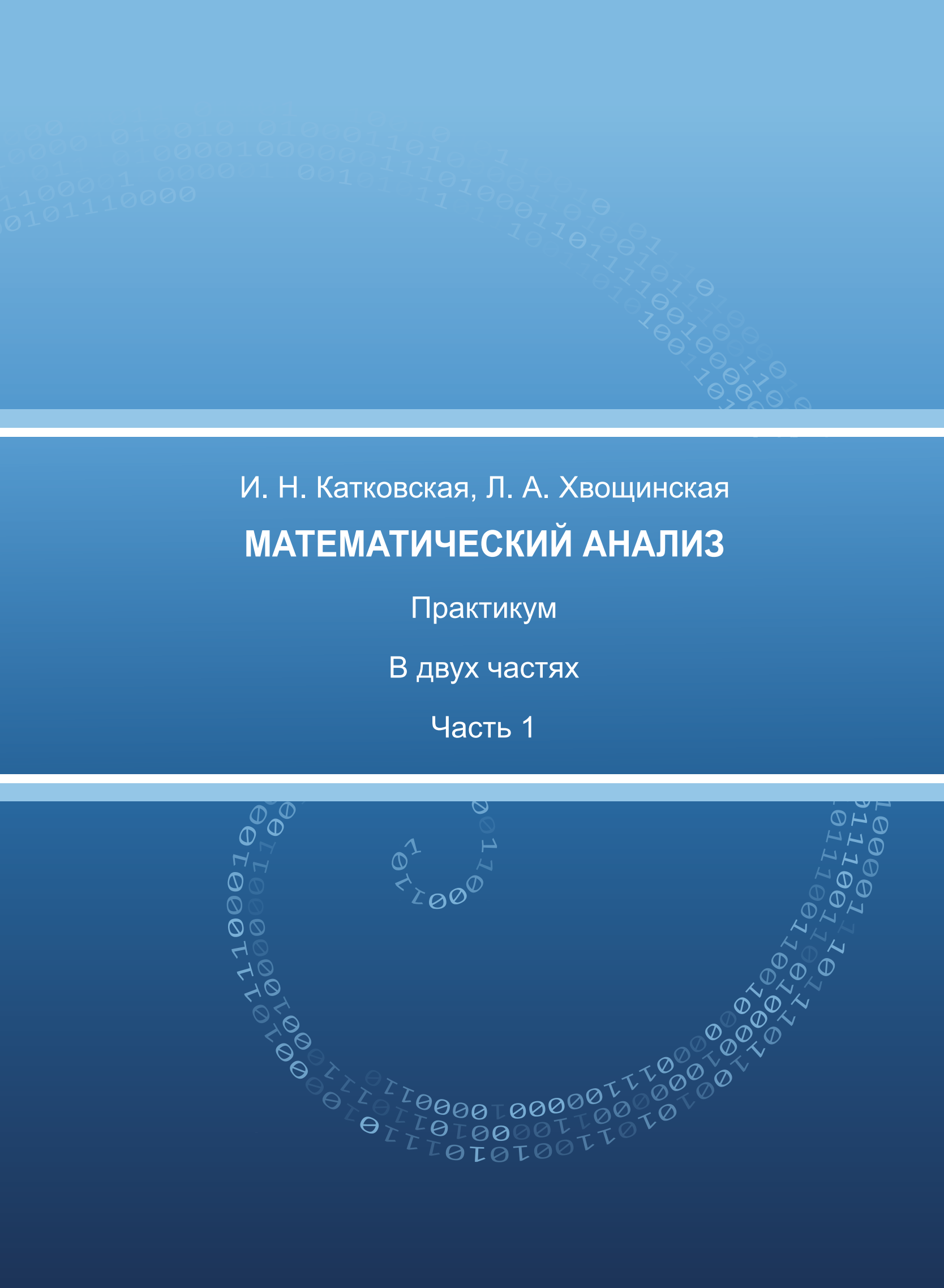




И. Н. Катковская, Л. А. Хвощинская

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Практикум

В двух частях

Часть 1



Учреждение образования  
«Международный государственный  
экологический институт имени А. Д. Сахарова»  
Белорусского государственного университета  
Кафедра общей и медицинской физики

---

**И. Н. Катковская, Л. А. Хвощинская**

# **МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ**

## **В двух частях**

Рекомендовано учебно-методическими объединениями  
по естественно-научному и экологическому образованию в качестве  
практикума для студентов, обучающихся по специальностям  
1-31 04 05 Медицинская физика  
и 1-100 01 01 Ядерная и радиационная безопасность.

## **Часть 1**

Минск  
ИВЦ Минфина  
2022

УДК 517(075.8)  
ББК 22.161я73  
К29

**Рецензенты:**

кафедра математики и методики преподавания математики Белорусского государственного педагогического университета им. Максима Танка (заведующий кафедрой кандидат физико-математических наук, доцент *И. Н. Гуло*);  
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Белорусского государственного университета информатики и электроники *О. В. Рыкова*

**Катковская, И. Н.**

К29 Математический анализ : практикум. В 2 ч. Ч. 1 / И. Н. Катковская, Л. А. Хвоцинская. – Минск : ИВЦ Минфина, 2022. – 96 с.  
ISBN 978-985-880-210-3.

Издание включает 25 тематических заданий для аудиторной и самостоятельной работы, а также индивидуальные задания по темам: «Дифференциальное исчисление функций одной переменной» и «Интегральное исчисление функций одной переменной». Предлагаются решения типовых вариантов по темам индивидуальных заданий. Пособие соответствует действующей программе по дисциплине «Математический анализ» для студентов, обучающихся по специальностям: 1-100 01 01 Ядерная и радиационная безопасность, 1-31 04 05 Медицинская физика.

Предназначается студентам факультета мониторинга окружающей среды при изучении учебной дисциплины «Математический анализ». Пособие может быть использовано преподавателями для организации аудиторной работы, текущего контроля знаний, а также при дистанционном обучении.

УДК 517(075.8)  
ББК 22.161я73

**ISBN 978-985-880-210-3**

© Катковская И. Н., Хвоцинская Л. А., 2022  
© МГЭИ им. А. Д. Сахарова БГУ, 2022

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                                                                          |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Введение .....                                                                                                                           | 5  |
| Тема 1. Декартова и полярная система координат.<br>Построение графиков функций .....                                                     | 6  |
| Тема 2. Комплексные числа и действия над ними.....                                                                                       | 7  |
| Тема 3. Введение в анализ. Функция. Основные понятия и свойства.<br>Графики .....                                                        | 8  |
| Тема 4. Предел числовой последовательности. Число $e$ .....                                                                              | 10 |
| Тема 5. Предел функции .....                                                                                                             | 10 |
| Тема 6. Первый и второй замечательные пределы .....                                                                                      | 11 |
| Тема 7. Сравнение бесконечно малых функций. Непрерывность функций.<br>Точки разрыва .....                                                | 13 |
| Тема 8. Производная функции. Геометрический и физический смысл<br>производной .....                                                      | 15 |
| Тема 9. Производная сложной, неявной и параметрической функций.....                                                                      | 17 |
| Тема 10. Логарифмическая производная. Дифференциал функции .....                                                                         | 19 |
| Тема 11. Производные и дифференциалы высших порядков .....                                                                               | 20 |
| Тема 12. Правила Лопиталья – Бернулли .....                                                                                              | 21 |
| Тема 13. Формула Тейлора .....                                                                                                           | 23 |
| Тема 14. Монотонность функций. Экстремум.<br>Наибольшее и наименьшее значения функций.<br>Выпуклость и вогнутость графиков функций ..... | 24 |
| Тема 15. Асимптоты. Построение графиков функций .....                                                                                    | 26 |
| Тема 16. Неопределенный интеграл. Метод непосредственного<br>интегрирования .....                                                        | 27 |
| Тема 17. Интегрирование с помощью замены переменной. Метод<br>подстановки.....                                                           | 29 |
| Тема 18. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле.....                                                                        | 30 |
| Тема 19. Интегрирование выражений, содержащих квадратный<br>трехчлен в знаменателе .....                                                 | 31 |

|                                                              |    |
|--------------------------------------------------------------|----|
| Тема 20. Интегрирование рациональных функций.....            | 32 |
| Тема 21. Интегрирование тригонометрических функций.....      | 33 |
| Тема 22. Интегрирование иррациональных функций .....         | 34 |
| Тема 23. Вычисление определенных интегралов.....             | 35 |
| Тема 24. Приложения определенных интегралов.....             | 36 |
| Тема 25. Несобственные интегралы.....                        | 38 |
| Образец решения типового варианта по теме:                   |    |
| «Дифференциальное исчисление функций одной переменной» ..... | 40 |
| Индивидуальные задания по теме:                              |    |
| «Дифференциальное исчисление функций одной переменной» ..... | 51 |
| Образец решения типового варианта по теме:                   |    |
| «Интегральное исчисление функций одной переменной».....      | 77 |
| Индивидуальные задания по теме:                              |    |
| «Интегральное исчисление функций одной переменной».....      | 84 |
| Рекомендуемая литература .....                               | 95 |

## Введение

В первой части учебного пособия, которое предполагается издать в двух частях, содержится материал для практических занятий по учебной дисциплине «Математический анализ» в соответствии с учебной программой для специальностей 1-100 01 01 Ядерная и радиационная безопасность, 1-31 04 05 Медицинская физика.

