $g(Y)$ образуют бирациональную композицию $h(Z)$ над полем K.

Первые общие результаты по проблеме композиции восходят к А. Гурвицу, который изучил задачу о сумме квадратов: найти наименьшее t при заданных m и n, чтобы выполнялось тождество

$$\left(x_1^2 + \ldots + x_m^2\right)\left(y_1^2 + \ldots + y_n^2\right) = \Phi_1^2 + \ldots + \Phi_t^2,$$

где Φ_i – билинейные функции от $x_1, \ldots, x_m$ и $y_1, \ldots, y_n$ над K. Классические результаты А. Гурвица и И. Радона, связанные с этой задачей, хорошо известны (см. [1; 2]). Обзор [3] посвящен результатам и методам изучения такой композиции квадратичных форм. А. Пфистер продолжил рассматривать подобные тождества, но полагал, что Φ_i – рациональные функции от $x_1, \ldots, x_m$ и $y_1, \ldots, y_n$. Им описаны мультипликативные квадратичные формы [4].

Первые общие теоремы о бирациональной композиции над произвольным полем K получены в [5]. Естественно возникла задача изучения бирациональной композиции квадратичных форм над классами полей. Полное решение проблемы бирациональной композиции квадратичных форм над локальным полем дано в [6], над конечным полем – в [7], над полем функций – в [8]. Что касается проблемы бирациональной композиции над произвольным полем, то ее решение для тернарных квадратичных форм над произвольным полем K получено автором в [9], для бинарных квадратичных форм – в [6].

Основная цель настоящей статьи – решение проблемы бирациональной композиции квадратичных форм, одна из которых является бинарной, над произвольным полем K.

Полное решение проблемы бирациональной композиции, когда бинарная квадратичная форма $f(X)$ и произвольная квадратичная форма $g(Y)$ анизотропны над K, дает следующая теорема.

Теорема. *Пусть $f(X)$ и $g(Y)$ – анизотропные над K квадратичные формы размерностей* $m = 2$ и n. *Бирациональная композиция $h(Z)$ над K квадратичных форм $f(X) = ax_1^2 + bx_2^2 = a\left(x_1^2 + \alpha x_2^2\right)$, где $\alpha = \dfrac{b}{a}$, и $g(Y)$ существует тогда и только тогда, когда $g(Y)$ K-эквивалентна*

$$\begin{cases} \beta_1\left(y_1^2 + \alpha y_2^2\right) + \ldots + \beta_k\left(y_{n-1}^2 + \alpha y_n^2\right), \ n = 2k, \\ \beta_1\left(y_1^2 + \alpha y_2^2\right) + \ldots + \beta_{k-1}\left(y_{n-2}^2 + \alpha y_{n-1}^2\right) + \beta_k y_n^2, \ n = 2k - 1. \end{cases}$$

При этом с точностью до эквивалентности над K

$$h\left(z_1, \ldots, z_{n+2}\right) = a\left(\beta_1\left(z_1^2 + \alpha z_2^2\right) + \ldots + \beta_k\left(z_{2k-1}^2 + \alpha z_{2k}^2\right)\right).$$

Решение проблемы бирациональной композиции, когда бинарная форма $f(X)$ либо квадратичная форма $g(Y)$ изотропна над K, следует из теоремы 1 работы [5].

Предварительно в статье доказаны любопытные утверждения о бирациональной композиции квадратичных форм над произвольным полем. Основные понятия и обозначения традиционны (см. [10; 11]).

Вспомогательные результаты

Докажем утверждения о квадратичных формах над произвольным полем, которые будем использовать при доказательстве теоремы. Они представляют и самостоятельный интерес.

Предложение 1. *Пусть анизотропные квадратичные формы $f(X)$ и $g(Y)$ размерностей m и n над полем K образуют бирациональную композицию $h(Z)$, $m \le n$, $f(X)$ – пфистерова квадратичная форма, h_1 – невырожденная часть h. Тогда $h_1 \sim \beta_1 f + \ldots + \beta_k f$.*

Доказательство этого предложения приведено в статье [8].

В дальнейшем будет полезна следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $h = a_1\langle 1, \alpha\rangle + \ldots + a_k\langle 1, \alpha\rangle$ – невырожденная анизотропная квадратичная форма размерности $2k$. Любая подформа h размерности $2k - 1$ эквивалентна квадратичной форме*

$$\beta_1\langle 1, \alpha\rangle + \ldots + \beta_{k-1}\langle 1, \alpha\rangle + \langle \beta_k\rangle,$$

а любая подформа h размерности $2k - 2$ эквивалентна квадратичной форме $\gamma_1\langle 1, \alpha_1\rangle + \gamma_2\langle 1, \alpha\rangle + \ldots$ $\ldots + \gamma_{k-1}\langle 1, \alpha\rangle$, где α_1 может как совпадать, так и не совпадать с α.

Доказательство. Если g – подформа h размерности $2k - 1$, то $h \sim g + \langle a\rangle$. Следовательно, $a^{-1}h \sim$ $\sim a^{-1}g + \langle 1\rangle$, $1 \in D_K(a^{-1}h)$. Пфистерова форма $\langle 1, \alpha\rangle = x_1^2 + \alpha x_2^2 \in G_{K(x_1, x_2)}(a^{-1}h)$, так как

$$\left(x_1^2 + \alpha x_2^2\right)a^{-1}h = a^{-1}\left(a_1\left(x_1^2 + \alpha x_2^2\right)\langle 1, \alpha\rangle + \ldots + a_k\left(x_1^2 + \alpha x_2^2\right)\langle 1, \alpha\rangle\right) \sim$$
$$\sim a^{-1}\left(a_1\langle 1, \alpha\rangle + \ldots + a_k\langle 1, \alpha\rangle\right) = a^{-1}h,$$

поскольку $\left(x_1^2 + \alpha x_2^2\right)\langle 1, \alpha\rangle \sim \langle 1, \alpha\rangle$ над $K(x_1, x_2)$ по теореме 4.1 работы [11].

Группа подобий $G_{K(x_1, x_2)}(a^{-1}h) \subset D_{K(x_1, x_2)}(a^{-1}h)$, так как форма $a^{-1}h$ представляет единицу (см. замечание 3.2 публикации [11]), поэтому по теореме 2.1 работы [11]

$$a^{-1}h \sim \langle 1, \alpha\rangle + h_1. \tag{1}$$

Если h_1 – нулевая квадратичная форма, то $a^{-1}h \sim \langle 1, \alpha\rangle$. В противном случае работаем с h_1 как с h, а именно: пусть $s_2 \in D_K(h_1)$, тогда $s_2^{-1}h_1$ представляет единицу над K и $x_1^2 + \alpha x_2^2 \in G_{K(x_1, x_2)}(s_2^{-1}h_1)$. В силу (1) имеем

$$\left(x_1^2 + \alpha x_2^2\right)a^{-1}h \sim \left(x_1^2 + \alpha x_2^2\right)\langle 1, \alpha\rangle + \left(x_1^2 + \alpha x_2^2\right)h_1. \tag{2}$$

Однако, как показано выше, $\left(x_1^2 + \alpha x_2^2\right)a^{-1}h \sim a^{-1}h$ и $\left(x_1^2 + \alpha x_2^2\right)\langle 1, \alpha\rangle \sim \langle 1, \alpha\rangle$ над $K(x_1, x_2)$. Следовательно, по теореме 4 работы [10, гл. 4] в силу (1) и (2) получаем, что $\left(x_1^2 + \alpha x_2^2\right)h_1 \sim h_1$ над $K(x_1, x_2)$, а значит, $x_1^2 + \alpha x_2^2 \in G_{K(x_1, x_2)}(s_2^{-1}h_1)$ и $s_2^{-1}h_1 \sim \langle 1, \alpha\rangle + h_2$, т. е. $h_1 \sim s_2\langle 1, \alpha\rangle + s_2h_2$. Размерность квадратичных форм h_k все время уменьшается на два, и на некотором шаге h_{k+1} будет нулевой квадратичной формой. В итоге имеем

$$a^{-1}h \sim \langle 1, \alpha\rangle + s_2\langle 1, \alpha\rangle + \ldots + s_k\langle 1, \alpha\rangle,$$