Структура пособия состоит из строго обозначенных направлений:

- набора заданий для аудиторной и самостоятельной работы по 25 темам;

- индивидуальных заданий по темам «Дифференциальное исчисление функций одной переменной», «Интегральное исчисление функций одной переменной» (25 вариантов по каждой теме);

- разбора типовых вариантов для выполнения индивидуальных заданий по темам.

Следует отметить, что в издании подобраны многообразные примеры, позволяющие студентам, усвоить учебную дисциплину «Математический анализ». Практические задания будут способствовать пониманию и усвоению материала, а выполнение индивидуальных заданий – закреплению полученных знаний.

Используя данное пособие, преподаватель сможет методически грамотно проводить аудиторную работу с обучающимися, осуществлять контроль за их самостоятельной работой, а также проводить проверку усвоения учебного материала.

Пособие даст возможность организовать и проводить занятия в режиме онлайн, использовать его для разных форм получения образования, а также промежуточного контроля полученных знаний.

Издание может быть рекомендовано для организации учебного процесса в учреждениях высшего образования для студентов, обучающихся по естественно-научным дисциплинам и изучающим курс «Математический анализ».

# Тема 1. Декартова и полярная система координат.

## Построение графиков функций

### Аудиторные задания

1.1. Построить графики функций:

$$\begin{aligned} 1) y &= 2^{\log_2 \cos x}; & 2) y &= \frac{x^3 - x^2}{2|x-1|}; & 3) y &= \begin{cases} 2^{x-1}, & 0 < x \leq 2, \\ -x^2 - 2x, & -3 < x \leq 0. \end{cases}; \\ 4) y &= 2x - |x-2| + 1; & 5) y &= \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}; & 6) y &= \sin|x| - 1; \\ 7) y &= \log_{1/2} x^2 + 1; & 8) y &= \frac{1}{|x|+1}. \end{aligned}$$

1.2. Построить графики функций, заданных параметрически:

$$\begin{aligned} 1) x &= -1 + 2t, y = 2 - t; & 2) x &= 2, y = t^2 - 4; & 3) x &= 2\cos t, y = \sin t; \\ 4) x &= 1 - t^2, y = t - t^3; & 5) x &= at^2, y = bt^3; & 6) x &= 2\cos^3 t, y = 2\sin^3 t; \\ 7) x &= -1 + 2\cos t, y = 3 + 2\sin t; & 8) x &= 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t). \end{aligned}$$

1.3. Записать уравнения кривых в полярных координатах:

$$\begin{aligned} 1) y &= x; & 2) y &= 1; & 3) x^2 + y^2 &= 4; & 4) x^2 + y^2 &= 2y; \\ 5) x + y - 1 &= 0; & 6) x^2 - y^2 &= a^2. \end{aligned}$$

1.4. Построить графики функций, заданных уравнением в полярной системе координат:

$$\begin{aligned} 1) r &= 1; & 2) r &= 2\varphi; & 3) r \cos \varphi &= 2; & 4) r &= e^\varphi; & 5) r &= 4\cos \varphi; \\ 6) r &= 3\sin 2\varphi; & 7) r &= 2(1 + \cos \varphi); & 8) r &= \frac{6}{3 + 2\cos \varphi}; \\ 9) r &= \frac{2}{1 + \sin \varphi}; & 10) r &= 2\cos 3\varphi; & 11) r^2 &= 36\sin 2\varphi. \end{aligned}$$

### Домашние задания

1.5. Построить следующие кривые:

$$\begin{aligned} 1) y &= |x^2 - x - 2|; & 2) y &= x + |x + 3|; & 3) x &= t^2 + 1, y = t; \\ 4) x &= t^3, y = t^2; & 5) r &= 2\sin \varphi; & 6) r &= 3(1 - \sin \varphi); & 7) r &= 4\cos 2\varphi; \\ 8) r &= \frac{3}{1 - \cos \varphi}. \end{aligned}$$

## Тема 2. Комплексные числа и действия над ними

### Аудиторные задания

**2.1.** Найти  $z_1 + z_2$ ;  $z_1 - z_2$ ;  $\overline{z_1}$ ;  $\overline{z_2}$ ;  $z_1 z_2$ ;  $\frac{z_1}{z_2}$ ;  $z_1^{-1}$ ;  $z_2^2$ , если:

1)  $z_1 = 3 + 7i$ ,  $z_2 = 3 + 2i$ ;                      2)  $z_1 = 1 - 6i$ ,  $z_2 = 5 + 4i$ .

**2.2.** Возвести в указанную степень данные комплексные числа:

1)  $(1+i)^2$ ;                      2)  $(1-2i)^3$ ;                      3)  $(1+i)^5$ ;                      4)  $(1-i)^6$ .

**2.3.** Найти действительную и мнимую части каждого комплексного числа:

1)  $(1-i)^2$ ;                      2)  $(3-4i)^2$ ;                      3)  $(3+2i)^3$ .

**2.4.** Выполнить действия:

1)  $(2+3i)(4-i) + 5 + 4i$ ;                      2)  $(2+5i)^2 + (3-i)^2 + \frac{3+4i}{2-3i}$ ;

3)  $\frac{1-3i}{1+2i} + 4i - 1$ ;                      4)  $\frac{(8-i)^2}{3+5i} + 3i - 4$ .

**2.5.** Представить следующие комплексные числа в тригонометрической форме записи:

1)  $1+i$ ;    2)  $-i$ ;    3)  $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ;    4)  $5-4i$ .

**2.6.** Выполнить указанные действия:

1)  $(1-i)^5$ ;    2)  $(2+2i)^4$ ;    3)  $(-i)^{10}$ ;    4)  $\sqrt[3]{3+3i}$ ;    5)  $\sqrt{i}$ ;

6)  $\sqrt[3]{1+\sqrt{3}i}$ ;    7)  $\sqrt[3]{-8}$ ;    8)  $\sqrt[6]{-64}$ ;    9)  $\sqrt[4]{1}$ .

**2.7.** Найти значения корня указанной степени из данных комплексных чисел:

1)  $\sqrt[3]{8\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}$ ;    2)  $\sqrt[3]{-2+2i}$ ;    3)  $\sqrt[3]{i}$ ;    4)  $\sqrt[4]{-1}$

### Домашние задания

**2.8.** Найти  $z_1 + z_2$ ;  $z_1 - z_2$ ;  $\overline{z_1}$ ;  $\overline{z_2}$ ;  $z_1 z_2$ ;  $\frac{z_1}{z_2}$ ;  $z_1^{-1}$ ;  $z_2^2$  если

$$z_1 = 1 + 2i, z_2 = 2 - i.$$

**2.9.** Найти действительную и мнимую части каждого комплексного числа:

1)  $\frac{4+2i}{1+3i}$ ;                      2)  $(2+4i)^3$ .

**2.10.** Вычислить:

1)  $\frac{(1+i)^5}{1+3i}$ ;                      2)  $\frac{(1+i)^7}{(1-i)^5}$ .

**2.11.** Записать следующие числа в тригонометрической форме:

1) 3;                      2) -5;                      3) -5+5i.

**2.12.** Возвести в указанную степень каждое из данных комплексных чисел:

1)  $\left(4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right)^3$ ;                      2)  $\left(\sqrt{5}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^4$ ;

3)  $\left(2\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)\right)^{-3}$ .

### **Тема 3. Введение в анализ.**

#### **Функция. Основные понятия и свойства. Графики**

##### **Аудиторные задания**

**3.1.** Найти области определения функций:

1)  $y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$ ; 2)  $y = \arccos \frac{2x}{1+x}$ ; 3)  $y = \sqrt{25 - x^2} + \lg \sin x$ ;

4)  $y = \arcsin(x-1) + \frac{1}{\sqrt[4]{x^2-4}}$ .

**3.2.** Проверить функции на четность или нечетность:

1)  $f(x) = x^4 + 5x^2$ ; 2)  $f(x) = x^2 + x$ ;    3)  $f(x) = \frac{x}{2^x - 1}$ ;

4)  $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ .

**3.3.** Построить графики функций:

1)  $y = \frac{2x+3}{x-1}$ ; 2)  $y = |3x+4-x^2|$ ; 3)  $y = -2\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ ;

4)  $y = 3^{-|x|}$ ; 5)  $y = \sqrt{4-x^2}$ .

**3.4.** Для функции  $f(x) = \sqrt{1+x^2}$  найти  $f(0)$ ,  $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ ,  $f(-x)$ ,  $f\left(\frac{1}{x}\right)$ .

**3.5.** Для функции  $f(x) = \arccos(\lg x)$  найти  $f(1)$ ,  $f(10)$ ,  $f\left(\frac{1}{10}\right)$ .

**3.6.** Определить области значений функций:

1)  $y = \sqrt{x+1}$ ; 2)  $y = \sqrt[3]{x+1}$ ; 3)  $y = \sqrt{x-x^2}$ ; 4)  $y = \sqrt{x^2-2}$ ;

5)  $y = \sqrt{2+x-x^2}$ ; 6)  $y = \frac{1}{4-x^2}$ .