т. е.

$$a^{-1}h \sim \langle 1\rangle + \langle \alpha\rangle + s_2\langle 1, \alpha\rangle + \ldots + s_k\langle 1, \alpha\rangle.$$

Но выше было установлено, что $a^{-1}h \sim a^{-1}g + \langle 1\rangle$. По теореме сокращения (см. [10, гл. 4]) $a^{-1}g \sim \langle \alpha\rangle +$ $+ s_2\langle 1, \alpha\rangle + \ldots + s_k\langle 1, \alpha\rangle$. Значит,

$$g \sim \beta_1\langle 1, \alpha\rangle + \ldots + \beta_{k-1}\langle 1, \alpha\rangle + \langle \beta_k\rangle.$$

Пусть теперь l – подформа h размерности $2k – 2$, тогда она подформа некоторой квадратичной формы g размерности $2k – 1$, которая является подформой h. Поэтому

$$g \sim l + \langle \beta \rangle, \tag{3}$$

где

$$D_K(g) \in \beta = \beta_k \alpha_{2k-1}^2 + \beta_1\left(\alpha_1^2 + \alpha\alpha_2^2\right) + \ldots + \beta_{k-1}\left(\alpha_{2k-3}^2 + \alpha\alpha_{2k-2}^2\right).$$

Пусть $g_1 = \beta_1\langle 1, \alpha\rangle + \ldots + \beta_{k-1}\langle 1, \alpha\rangle$. Тогда

$$s = \beta - \beta_k\alpha_{2k-1}^2 \in D_K(g_1) \cup \{0\}$$

и

$$x_1^2 + \alpha x_2^2 \in G_{K(x_1,\, x_2)}(g_1).$$

(Если $s = 0$, то $\beta = \beta_k\alpha_{2k-1}^2$ и $l \sim g_1$.)

Значит, как уже отмечено в начале доказательства леммы,

$$g_1 \sim s\langle 1, \alpha\rangle + s_2\langle 1, \alpha\rangle + \ldots + s_{k-1}\langle 1, \alpha\rangle.$$

Имеем

$$g \sim l + \langle \beta\rangle \sim \beta_1\langle 1, \alpha\rangle + \ldots + \beta_{k-1}\langle 1, \alpha\rangle + \langle \beta_k\rangle \sim \langle \beta_k\rangle + s\langle 1, \alpha\rangle + s_2\langle 1, \alpha\rangle + \ldots + s_{k-1}\langle 1, \alpha\rangle.$$

В последней эквивалентности квадратичную форму $g_1 = \beta_1\langle 1, \alpha\rangle + \ldots + \beta_{k-1}\langle 1, \alpha\rangle$ заменяем на эквивалентную ей квадратичную форму $s\langle 1, \alpha\rangle + s_2\langle 1, \alpha\rangle + \ldots + s_{k-1}\langle 1, \alpha\rangle$. Далее $\beta = \beta_k\alpha_{2k-1}^2 + s \in D_k\left(\langle \beta_k\rangle + s\langle 1, \alpha\rangle\right)$, а значит, $\langle \beta_k\rangle + s\langle 1, \alpha\rangle \sim \langle \beta\rangle + \gamma\langle 1, \alpha_1\rangle$, где α_1 может как совпадать, так и не совпадать с α. Следовательно, заменяя в g квадратичную форму $\langle \beta_k\rangle + s\langle 1, \alpha\rangle$ на эквивалентную ей квадратичную форму $\langle \beta\rangle + \gamma\langle 1, \alpha_1\rangle$, получаем

$$g \sim \langle \beta\rangle + \gamma\langle 1, \alpha_1\rangle + s_2\langle 1, \alpha\rangle + \ldots + s_{k-1}\langle 1, \alpha\rangle. \tag{4}$$

Тогда по теореме сокращения (см. [10, гл. 4]) из (3) и (4) следует, что

$$l \sim \gamma\langle 1, \alpha_1\rangle + s_2\langle 1, \alpha\rangle + \ldots + s_{k-1}\langle 1, \alpha\rangle.$$

Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы

1. Докажем *достаточность*. Пусть $f(X) = ax_1^2 + bx_2^2 = a\left(x_1^2 + \alpha x_2^2\right)$, где $\alpha = \dfrac{b}{a}$,

$$g(Y) = \begin{cases} \beta_1\left(y_1^2 + \alpha y_2^2\right) + \ldots + \beta_k\left(y_{n-1}^2 + \alpha y_n^2\right), \ n = 2k, \\ \beta_1\left(y_1^2 + \alpha y_2^2\right) + \ldots + \beta_{k-1}\left(y_{n-2}^2 + \alpha y_{n-1}^2\right) + \beta_k y_n^k, \ n = 2k - 1. \end{cases}$$

Тогда $f(X)g(Y) = h(Z)$, где $h(Z) = a\left[\beta_1\left(z_1^2 + \alpha z_2^2\right) + \ldots + \beta_k\left(z_{2k-1}^2 + \alpha z_{2k}^2\right)\right]$. Если $n = 2k$, то

$$\begin{cases} z_1 = x_1y_1 + \alpha x_2y_2, \\ z_2 = x_2y_1 - x_1y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_{n-1} = x_1y_{n-1} + \alpha x_2y_n, \\ z_n = x_2y_{n-1} - x_1y_n, \\ z_{n+1} = x_1, \\ z_{n+2} = x_2. \end{cases} \tag{5}$$

Если $n = 2k - 1$, то

$$\begin{cases} z_1 = x_1 y_1 + \alpha x_2 y_2, \\ z_2 = x_2 y_1 - x_1 y_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_{n-2} = x_1 y_{n-2} + \alpha x_2 y_{n-1}, \\ z_{n-1} = x_2 y_{n-2} - x_1 y_{n-1}, \\ z_n = x_1 y_n, \\ z_{n+1} = x_2 y_n, \\ z_{n+2} = y_n. \end{cases} \tag{6}$$

В силу (5) и (6) очевидно, что x_1, x_2 и $y_1, \dots, y_n$ выражаются рационально через $z_1, \dots, z_{n+2}$. Это и доказывает, что произведение $f(X)g(Y)$ бирационально эквивалентно над K квадратичной форме $h(Z)$. Значит, бирациональная композиция $f(X)$ и $g(Y)$ над K существует и с точностью до K-эквивалентности равна

$$h(Z) = a\left[\beta_1\left(z_1^2 + \alpha z_2^2\right) + \dots + \beta_k\left(z_{2k-1}^2 + \alpha z_{2k}^2\right)\right].$$

Докажем предложение, которое используется в доказательстве условия необходимости основной теоремы.

Предложение 2. *Пусть* $f(X) = x_1^2 + \alpha x_2^2$ *и* $g(Y)$ *– анизотропные квадратичные формы размерностей* 2 *и* $2k$ *над* K*, бирациональная композиция которых равна* $h(Z)$*. Тогда* $\operatorname{rang} h(Z) = 2k$.

Доказательство. Согласно определению бирациональной композиции квадратичных форм $\dim h(Z) = 2k + 2$. По лемме 1 статьи [5] $g(Y) \in D_{K(Y)}(h)$, так как $1 \in D_K(f)$. Значит,

$$2k = \operatorname{rang} g \le \operatorname{rang} h \le \dim h = 2k + 2$$

и, исходя из предложения 1, $\operatorname{rang} h$ – четное число. Следовательно, $\operatorname{rang} h = 2k$ либо $\operatorname{rang} h = 2k + 2$.

Предположим, $\operatorname{rang} h = 2k + 2$. Тогда согласно предложению 1

$$h_1 = h \sim s_1\langle 1, \alpha\rangle + \dots + s_{k+1}\langle 1, \alpha\rangle.$$

Как уже отмечалось, $g(Y) \in D_{K(Y)} h$ и $g(Y)$ – подформа $h(Z)$ размерности $2k$. Согласно лемме 1

$$g \sim \gamma_1\langle 1, \alpha_1\rangle + \dots + \gamma_k\langle 1, \alpha\rangle.$$

Можем считать, что

$$g \sim \langle 1, \alpha_1\rangle + \beta_2\langle 1, \alpha\rangle + \dots + \beta_k\langle 1, \alpha\rangle$$

(этого можно достичь, заменив g на $\gamma_1^{-1} g$).