### Домашние задания

**3.7.** Найти области определения функций:

1)  $y = \sqrt{x^2-2x-3}$ ; 2)  $y = \arccos(x^2-1)$ ; 3)  $y = \sqrt{16-x^2} + \lg x$ ;

4)  $y = \lg(3^x-9)$ ; 5)  $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+x}}$ ; 6)  $y = \lg \frac{x^2-3x+2}{x+1}$ .

**3.8.** Для функции  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 8x - 5$  найти  $f(-1)$ ,  $f(0)$ ,  $f(1)$ ,  $f(2)$ ,  $f(3)$ ,  $f(4)$ .

**3.9.** Проверить функции на четность или нечетность:

1)  $f(x) = \lg \frac{1+x}{1-x}$ ; 2)  $f(x) = \frac{1}{2}(3^x + 3^{-x})$ ;

3)  $f(x) = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$ .

**3.10.** Найти области значений функций:

1)  $y = \sqrt{x-2}$ ; 2)  $x = \sqrt{y^2-1}$ ; 3)  $f(x) = \frac{1}{x-2}$ ; 4)  $y = \sqrt[3]{x-1}$ .

**3.11.** Построить графики функций:

1)  $y = \left| \frac{x-1}{x+2} \right|$ ; 2)  $y = |\lg(x+1)|$ ; 3)  $y = \sin^2 2x$ ; 4)  $y = 2^{-x}$ ;

5)  $y = 2 + (x-1)^2$ ; 6)  $y = \sqrt{x}$ ; 7)  $y = \lg x^3$ ; 8)  $y = x \cdot |x|$ .

## Тема 4. Предел числовой последовательности. Число $e$

### Аудиторные задания

4.1. Найти пределы последовательностей:

- 1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + 3n - 5}{1 - 2n^2}$ ; 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + n + 2}}{n + 1}$ ; 3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4 + 4n^2 + 2}{7n^3 + 8n + 1}$ ;  
4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 + 3n + 1}}{2n^2 + 7n + 2}$ ; 5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 + 5n^2 + 3}{3n^4 + 2}$ ; 6)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 + (n-1)^2}$ ;  
7)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)! - n!}$ ; 8)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n-1}{5n+7} - \frac{1+2n^3}{2+5n^3} \right)$ .

4.2. Найти пределы:

- 1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+2}{n-1} \right)^n$ ; 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n+1}{3n-2} \right)^{n+1}$ ; 3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 - 2n - 1} - \sqrt{n^2 - 7n + 3}$ ;  
4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$ ; 5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(1+2+3+\dots+n)}$ .

### Домашние задания

4.3. Найти пределы последовательностей:

- 1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^3 + 3n^2 + 1}{7n^5 + n^3 + 3}$ ; 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!}$ ; 3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^5 + 3n^2 + 2}}{n^2 + 4}$ ;  
4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 3}{5^{n+1} + 2}$ ; 5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n$ ; 6)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n-1}{2n+1} \right)^{n-4}$ ;  
7)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ .

## Тема 5. Предел функции

### Аудиторные задания

5.1. Найти пределы функций:

- 1)  $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + 2x - 3)$ ; 2)  $\lim_{x \rightarrow -3} (x+3)^2 (x-1)$ ; 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 3x - x^2}{2x^2 + x - 3}$ ;  
4)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+1}{2-x}$ ; 5)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x+1}$ ; 6)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{3x^2 + x - 5}$ ;

- 7)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x}{5 - 3x^2 + 4x^4}$ ; 8)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - 3x^2 + x^3}{2x + 1}$ ; 9)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{4 - x^2}$ ;  
 10)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 27}{81 - x^4}$ ; 11)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{x^2 + x - 20}$ ; 12)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 6x + 5}$ ;  
 13)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + 5x - 9}{2x^2 + 3x - 5}$ ; 14)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - 3}{x - 1}$ ; 15)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{3x+4} - 4}{\sqrt{x} - 2}$ ;  
 16)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{1 - \sqrt{3-x}}$ ; 17)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x})$ ; 18)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{3/2} (\sqrt{x^3+1} - \sqrt{x^3-1})$ ;  
 19)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{\sqrt{16+x^2} - 4}$ ; 20)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$ ; 21)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x}$ ;  
 22)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 7x + 6}$ ; 23)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x^2-1}}$ ; 24)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$ .

### Домашние задания

5.2. Найти пределы функций:

- 1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + 4x^2 + 3x^3}{x^3 - 7x - 10}$ ; 2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 10x + 20}{x^3 - 10x^2 - 1}$ ; 3)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 10x - 8}{16 - x^2}$ ;  
 4)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 4x + 3}$ ; 5)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{\sqrt{x^2 + 9} - 2}$ ; 6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{\sqrt{x^2 + 9} - 3}$ ;  
 7)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-x} - 1}{x}$ ; 8)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( x \left( \sqrt{x^2 + 5} - \sqrt{x^2 + 1} \right) \right)$ ;  
 9)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{2-x} - \frac{3}{8-x^2} \right)$ ; 10)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{\sqrt{7-3x} - 4}$ ; 11)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( x - \frac{x^3}{x^2 + 3x - 2} \right)$ ;  
 12)  $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{3x+17} - \sqrt{2x+12}}{x^2 + 8x + 15}$ .

## Тема 6. Первый и второй замечательные пределы

### Аудиторные задания

6.1. Используя первый замечательный предел, найти:

- 1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$ ; 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 3x}$ ; 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 7x}{\sin 2x}$ ; 4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ ;

$$\begin{aligned}
& 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{x \sin 3x}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\operatorname{tg}^2 5x \cdot \cos 2x}; \quad 7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}; \\
& 8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}; \quad 9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x+4} - 2}; \quad 10) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 7x + 6}{\sin(2(x-1))}; \\
& 11) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{x^2 - 4x - 5}; \quad 12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 + \sin 3x} - \sqrt{2 - \sin 3x}}{5 \operatorname{tg} 2x}; \\
& 13) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x}; \quad 14) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} - 2 \cos x}{\pi - 4x}; \quad 15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos^3 2x}{4x \operatorname{tg} 3x}; \\
& 16) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \cdot \sin \frac{1}{x}; \quad 17) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \operatorname{ctg} x \right); \quad 18) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x.
\end{aligned}$$

**6.2.** Используя второй замечательный предел, найти:

$$\begin{aligned}
& 1) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{1/x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{2x-1} \right)^{2x-3}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-6}{x+5} \right)^{x+2}; \\
& 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-1}{2x+3} \right)^x; \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 7x)^{1/x}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{7x+3}{9x+3} \right)^{1/x}; \quad 7) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+1}{6x-3} \right)^x; \\
& 8) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{6-x}{7-x} \right)^{\frac{1-x^3}{x^2}}; \quad 9) \lim_{x \rightarrow \infty} ((2x+1)(\ln(3x+1) - \ln(3x-2))); \\
& 10) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{1+x} \right)^x; \quad 11) \lim_{x \rightarrow \infty} ((x-4)(\ln(2-3x) - \ln(5-3x))); \\
& 12) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\operatorname{cosec} x}; \quad 13) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 2} \right)^x; \quad 14) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}; \\
& 15) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 4x)^{(1-x)/x}; \quad 16) \lim_{x \rightarrow 1} (2x-1)^{2x/(x-1)}.
\end{aligned}$$

**6.3.** Найти пределы:

$$\begin{aligned}
& 1) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x})^{1/2x}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x + x^2)^{1/\sin x}; \\
& 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-2}{x+1} \right)^{2x-3}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{2x^2}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin 2x}{3x^2}.
\end{aligned}$$

## Домашние задания

### 6.4. Найти пределы:

- 1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{2 \operatorname{arctg} 3x}$ ; 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{3 \sin x \operatorname{tg} 3x}$ ; 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{1 - \sqrt{1 - x^2}}$ ;  
4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 4x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2x} - \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 2x}}$ ; 5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x^2 \sin x}$ ; 6)  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 7x + 3}{\operatorname{tg}(2x - 1)}$ ;  
7)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1 - 2 \cos x}$ ; 8)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{2 + x}\right)^{3x}$ ; 9)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - 3x}{1 - 2x}\right)^{\frac{1}{x}}$ ;  
10)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x(\ln(2 + x) - \ln x)\right)$ ; 11)  $\lim_{x \rightarrow 1} (4 - 3x)^{\frac{5x^2}{1-x}}$ ; 12)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$ ;  
13)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos^2 2x}{x^2}$ ; 14)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin 2x} - \frac{1}{\operatorname{tg} 2x}\right)$ .

## Тема 7. Сравнение бесконечно малых функций. Непрерывность функций. Точки разрыва

### Аудиторные задания

7.1. Вычислить пределы, используя теорему об отношении двух бесконечно малых функций:

- 1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x}$ ; 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - x)}{2 \operatorname{tg} 3x}$ ; 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}}{\ln(1 - x)}$ ;  
4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{\sin 10x}$ ; 5)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin 3(x - 2)}{x^2 - 3x + 2}$ ; 6)  $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\operatorname{tg}(x + 5)}{x^2 - 25}$ ; 7)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4 4x}{\operatorname{arctg}^3 2x}$ ;  
8)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1 + \sqrt{7x})}{1 - e^{x/3}}$ ; 9)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{3 \arcsin 2x}$ ; 10)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 5x}{2x}$ ;  
11)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \operatorname{arctg} 5x}{\cos x - \cos 4x}$ ; 12)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x}$ ; 13)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$ ;  
14)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{3^x - 1}$ ; 15)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha^{2x} - 1}{x}$ .

**7.2.** Исследовать функции на непрерывность, установить характер точек разрыва:

$$1) f(x) = \frac{x}{x-1}; \quad 2) f(x) = \frac{\sin(x-2)}{x-2}; \quad 3) f(x) = 3^{\frac{x}{4-x^2}};$$

$$4) f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}; \quad 5) f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-3}; \quad 6) f(x) = \frac{|x+1|}{x+1};$$

$$7) f(x) = \begin{cases} 2^x, & -\infty < x \leq 1, \\ x^2 + 1, & x > 1. \end{cases}; \quad 8) f(x) = \begin{cases} \sin x, & -\infty < x \leq 1 \\ x^2 - 3, & 1 < x < 2, \\ x - 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$9) f(x) = \frac{5^{\frac{1}{x-2}} - 1}{5^{\frac{1}{x-2}} + 1}; \quad 10) f(x) = \frac{x^3 + 1}{x + 1}.$$

### Домашние задания

**7.3.** Вычислить пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+7x)}{\sin 2x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 7x} - 1}{x^2 + 3x}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{\arcsin(1-2x)};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\operatorname{tg}(x^2 - 3x + 2)}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin 3x} - 1}{\ln(1 + \operatorname{tg} 2x)}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^3(x-3)}{(e^{x-3} - 1)^2 \operatorname{arctg} x}.$$

**7.4.** Исследовать на непрерывность функции, установить характер точек разрыва:

$$1) f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x^2 + 2x}; \quad 2) f(x) = \frac{1}{1 + 3^{\frac{1}{x}}}; \quad 3) f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x};$$

$$4) f(x) = \frac{1 - \cos x}{2x^2 - x^3};$$

$$5) f(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x^2}, & -2 \leq x \leq 2 \\ x-2, & 2 < x \leq 4 \\ -2\sqrt{x}, & x > 4. \end{cases}, \text{ построить график функции};$$

$$6) f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & -\infty \leq x \leq 0 \\ \cos x, & 0 < x \leq \pi \\ x - \pi - 1, & x > \pi. \end{cases}, \text{ построить график функции}.$$

## Тема 8. Производная функции. Геометрический и физический смысл производной

### Аудиторные задания

**8.1.** Найти производные функций:

1)  $y = 5x^4 - 8\sqrt[7]{x^3} + \frac{7}{x^5} + 4$ ;    2)  $y = x^3 \sin 2x$ ;    3)  $y = \frac{x^4 + 2x + 3}{x^{5-1}}$ ;

4)  $y = (x^5 + 3x - 7)^4$ ; 5)  $y = \sqrt[3]{\left(\frac{x^3 + 1}{x^7 - 2}\right)^2}$ ; 6)  $y = \sqrt{x} \cdot \ln(2x^3 + 3x^2 - 2)$ ;

7)  $y = \frac{\sin 4x - \cos \frac{x}{2}}{\sin 3x + \cos x}$ ;    8)  $y = e^{-x^2} \cdot \log_3 \frac{1}{x}$ ;

9)  $y = \sqrt{x^3} \cdot \arccos \frac{x}{2} - \sqrt{4 - x^2}$ ;    10)  $y = -\operatorname{ctg}^3 \frac{x}{4} - 2 \ln \sin \frac{x}{2}$ ;

11)  $y = \operatorname{arctg}(\sqrt{x} + 2)$ ;    12)  $y = \frac{2}{2x - 1} - \frac{1}{x}$ ;

13)  $y = \cos^5\left(\sin \frac{2x}{3}\right) + \sin\left(\cos \frac{x}{4}\right)$ ;    14)  $y = 2^{-\sqrt{x}/\ln x}$ ;

15)  $y = \arcsin \frac{2}{x} + \arccos \frac{x}{2}$ ;    16)  $y = 5 \ln^3(x^2 + 4) \cdot \operatorname{tg} 3x$ .

**8.2.** Решить уравнение  $f'(x) - \frac{2}{x} f(x) = 0$ , если  $f(x) = x^3 \ln x$ .

**8.3.** Решить неравенство  $f'(x) + \varphi'(x) \geq 0$ , если  
 $f(x) = 2x^3 + 12x^2$ ,  $\varphi(x) = 9x^2 + 72x$ .

**8.4.** Вычислить значения производных заданных функций при указанных значениях независимой переменной:

1)  $f(x) = \sqrt{x^2 + 3} + \frac{2x}{x+1} + 6$ ;  $f'(1) = ?$  2)  $f(x) = \frac{x}{3} - \frac{3}{x} + \sin \frac{\pi}{6}$ ;

$f'(3) = ?$  3)  $f(x) = \sin 8x \cos 4x$ ;  $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = ?$

4)  $f(x) = \frac{2 \cos x}{1 + \sin x}$ ;  $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = ?$  5)  $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^3}}$ ;  $f'(1) = ?$

6)  $f(x) = 4e^{-x^2} \cdot \arcsin \frac{x}{2}$ ;  $f'(0) = ?$  7)  $f(x) = 3^{-\sqrt{2x}}$ ;  $f'(2) = ?$

$$8) f(x) = \ln \frac{2x}{1+4x}; f'(2) = ? \quad 9) f(x) = 5(x^2 - x) \cos^{2x}; f'(0) = ?$$

$$10) f(x) = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 - 1 + \sqrt[3]{x}}; f'(1) = ? \quad 11) f(x) = \frac{2x - 4}{\sin^2 x} \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = ?$$

**8.5.** Составить уравнения касательной и нормали к графику функции  $y = x^2 + 4$  в точке  $M(1; 5)$ .

**8.6.** Составить уравнения касательной и нормали к графику функции  $y = \operatorname{tg} x$  в точке с абсциссой  $x_0 = \frac{4\pi}{3}$ .

**8.7.** Тело массой 7 движется прямолинейно по закону  $y = t^2 + t + 4$ . Определить кинетическую энергию тела в момент времени  $t = 3$ .

**8.8.** Радиус шара изменяется со скоростью 6 см/с. С какой скоростью изменяются объем и поверхность шара?

**8.9.** Найти силу тока в проводнике, если заряд, проходящий через поперечное сечение проводника, изменяется по закону  $q = 2t + e^{-3t}$  (кл).

**8.10.** Материальная точка движется по окружности так, что угловое перемещение  $\varphi$  изменяется по закону  $\varphi = 6,5 + 7t + 3,5t^2 + 2t^3$  (рад). Найти угловую скорость движения материальной точки к моменту времени  $t = 2$  с от начала движения.

### Домашние задания

**8.11.** Найти производные функций:

$$1) y = 5e^{2x} \cdot \sqrt{x}; \quad 2) y = \frac{\cos 3x}{\operatorname{tg} \sqrt{x}}; \quad 3) y = x^2 \arcsin 8x;$$

$$4) y = \frac{x^3 \operatorname{ctg} 2x}{\sqrt{x+1}}; \quad 5) y = 3^{\arcsin x/2}; \quad 6) y = 5 \log_2 \left( \sin \frac{x}{7} \right);$$

$$7) y = \frac{3}{2x-7} - \frac{4}{x}; \quad 8) y = \ln^3(8x - 4^{-x^2}); \quad 9) y = \arccos \frac{1}{\sqrt{x}};$$

$$10) y = \operatorname{arctg} \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}}; \quad 11) y = \frac{\sqrt{x - x^2}}{e^{-x^3}}; \quad 12) y = \frac{a}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{\sqrt[5]{x^3}}{b}.$$

**8.12.** Составить уравнения касательной и нормали к графику функции  $y = e^{1-x^2}$  в точке с абсциссой  $x_0 = -1$ .

**8.13.** Вычислить значения производных заданных функций при указанных значениях независимой переменной:

1)  $f(x) = \sqrt{x^2 + 5} + \frac{14x}{2x-1}$ ;  $f'(2) = ?$  2)  $f(x) = \frac{2x}{3} - \frac{3}{5x} + \sin 9x$ ;

$f'(\pi) = ?$  3)  $f(x) = \frac{1}{6} \sin 6x \cos 3x$ ;  $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = ?$

4)  $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x}}$ ;  $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = ?$  5)  $f(x) = \ln \frac{2x^2}{1+4\sqrt{x}}$ ;  $f'(2) = ?$

6)  $f(x) = \arccos \sqrt{1-2x} + \sqrt{2x-4x^2}$ ;  $f'\left(\frac{1}{2}\right) = ?$

7)  $f(x) = 3^{-\sqrt{2x}}$ ;  $f'(2) = ?$  7)  $f(x) = \operatorname{arctg} x \frac{1+x}{1-x}$ ;  $f'(0) = ?$

## Тема 9. Производная сложной, неявной и параметрической функций

### Аудиторные задания

**9.1.** Используя основные правила дифференцирования, найти производные функций:

1)  $y = \ln(x^2 - \sin^3 x)$ ; 2)  $y = \sin^2 7x \cdot \operatorname{tg}^3 x$ ;

3)  $y = 2^{\cos 3x} + \arcsin^5(x^2 - 1)$ ; 4)  $y = e^{x^2} \cdot \operatorname{sh} 5x$ ; 5)  $y = \operatorname{arctg} \sqrt{1 + e^{-x^3}}$ ;

6)  $y = \lg^4(x^5 - \sin 2x)$ .