Положив $y_2 = 0$ в g, получим квадратичную форму

$$g_1 \sim y_1^2 + \beta_2\left(y_3^2 + \alpha y_4^2\right) + \dots + \beta_k\left(y_{2k-1}^2 + a y_{2k}^2\right).$$

Согласно достаточному условию основной теоремы статьи, доказанному выше, бирациональная композиция $f(X)$ и $g_1(Y)$ равна

$$h_2 \sim \langle 1, \alpha\rangle + \beta_2\langle 1, \alpha\rangle + \dots + \beta_k\langle 1, \alpha\rangle,$$

$fg_1 \in D_{K(x_1, x_2, y_1, \dots, y_{2k})}(h)$ и, следовательно, h_2 – подформа h.

Обозначим через V_1, V_2 и V квадратичные пространства, соответствующие квадратичным формам g, h_2 и h.

Рассмотрим $V_1 \cap V_2$. Очевидно, что $\dim V_1 \cap V_2 = 2k$ либо $\dim V_1 \cap V_2 = 2k - 1$. Если $\dim V_1 \cap V_2 = 2k$, то $V_1 = V_2$ и квадратичные формы g и h_2 эквивалентны над K. Тогда согласно достаточному условию основной теоремы бирациональная композиция f и g эквивалентна $\langle 1, \alpha\rangle + \beta_2\langle 1, \alpha\rangle + \dots + \beta_k\langle 1, \alpha\rangle$, т. е. $\operatorname{rang} h = 2k$. Если $\dim V_1 \cap V_2 = 2k - 1$, $g = \langle 1, \alpha_1\rangle + \beta_2\langle 1, \alpha\rangle + \dots + \beta_k\langle 1, \alpha\rangle$ в базисе $e_1, u_2, e_3, \dots, e_{2k}$ пространства V_1 и $h_2 = \langle 1, \alpha\rangle + \beta_2\langle 1, \alpha\rangle + \dots + \beta_k\langle 1, \alpha\rangle$ в базисе $e_1, e_2, e_3, \dots, e_{2k}$ пространства V_2, то в базисе $u_2, e_1, e_2, \dots, e_{2k}$ пространства $V_1 + V_2$ квадратичная форма этого квадратичного пространства $h_3 = \langle a_1\rangle + \langle 1, \alpha\rangle + \beta_2\langle 1, \alpha\rangle + \dots + \beta_k\langle 1, \alpha\rangle$ анизотропна, так как $V_1 + V_2 \subset V$ и h_3 – подформа h.

Рассмотрим квадратичную форму

$$q(U) = \langle 1, \alpha\rangle + \alpha_1\langle 1, \alpha\rangle + \beta_2\langle 1, \alpha\rangle + \ldots + \beta_k\langle 1, \alpha\rangle$$

ранга $2k+2$. Тогда $f(X)g(Y)$ очевидно представляется этой формой. Достаточно положить

$$\begin{cases} u_1 = x_1y_1, \\ u_2 = x_2y_1, \\ u_3 = x_1y_2, \\ u_4 = x_2y_2, \\ u_5 = x_1y_3 + \alpha x_2y_4, \\ u_6 = x_1y_4 - x_2y_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{2k+1} = x_1y_{2k-1} + \alpha x_2y_{2k}, \\ u_{2k+2} = x_1y_{2k} - x_2y_{2k-1}. \end{cases} \tag{7}$$