**9.2.** Найти производные функций, заданных параметрически:

1)  $\begin{cases} x = t^2 + 2 \\ y = \frac{1}{3}t^2 - 1 \end{cases}$ ; 2)  $\begin{cases} x = \frac{1}{t+1} \\ y = \left(\frac{t}{t+1}\right)^2 \end{cases}$ ; 3)  $\begin{cases} x = a(\varphi - \sin \varphi) \\ y = a(1 - \cos \varphi) \end{cases}$ ;

4)  $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^2 - 1 \end{cases}$ ; 5)  $\begin{cases} x = \arccos \sqrt{t} \\ y = \sqrt{t-t^2} \end{cases}$ ; 6)  $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$ ; 7)  $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$ ;

8)  $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t \\ y = \sin 2t + 2 \cos 2t \end{cases}$ .

**9.3.** Найти значения производных в указанных точках:

$$1) \begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t \end{cases}; \quad t = \frac{\pi}{6}; \quad 2) \begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^2}, \\ y = \frac{3at^2}{1+t^2} \end{cases}; \quad t = 2.$$

**9.4.** Найти производные функций, заданных неявно:

- 1)  $e^x + 2x^2y^2 - e^y = 0$ ; 2)  $2y \ln y = x$ ; 3)  $x - y = \arcsin x - \arcsin y$ ;  
 4)  $2^x + 2^y = 2^{x+y}$ ; 5)  $\arctg y = y - x^2$ ; 6)  $\sin(xy) + \cos(xy) = 0$ ;  
 7)  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ; 8)  $e^x \sin y - e^y \cos x = 0$ .

**9.5.** Найти значения производных неявно заданных функций в указанных точках:

- 1)  $x^3 - 2x^2y^2 + 5x + y - 5 = 0, M(1,1)$ ; 2)  $e^y + xy = \ln x, M(1,1)$ .

### Домашние задания

**9.6.** Используя основные правила дифференцирования, найти производные функций:

- 1)  $y = (x-2)^4 \cdot \arcsin 5x^4$ ; 2)  $y = \operatorname{tg}^4 x \cdot \arccos 7x$ ;  
 3)  $y = \ln^3(x^2 + x + 1)e^{-x}$ ; 4)  $y = e^{-\sin x} \cdot \operatorname{ctg} x^6$ ; 5)  $y = \frac{e^{\arccos x}}{\sqrt{x+5}}$ ;  
 6)  $y = \frac{\ln^2(x+1)}{\cos 3x^3}$ ; 7)  $y = \frac{3\arccos 2x}{(x+1)^4}$ .

**9.7.** Найти производные функций, заданных параметрически:

- 1)  $\begin{cases} x = (2t+3)\cos t \\ y = 3t^2 \end{cases}$ ; 2)  $\begin{cases} x = \sqrt{t^2-1} \\ y = \sqrt[3]{t^3+1} \end{cases}$ ; 3)  $\begin{cases} x = 2\cos^2 t \\ y = 3\sin^2 t \end{cases}$ ;  
 4)  $\begin{cases} x = \frac{\ln t}{t} \\ y = t^2 \ln t \end{cases}$ ; 5)  $\begin{cases} x = e^{-3t} \\ y = e^{6t} \end{cases}$ ; 6)  $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 + \cos t) \end{cases}$ .

**9.8.** Найти производные функций, заданных неявно:

- 1)  $y = x + \arctg y$ ; 2)  $y^2 = e^y + 5x$ ; 3)  $\operatorname{tg} \frac{x}{y} = y^2 + x^2$ ;  
 4)  $\sin y = xy^3 + y^2x$ ; 5)  $\arctg \frac{y}{x} = x + y$ ; 6)  $x^2y = \operatorname{ctg} y$ .

## Тема 10. Логарифмическая производная. Дифференциал функции

### Аудиторные задания

**10.1.** Используя предварительное логарифмирование, найти производные функций:

$$1) y = \frac{(x-3)^2(2x-1)^5}{(4x+1)^3}; \quad 2) y = \sqrt[3]{\frac{(4x-7)^2(12x-x^2)^8}{(2-3x)^5}}; \quad 3) y = (2x)^{\sin x/3};$$

$$4) y = (\arcsin 3x)^{\sqrt{x}}; \quad 5) y = (\operatorname{tg} 8x)^{x^9}; \quad 6) y = x^{x^3}; \quad 7) y = \left(\cos \frac{1}{x}\right)^{\arcsin 5x};$$

$$8) y = (\log_2 x)^{5/x}; \quad 9) \operatorname{arctg} 2x \cdot (1+4x)^{\sqrt{x}}; \quad 10) y = (\operatorname{th} 6x)^{e^{-x^2}}.$$

**10.2.** Найти дифференциалы функций:

$$1) y = x \operatorname{tg}^3 x; \quad 2) y = \sqrt{\operatorname{arctg} x + (\arcsin x)^2}; \quad 3) y = \ln \left(x + \sqrt{4+x^2}\right);$$

$$4) y^5 + y - x^2 = 1.$$

**10.3.** Найти приближенное значение функции  $y(x) = e^{x^2-x}$  при  $x = 1, 2$ .

**10.4.** Вычислить приближенно:

$$1) \arcsin 0,05; \quad 2) \ln 1,2; \quad 3) \sqrt[4]{17}; \quad 4) \operatorname{tg} 44^\circ 56'.$$

### Домашние задания

**10.5.** Используя предварительное логарифмирование, найти производные функций:

$$1) y = \frac{\sqrt[3]{(x-1)^7}}{(x+1)^5(x-5)^3}; \quad 2) y = \frac{(x+1)^3(x+3)^8}{\sqrt[3]{(x-5)^4}}; \quad 3) y = (\sqrt{x+5})^{\arccos 3x};$$

$$4) y = (\log_2(x+1))^{\operatorname{ctg} 5x}; \quad 5) y = (\sin 3x)^{\cos^2 5x};$$

$$6) y = (\operatorname{arcctg} 2x)^{\ln 3x}; \quad 7) y = (x^2+1)^{\operatorname{ctg} 5x}; \quad 8) y = (\cos 5x)^{\ln x}.$$

**10.6.** Найти дифференциалы функций:

1)  $y = x^2 \cdot \arcsin x$ ;      2)  $y = \ln\left(x + \sqrt{4 + x^2}\right)$ ;

3)  $y = \sqrt{\arcsin x + \operatorname{arctg}^2 x}$ ;      4)  $e^y = x + y$ .

**10.7.** Вычислить приближенно:

1)  $\sqrt[5]{31}$ ; 2)  $\sin 29^\circ$ .

## **Тема 11. Производные и дифференциалы высших порядков**

### **Аудиторные задания**

**11.1.** Найти производные 2-го порядка от следующих функций:

1)  $y = \cos^2 x$ ; 2)  $y = \operatorname{arctg} x^2$ ;      3)  $y = \log_2 \sqrt[3]{1 - x^2}$ ;

4)  $y = \frac{1}{3}x^2\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3}\sqrt{1-x^2} + x \arcsin x$ ;      5)  $y = (1 + x^2) \operatorname{arctg} x$ ;

6)  $y = e^{\sqrt{x}}$ .

**11.2.** Показать, что функция  $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$  при любых постоянных  $C_1$  и  $C_2$  удовлетворяет уравнению  $y'' - 5y' + 6y = 0$ .

**11.3.** Найти производные 2-го порядка от функций, заданных неявно:

1)  $y = 1 + xe^y$ ; 2)  $x^2 + y^3 = 3xy$ ;      3)  $\operatorname{arctg} y = y - x$ ; 4)  $y = x + \ln y$ ;

5)  $x + y = e^{x-y}$ ;      6)  $y = \sin(x + y)$ .

**11.4.** Найти производные 2-го порядка от функций, заданных параметрически:

1)  $\begin{cases} x = t^2 + 2, \\ y = \frac{1}{3}t^3 - 1 \end{cases}$ ;      2)  $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \sqrt{1 - t^2} \end{cases}$ ;      3)  $\begin{cases} x = a \cos^2 t, \\ y = a \sin^2 t \end{cases}$ ;

4)  $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^2 - 1 \end{cases}$ ;      5)  $\begin{cases} x = a(\varphi - \sin \varphi), \\ y = a(1 - \cos \varphi) \end{cases}$ ;      6)  $\begin{cases} x = 1 + e^{at}, \\ y = at + e^{-at} \end{cases}$ .