Покажем, что квадратичная форма $q(U)$ анизотропна над K. Предположим обратное. Тогда $a_1 + \alpha_1a_2 + \beta_2a_3 + \ldots + \beta_ka_{k+1} = 0$, где $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1} \in D_K\langle 1, \alpha\rangle \cup \{0\}$, причем $a_2 \neq 0$, так как в противном случае h_2 изотропна. Поскольку $D_K\langle 1, \alpha\rangle$ – подгруппа K^* (см. теорему 4.1 работы [11]), то $-\alpha_1 = a_1a_2^{-1} + \beta_2a_3a_2^{-1} + \ldots + \beta_ka_{k+1}a_2^{-1}$ представляется квадратичной формой $\langle 1, \alpha\rangle + \beta_2\langle 1, \alpha\rangle + \ldots + \beta_k\langle 1, \alpha\rangle$. Отсюда следует, что квадратичная форма h_3 изотропна, но это не так. Данное противоречие и доказывает анизотропность над K квадратичной формы $q(U)$.

Получили, что $h(Z)$ – бирациональная композиция $f(X)$ и $g(Y)$ над K и $f(X)g(Y) \in D_{K(X,Y)}q$. Поэтому согласно предложению 2 статьи [8] $h_1(Z) = h(Z)$ – подформа $q(U)$. Так как $h(Z)$ и $q(U)$ – анизотропные квадратичные формы размерности $2k+2$, то по теореме 2.1 работы [11] $h(Z) \sim q(U)$ над K.

Переменные $u_1, \ldots, u_{2k+2}$ алгебраически зависимы, поскольку $u_1u_4 = u_2u_3$. Из эквивалентности $h(Z)$ и $q(U)$ следует, что набор переменных $z_1, z_2, \ldots, z_{2k+2}$ алгебраически зависим над K. Но по определению $Z = (z_1, \ldots, z_{2k+2})$ – алгебраически независимый набор переменных. Противоречие мы получили, предположив, что $h(Z)$ имеет ранг $2k+2$. Это и завершает доказательство предложения 2.

2. Докажем *необходимость*. Пусть бирациональная композиция $f(X)g(Y)$ над K равна $h(Z)$. Согласно предложению 1 $h_1 \sim \gamma_1 f + \ldots + \gamma_s f$, где $f = \langle 1, \alpha\rangle$, h_1 – невырожденная часть h. Теперь надо определить $g(Y)$ в этом случае.

Если $n = \dim g = 2k-1$ – нечетное, то

$$\operatorname{rang} h = \dim h_1 = 2s \leq \dim h = \dim f + \dim g = 2k+1,$$

так как h_1 – подформа h. По лемме 1 статьи [5] ag – подформа h_1, где $a \in D_k(f)$, а значит, $\dim h_1 \geq \dim g = 2k-1$. Имеем

$$2k-1 = \dim g \leq \dim h_1 \leq \dim h = 2k+1,$$

$\dim h_1$ – четное число. Следовательно, $\dim h_1 = 2k$. Согласно лемме 1

$$ag \sim \gamma_1\left(y_1^2 + \alpha y_2^2\right) + \ldots + \gamma_{k-1}\left(y_{n-1}^2 + \alpha y_n^2\right) + \gamma_k y_n^k,$$

значит,

$$g \sim \beta_1\left(y_1^2 + \alpha y_2^2\right) + \ldots + \beta_{k-1}\left(y_{n-1}^2 + \alpha y_n^2\right) + \beta_k y_n^k,$$

где $\beta_i = \dfrac{\gamma_i}{a}$.

Теперь определим вид g, если $n = \dim g = 2k$. В этом случае согласно предложению 2 $\operatorname{rang} h = \dim h_1 = 2k$, а согласно лемме 1 статьи [5] ag – подформа h_1, следовательно, $h_1 \sim ag$. Значит, $g \sim \beta_1\left(y_1^2 + \alpha y_2^2\right) + \ldots + \beta_k\left(y_{n-1}^2 + \alpha y_n^2\right)$, если $h = (z_1, \ldots, z_{n+2}) = a\left[\beta_1\left(z_1^2 + \alpha z_2^2\right) + \ldots + \beta_k\left(z_{n-1}^2 + \alpha z_n^2\right)\right]$. Теорема полностью доказана.

Библиографические ссылки

1. Hurwitz A. Über die Komposition der quadratischen Formen. *Mathematische Annalen.* 1922;88(1–2):1–25. DOI: 10.1007/BF01448439.