**11.5.** Найти дифференциалы 1, 2 и 3-го порядков функции  $y = (2x - 3)^3$ .

**11.6.** Найти дифференциалы 2-го порядков функций:

1)  $y = e^{-x^2}$ ;    2)  $xy + y^2 = 1$ .

**11.7.** Найти дифференциал 3-го порядка функции  $y = \frac{\ln x}{x}$ .

### Домашние задания

**11.8.** Найти производные 2-го порядка от следующих функций:

1)  $y = \sqrt{1-x^2} \arcsin x$ ;    2)  $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ ;

3)  $y = -\frac{1}{9}x \sin 3x - \frac{2}{27} \cos 3x$ ;    4)  $y = \frac{1}{1+x^3}$ .

**11.9.** Найти  $y^{(n)}(x)$ , если  $y = e^{-x}$ .

**11.10.** Найти производные второго порядка для функций, заданных неявно и параметрически:

1)  $e^{x+y} = xy$ ;    2)  $x^2 + y^2 + xy - 4 = 0$ ;    3)  $\begin{cases} x = \frac{1}{\cos t} \\ y = \operatorname{tg} t \end{cases}$ ;    4)  $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$ .

**11.11.** Найти значение производной 2-го порядка от функции  $y$ , заданной уравнением  $x^2 + 2y^2 - xy + x + y = 4$ , в точке  $M(1;1)$ .

**11.12.** Доказать, что функция  $y = e^{4x} + 2e^{-x}$  удовлетворяет уравнению  $y''' - 13y' - 12y = 0$ . Записать для этой функции  $d^2y$ .

## Тема 12. Правила Лопиталья – Бернулли

### Аудиторные задания

**12.1.** Применяя правила Лопиталья-Бернулли, найти пределы:

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \sin 3x}{\arcsin x}$ ;    2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{3^x}$ ;    3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ ;

4)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}$ ;    5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^2 + 2 \cos x - 2}$ ;    6)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^{\ln x} - x}{\ln x}$ ;

7)  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{\ln(x-a) \cos x}{\ln(e^x - e^a)}$ ;    8)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 + x - 1}{x^2 + 4x + 2}$ ;    9)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{e^{\frac{3}{x}} - 1}$ ;

- 10)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1 + 2 \ln \sin x}$ ;    11)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$ ;    12)  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\operatorname{ctg} x}{\ln 2x}$ ;  
 13)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{3}{x}$ ;    14)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot e^{\frac{1}{x^2}}$ ;    15)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$ ;  
 16)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right)$ ;    17)  $\lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ ;    18)  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left( \frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right)$ ;  
 19)  $\lim_{x \rightarrow 1} \sin(x-1) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$ ;    20)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}$ ;  
 21)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\ln(x + \sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right)$ ;    22)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{3/(1+\ln x)}$ ;  
 23)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + 10^x)^{1/x}$ ;    24)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{1/x^2}$ ;    25)  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{1/x}$ ;  
 26)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{1/\ln x}$ ;    27)  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$ ;    28)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right)^x$ ;  
 29)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$ ;    30)  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\pi - 2x)^{\cos x}$ .

### Домашние задания

#### 12.2. Вычислить пределы:

- 1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2 \ln x}{x}$ ;    2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x - \sin x}$ ;    3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 5x}{\ln \sin 2x}$ ;  
 4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + x + 1}{e^{-x}}$ ;    5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$ ;    6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{x \sqrt{1-x^2}}$ ;  
 7)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-3x} - e^{\sin x}}{x}$ ;    8)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{x} \right)$ ;    9)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1 + 2 \ln \sin x}$ ;  
 10)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$ ;    11)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{ctg} \pi x$ ;    12)  $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x \cdot \ln(x-1)$ ;  
 13)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{1/x}$ ;    14)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}$ ;    15)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}$ ;  
 16)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ .

## Тема 13. Формула Тейлора

### Аудиторные задания

**13.1.** Разложить многочлен  $x^4 - 2x^2 + 13x + 9$  по степеням двучлена  $x + 2$ .

**13.2.** Разложить многочлен  $x^3 + 3x^2 - 2x + 4$  по степеням двучлена  $x + 1$ .

**13.3.** Для многочлена  $x^4 + 4x^2 - x + 3$  написать формулу Тейлора 2-го порядка в точке  $x_0 = 1$ . Записать остаточный член в форме Лагранжа.

**13.4.** Написать формулу Тейлора 3-го порядка для функции  $f(x) = 10^x$  в точке  $x_0 = 0$ .

**13.5.** Написать формулу Тейлора 3-го порядка для функции  $f(x) = \frac{x}{x-1}$  в точке  $x_0 = 2$ .

**13.6.** Написать формулу Тейлора 2-го порядка для функции  $f(x) = \operatorname{tg} x$  в точке  $x_0 = 0$ .

**13.7.** Вывести приближенную формулу  $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$  и оценить ее точность при  $|x| < 0,05$ .

**13.8.** Вывести приближенные формулы и оценить их погрешность при  $|x| < 1$ :

$$1) \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2; \quad 2) \sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2.$$

**13.9.** Проверить, что при вычислении значений функции  $e^x$  при  $0 < x \leq \frac{1}{2}$  по приближенной формуле  $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$  допускаемая погрешность меньше 0,01. Пользуясь этим, найти  $e^{0,2}$  с тремя верными цифрами.

**13.10.** Вычислить с точностью до  $10^{-4}$   $\cos 10^\circ$ .

**13.11.** Вычислить с точностью до  $10^{-3}$ : 1)  $\sqrt[5]{33}$ ; 2)  $\ln 1,05$ .

## Домашние задания

**13.12.** Разложить многочлен  $x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$  по степеням двучлена  $x - 4$ .

**13.13.** Написать формулу Тейлора 3-го порядка для функции  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  в точке  $x_0 = 1$ .

**13.14.** Написать формулу Тейлора 3-го порядка для функции  $f(x) = \arcsin x$  в точке  $x_0 = 0$ .

**13.15.** Написать формулу Тейлора  $n$ -го порядка для функции  $f(x) = \frac{1}{x}$  в точке  $x_0 = -1$ .

**13.16.** Написать формулу Маклорена  $n$ -го порядка для функции  $f(x) = xe^x$ ,  $x_0 = 0$ .

**13.17.** Вычислить приближенные значения с заданной точностью  $\Delta$ :

- 1)  $\sin 1^\circ$ ,  $\Delta = 10^{-4}$ ;    2)  $\sqrt{e}$ ,  $\Delta = 10^{-3}$ ;    3)  $\sqrt[10]{1027}$ ,  $\Delta = 10^{-4}$ ;  
4)  $\cos 5^\circ$ ,  $\Delta = 10^{-5}$ .

## Тема 14. Монотонность функций. Экстремум. Наибольшее и наименьшее значения функций. Выпуклость и вогнутость графиков функций

### Аудиторные задания

**14.1.** Найти интервалы возрастания, убывания и точки экстремума функций:

- 1)  $y = 15 - x^2 - 2x$ ;    2)  $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$ ;  
3)  $y = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x + \frac{9}{4}$ ;    4)  $y = x\sqrt{1-x^2}$ ;    5)  $y = \frac{2x^2-1}{x^4}$ ;  
6)  $y = x^2e^{-x}$ ;    7)  $y = \frac{x}{\ln x}$ ;    8)  $y = \sqrt[3]{x^2-2x}$ ;    9)  $y = \frac{e^x}{x+1}$ ;  
10)  $y = \ln \frac{x+1}{x+2}$ .

**14.2.** Найти экстремумы функций, пользуясь производной 2-го порядка:

1)  $y = 4x^3 - 9x^2 + 6x$ ; 2)  $y = e^{3x} - 3x + 2$ ; 3)  $y = \frac{2x}{1+x^2}$ ;

4)  $y = x \ln^2 x$ ; 5)  $y = x^2(a-x)^2$ ; 6)  $y = x + \sqrt{1-x}$ .

**14.3.** Определить наибольшее и наименьшее значения функций в указанных интервалах:

1)  $y = x^4 - 2x^2 + 5, [-2; 0]$ ; 2)  $y = x + 2\sqrt{x}, [0; 4]$ ;

3)  $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}, [0; 1]$ ; 4)  $y = \arctg \frac{1-x}{1+x}, [0; 1]$ ;

5)  $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}, [-2; 1]$ ; 6)  $y = x \ln x - x, [1/e; e]$ .

**14.4.** Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графиков функций:

1)  $y = \ln(1+x^2)$ ; 2)  $y = e^{-8x^2+4x}$ ; 3)  $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ ;

4)  $y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$ ; 5)  $y = x^4 - 2x^2 + 3$ ; 6)  $y = \frac{3x^4+1}{x^3}$ ; 7)

$y = \frac{2x^2-1}{x^4}$ ; 8)  $y = x^2 \cdot e^{-x}$ ; 9)  $y = x\sqrt{1-x^2}$ ;

10)  $y = \sqrt[3]{x^2-2x}$ .