2. Radon J. Lineare Scharen orthogonaler Matrizen. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg.* 1922;1(1):1–14. DOI: 10.1007/BF02940576.

3. Lam KY. Topological methods for studying the composition of quadratic forms. In: Riehm CR, Hambleton I, editors. *Quadratic and Hermitian forms* [*Conference on quadratic forms and Hermitian K-theory, held at McMaster University; 1983 July 11–22; Hamilton, Ontario, Canada*]. Providence: American Mathematical Society; 1984. p. 173–192 (CMS conference proceedings; volume 4).

4. Pfister A. Multiplikative quadratische Formen. *Archiv der Mathematic.* 1965;16(1):363–370. DOI: 10.1007/BF01220043.

5. Бондаренко АА. О бирациональной композиции квадратичных форм. *Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук.* 2007;4:56–61.

6. Бондаренко АА. Бирациональная композиция квадратичных форм над локальным полем. *Математические заметки.* 2009;85(5):661–670. DOI: 10.4213/mzm4673.

7. Бондаренко АА. Бирациональная композиция квадратичных форм над конечным полем. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика.* 2010;3:90–93.

8. Бондаренко АА. Бирациональная композиция квадратичных форм над полем функций. *Известия Национальной академии наук Беларуси. Серия физико-математических наук.* 2014;3:28–32.

9. Бондаренко АА. Бирациональная композиция тернарных квадратичных форм. *Вестник БГУ. Серия 1. Физика. Математика. Информатика.* 2012;2:106–110.

10. Серр Ж-П. *Курс арифметики.* Скопин АИ, переводчик; Малышев АВ, редактор. Москва: Мир; 1972. 184 с.

11. Knebusch M, Scharlau W. *Algebraic theory of quadratic forms. Generic methods and Pfister forms.* Boston: Birkhäuser; 1980. 44 p. (DMV seminar; 1).

References

1. Hurwitz A. Über die Komposition der quadratischen Formen. *Mathematische Annalen.* 1922;88(1–2):1–25. DOI: 10.1007/BF01448439.

2. Radon J. Lineare Scharen orthogonaler Matrizen. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg.* 1922;1(1):1–14. DOI: 10.1007/BF02940576.

3. Lam KY. Topological methods for studying the composition of quadratic forms. In: Riehm CR, Hambleton I, editors. *Quadratic and Hermitian forms* [*Conference on quadratic forms and Hermitian K-theory, held at McMaster University; 1983 July 11–22; Hamilton, Ontario, Canada*]. Providence: American Mathematical Society; 1984. p. 173–192 (CMS conference proceedings; volume 4).

4. Pfister A. Multiplikative quadratische Formen. *Archiv der Mathematic.* 1965;16(1):363–370. DOI: 10.1007/BF01220043.

5. Bondarenko AA. [On the birational composition of quadratic forms]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series.* 2007;4:56–61. Russian.

6. Bondarenko AA. [Birational composition of quadratic forms over a local field]. *Matematicheskie zametki.* 2009;85(5):661–670. DOI: 10.4213/mzm4673. Russian.

7. Bondarenko AA. [The birational composition of quadratic forms over a finite field]. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika.* 2010;3:90–93. Russian.

8. Bondarenko AA. [The birational composition of quadratic forms over a function field]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series.* 2014;3:28–32. Russian.

9. Bondarenko AA. [The birational composition of ternary quadratic forms]. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika.* 2012;2:106–110. Russian.

10. Serre J-P. *Cours d'arithmétique.* Paris: Presses Universitaires de France; 1970. 188 p.

Russian edition: Serre J-P. *Kurs arifmetiki.* Skopin AI, translator; Malyshev AV, editor. Moscow: Mir; 1972. 184 p.

11. Knebusch M, Scharlau W. *Algebraic theory of quadratic forms. Generic methods and Pfister forms.* Boston: Birkhäuser; 1980. 44 p. (DMV seminar; 1).

Получена 26.03.2021 / исправлена 15.01.2022 / принята 15.02.2022.
Received 26.03.2021 / revised 15.01.2022 / accepted 15.02.2022.