**14.5.** Требуется изготовить ящик с крышкой, объем которого был бы равен  $72 \text{ см}^3$ , причем стороны основания относились бы как 1:2. Каковы должны быть размеры всех сторон, чтобы полная поверхность ящика была наименьшей?

**14.6.** Найти соотношение между радиусом  $R$  и высотой  $H$  цилиндра, имеющего при данном объеме наименьшую полную поверхность.

**14.7.** Найти высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиусом  $R$ .

### Домашние задания

**14.8.** Найти интервалы возрастания, убывания и точки экстремума функций:

- 1)  $y = \ln x - \arctg x$ ; 2)  $y = \frac{x^3}{x-1}$ ; 3)  $y = (x-1)e^x$ ;  
 4)  $y = x^3 - 6x^2 + 16$ .

**14.9.** Найти экстремум функции  $y = x + \frac{a^2}{x}$ ,  $a > 0$ , пользуясь производной 2-го порядка.

**14.10.** Найти точки перегиба графиков функций:

- 1)  $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$ ; 2)  $y = x \arctg x$ ; 3)  $y = \frac{4x^3}{1-x^3}$ ; 4)  $y = e^{-x^2/2}$  (кривая Гаусса).

**14.11.** Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных интервалах:

- 1)  $y = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$ ,  $[0;1]$ ; 2)  $y = x^3 \cdot e^{x+1}$ ,  $[-4,0]$ ;  
 3)  $y = \ln(4-x^2)$ ,  $[-1;1]$ ; 4)  $y = x + 2\sqrt{x}$ ,  $[0;4]$ .

**14.12.** Из трех досок одинаковой ширины сколачивается желоб для подачи воды. При каком угле  $\alpha$  наклона боковых стенок к днищу желоба площадь поперечного сечения будет наибольшей?

## Тема 15. Асимптоты. Построение графиков функций

### Аудиторные задания

**15.1.** Найти асимптоты графиков функций:

- 1)  $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x-2}$ ; 2)  $y = \frac{e^x}{x+1}$ ; 3)  $y = \frac{x^4}{x^3+1}$ ; 4)  $y = \frac{\ln x}{x}$ ;  
 5)  $y = 3x + \arctg 5x$ ; 6)  $y = \frac{x^2+2}{x^2-9}$ ; 7)  $y = x + \sin x$ ;  
 8)  $y = (x-2)e^{-1/x}$ ; 9)  $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ ; 10)  $y = x^2 + \frac{2}{x}$ .

**15.2.** Провести полное исследование и построить графики функций:

$$\begin{aligned}
 &1) y = \frac{2x^2 - 1}{x^4}; \quad 2) y = x^2 e^{-x}; \quad 3) y = x\sqrt{1 - x^2}; \quad 4) y = \sqrt[3]{x^2 - 2x}; \\
 &5) y = x^2 \ln x; \quad 6) y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}; \quad 7) y = \frac{x}{(1 + x)^3}; \quad 8) y = (x - 1)e^x; \\
 &9) y = \frac{4x^3}{1 - x^3}; \quad 10) y = x^3 - 6x^2 + 16.
 \end{aligned}$$

### Домашние задания

**15.3.** Найти асимптоты графиков функций:

$$1) y = \frac{2 - 4x^2}{1 - 4x^2}; \quad 2) y = x \ln \left( e + \frac{1}{x} \right); \quad 3) y = \frac{x^3}{2(1 + x)^2}; \quad 4) y = \frac{2 + x^3}{x^2}.$$

**15.4.** Провести полное исследование и построить графики функций:

$$1) y = \frac{x^3}{1 - x^2}; \quad 2) y = x^2 e^{1/x}; \quad 3) y = \ln(1 - x^2); \quad 4) y = e^{2x - x^2}.$$

## Тема 16. Неопределенный интеграл. Метод непосредственного интегрирования

### Аудиторные задания

**16.1.** Пользуясь свойствами неопределенного интеграла и таблицей интегралов, найти следующие интегралы:

$$\begin{aligned}
 &1) \int (\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1) dx; \quad 2) \int \frac{(1 + 4\sqrt[3]{x})}{x} dx; \quad 3) \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}; \\
 &4) \int \frac{1 + 3x^2}{x^2(1 + 2x^2)} dx; \quad 5) \int \sin^2 \frac{x}{2} dx; \quad 6) \int \frac{4x^2 + 2x - 3}{x^2} dx; \quad 7) \\
 &\int \sin 3x \cos x dx; \quad 8) \int (2x + 3)^3 dx; \quad 9) \int \cos 4x \cos 8x dx; \quad 10) \\
 &\int \frac{1 + \cos^2 x}{1 - \cos 2x} dx; \quad 11) \int 2^x \left( 1 + \frac{2^{-x}}{\sqrt[4]{x^3}} \right) dx; \quad 12) \int \frac{5 - \sin^3 x}{\sin^2 x} dx; \quad 13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int \left( \frac{3}{1+x^2} - \frac{7}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx; \quad 14) \int \frac{x^2}{x^2-1} dx; \quad 15) \int \left( \cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right)^2 dx; \\
& 16) \int \frac{x^4}{x^2-1} dx; \quad 17) \int e^x \left( 5 - \frac{3e^{-x}}{x^4} \right) dx; \quad 18) \int (1-\sqrt{x})^3 dx; \\
& 19) \int \left( \sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx; \quad 20) \int \frac{6x^4 - 8x^3 - 4x^2 + 3x - 5}{x^2} dx; \quad 21) \\
& \int \left( \sqrt{x^5} - \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} \right) dx; \quad 22) \int e^{-x} \left( 1 + \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx; \quad 23) \int 3^x \left( 2 - \frac{3^{-x}}{1+x^2} \right) dx; \\
& 24) \int \left( \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{5}{\cos^2 x} \right) dx; \quad 25) \int \frac{3\sqrt{1-x^2} + 2\cos^2 x}{\sqrt{1-x^2} \cos^2 x} dx; \\
& 26) \int \frac{6x+7+7x^2}{x^3+x} dx; \quad 27) \int (chx + shx) dx; \quad 28) \int \frac{2+7sh^2 x}{sh^2 x} dx.
\end{aligned}$$

### Домашние задания

**16.2.** Пользуясь таблицей интегралов и свойствами неопределенного интеграла, найти следующие интегралы:

$$\begin{aligned}
1) \quad & \int (x^2 - 4)(x + 2) dx; \quad 2) \quad \int \frac{9x^5 + 12x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 4x + 2}{x^3} dx; \\
3) \quad & \int tg^2 x dx; \quad 4) \quad \int e^x (3 + 5e^{-x} ctg^2 x) dx; \\
5) \quad & \int \cos^2 \frac{x}{2} dx; \quad 6) \quad \int \left( \frac{2}{x^3} - \frac{4}{x^5} + \frac{6}{x^7} \right) dx; \\
7) \quad & \int \frac{(1-\sqrt{x})^3}{x^2} dx; \quad 8) \quad \int \frac{7+3\cos^2 x}{\cos^2 x} dx; \\
9) \quad & \int \frac{x^2}{x^2+1} dx; \quad 10) \quad \int \frac{x^4}{x^2+1} dx.
\end{aligned}$$

## Тема 17. Интегрирование с помощью замены переменной. Метод подстановки

### Аудиторные задания

**17.1.** Найти неопределенные интегралы подведением (поднесением) под знак дифференциала:

- 1)  $\int \cos x 2^{\sin x} dx$ ;    2)  $\int \frac{dx}{x(2 \ln x + 1)^4}$ ;    3)  $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+2} dx$ ;  
4)  $\int \frac{4x+4}{x^2+2x} dx$ ;    5)  $\int \frac{tg x dx}{\cos^2 x}$ ;    6)  $\int \frac{dx}{(1+x^2) \arctg x}$ ;  
7)  $\int x e^{-x^2} dx$ ;    8)  $\int \frac{\sin^3 2x}{\cos^4 4x} dx$ ;    9)  $\int \frac{dx}{x \ln 4x}$ ;    10)  $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}}$ .

**17.2.** Найти интегралы, применив метод подстановки:

- 1)  $\int x(2x^2+4)^5 dx$ ;    2)  $\int x \sqrt{2x^2+3} dx$ ;    3)  $\int \frac{\ln x \sqrt{2+\ln^2 x}}{x} dx$ ;  
4)  $\int \frac{\sin 2x}{4+\sin^2 x} dx$ ;    5)  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ ;    6)  $\int \frac{x dx}{\sqrt{x-1}}$ ;    7)  $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1+2 \cos x}}$ ;  
; 8)  $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ ;    9)  $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^x}}$ ;    10)  $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ ;    11)  $\int \frac{2^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$ ;  
12)  $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$ ;    13)  $\int \frac{\cos \frac{x}{\sqrt{2}}}{2 - \sin \frac{x}{\sqrt{2}}} dx$ ;    14)  $\int \frac{3^x dx}{3^x+1}$ ;    15)  
 $\int \frac{(2x+1) dx}{\sqrt{x+1}}$ ;  
16)  $\int \frac{\ln x + 1}{x \ln x} dx$ ;    17)  $\int \frac{\sin x + x \cos x}{x^2 \sin^2 x} dx$ ;    18)  $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}}$ ;  
19)  $\int 4^{x \ln x} (1 + \ln x) dx$ ;    20)  $\int \frac{2x - \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ .

## Домашние задания

**17.3.** Найти неопределенные интегралы подведением (поднесением) под знак дифференциала:

- 1)  $\int e^{4x-3} dx$ ; 2)  $\int \frac{\cos 2x}{1+\sin^2 2x} dx$ ; 3)  $\int x^2 e^{-x^3} dx$ ; 4)  $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln 2x}}$ ;  
5)  $\int x\sqrt{x^2-4} dx$ ; 6)  $\int \frac{xdx}{x^2+7}$ ; 7)  $\int \frac{3^x}{1+9^x} dx$ ; 8)  $\int x^2 \cos(3x^3+1) dx$ .

**17.4.** Найти неопределенные интегралы методом подстановки:

- 1)  $\int \frac{4\sin 2x}{4+\sin^2 x} dx$ ; 2)  $\int \frac{\ln x+1}{1+x\ln x} dx$ ; 3)  $\int \frac{dx}{1+e^x}$ ; 4)  $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx$ ;  
5)  $\int \frac{x(2\ln x+1)}{4+x^2 \ln x} dx$ ; 6)  $\int \frac{2^{\frac{1}{x^2}}}{x^3} dx$ ; 7)  $\int x(4x^2+5)^3 dx$ ; 8)  $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-4\ln^2 x}}$ .

## Тема 18. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле

### Аудиторные задания

**18.1.** Методом интегрирования по частям найти следующие неопределенные интегралы:

- 1)  $\int (2x+3)e^{4x} dx$ ; 2)  $\int \sqrt{x} \ln 4x dx$ ; 3)  $\int x \arctg 2x dx$ ;  
4)  $\int (x^2+1)\cos(3x+1) dx$ ; 5)  $\int e^{-x} \cos 2x dx$ ; 6)  $\int \ln^2 x dx$ ;  
7)  $\int \sin(\ln x) dx$ ; 8)  $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$ ; 9)  $\int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1+x}}$ ; 10)  $\int x^2 3^x dx$ ;  
11)  $\int \frac{\arcsin \sqrt{x} dx}{\sqrt{1-x}}$ ; 12)  $\int (3x+1)\cos^2 4x dx$ ; 13)  $\int x^2 \ln(1+x) dx$ ;  
14)  $\int \sqrt{a^2+x^2} dx$ ; 15)  $\int \cos \sqrt{x} dx$ ; 16)  $\int x^3 \sin x^2 dx$ ;  
17)  $\int \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx$ ; 18)  $\int x \arctg \sqrt{x} dx$ ; 19)  $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$ .

### Домашние задания

**18.2.** Найти следующие неопределенные интегралы методом интегрирования по частям:

- 1)  $\int (x^2 + 2x) \cos 2x dx$ ; 2)  $\int e^{2x} \sin x dx$ ; 3)  $\int \frac{x \cos x}{\sin^2 x} dx$ ; 4)  $\int \arccos x dx$ ;  
5)  $\int e^{\sqrt{x}} dx$ ; 6)  $\int x \sin x \cos x dx$ ; 7)  $\int \frac{x \arccos x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ; 8)  $\int x^3 \cos 3x dx$ .

## Тема 19. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трехчлен в знаменателе

### Аудиторные задания

**19.1.** Найти следующие неопределенные интегралы:

- 1)  $\int \frac{dx}{4x^2 + 13}$ ; 2)  $\int \frac{dx}{x^2 - 81}$ ; 3)  $\int \frac{dx}{5x^2 - 18}$ ; 4)  $\int \frac{dx}{x^2 - 10x + 41}$ ;  
5)  $\int \frac{dx}{x^2 + 8x - 9}$ ; 6)  $\int \frac{dx}{2x^2 - 4x + 3}$ ; 7)  $\int \frac{dx}{3x^2 + 6x + 5}$ ;  
8)  $\int \frac{dx}{4x^2 + 8x - 3}$ ; 9)  $\int \frac{x+2}{3x^2 + 4x - 7} dx$ ; 10)  $\int \frac{6x+5}{3x^2 + 5x - 9} dx$ ;  
11)  $\int \frac{x+3}{x^2 + 2x + 5} dx$ ; 12)  $\int \frac{x-5}{x^2 - 4x} dx$ ; 13)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 16x + 5}}$ ;  
14)  $\int \frac{dx}{\sqrt{12 + 4x + x^2}}$ ; 15)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 5x}}$ ; 16)  $\int \frac{dx}{\sqrt{7 + 4x - 2x^2}}$ ;  
17)  $\int \frac{(x-6)dx}{\sqrt{x^2 + 8x + 17}}$ ; 18)  $\int \frac{(x+7)dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 7}}$ ; 19)  $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{6 - 3x - x^2}}$ ;  
20)  $\int \frac{(4x+5)dx}{\sqrt{7 - 4x - 2x^2}}$ ; 21)  $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2 - x + 2}}$ ; 22)  $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2 + x + 1}}$ .

### Домашние задания

**19.2.** Найти следующие неопределенные интегралы:

$$\begin{aligned}
 &1) \int \frac{dx}{x^2+64}; \quad 2) \int \frac{dx}{x^2-64}; \quad 3) \int \frac{dx}{x^2-2x-4}; \quad 4) \int \frac{dx}{3x^2-12x-14}; \\
 &5) \int \frac{dx}{x^2+x+3}; \quad 6) \int \frac{x+2}{x^2+2x-3}dx; \quad 7) \int \frac{x+1}{x^2+4x+13}dx; \\
 &8) \int \frac{dx}{\sqrt{10-6x-3x^2}}; \quad 9) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x}}; \quad 10) \int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{x^2-2x-9}}; \\
 &11) \int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{10-2x-x^2}}; \quad 12) \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-4x+5}}.
 \end{aligned}$$

## Тема 20. Интегрирование рациональных функций

### Аудиторные задания

**20.1.** Записать разложение рациональной дроби на простейшие в неопределенных коэффициентах:

$$1) \frac{3x-2}{x^3-2x^2}; \quad 2) \frac{4x+5}{(x^2+1)^2(x-3)^2}; \quad 3) \frac{x^2+2x+2}{(x^2+x+1)(x-2)^2}.$$

**20.2.** Найти неопределенные интегралы:

$$1) \int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx; \quad 2) \int \frac{x^2-x+4}{(x+1)(x-2)(x-3)}dx; \quad 3) \int \frac{2x^2+3}{x^4-5x^2+6}dx;$$

$$4) \int \frac{x^5}{x^3+1}dx; \quad 5) \int \frac{dx}{x^3+2x^2+2x}; \quad 6) \int \frac{x^3+3}{x^3-8}dx;$$

$$7) \int \frac{dx}{x(x^2+1)(x+4)}; \quad 8) \int \frac{x^4+3x+1}{x^4-1}dx; \quad 9) \int \frac{2x+1}{(x^2-1)(x+2)}dx;$$

$$10) \int \left( \frac{x+2}{x-1} \right)^2 \frac{dx}{x}; \quad 11) \int \frac{dx}{(x^2-4)^2}; \quad 12) \int \frac{(x+3)}{(x^2+2)^2}dx.$$

## Домашние задания

**20.3.** Найти неопределенные интегралы:

1)  $\int \frac{3x+1}{(x^2+x-2)(x+1)} dx$ ;    2)  $\int \frac{dx}{x^3+x^2}$ ;    3)  $\int \frac{x^2-6x+8}{x^3+8} dx$ ;

4)  $\int \frac{2x+9}{(x+1)(x^2-4x+13)} dx$ ;    5)  $\int \frac{5xdx}{x^4+3x^2-4}$ ;

6)  $\int \frac{2x+5}{(x+3)(x^2-5x+4)} dx$ .

## Тема 21. Интегрирование тригонометрических функций

### Аудиторные задания

**21.1.** Найти неопределенные интегралы:

1)  $\int \sin 5x \sin 3x dx$ ;    2)  $\int \cos 8x \cos 3x dx$ ;    3)  $\int \sin 6x \cos 4x dx$ ;

4)  $\int \cos^2 5x dx$ ;    5)  $\int \cos^5 3x dx$ ;    6)  $\int \sin^4 2x dx$ ;

7)  $\int \sin^3 2x \cos^5 2x dx$ ;    8)  $\int \sin^3 3x \cos^3 3x dx$ ;    9)  $\int \cos^2 x \sin^4 x dx$ ;

10)  $\int tg^3 2x dx$ ;    11)  $\int ctg^4 x dx$ ;    12)  $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$ ;

13)  $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$ ;    14)  $\int \frac{dx}{1+tgx}$ ;    15)  $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 8\sin x \cos x + 12\cos^2 x}$ ;

16)  $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$ ;    17)  $\int \frac{dx}{16\sin^2 x + 25\cos^2 x}$ ;    18)  $\int \frac{dx}{2+3\sin x + 2\cos x}$ ;

19)  $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos^3 x}} dx$ ;    20)  $\int \sqrt{\sin x} \cos^5 x dx$ .

## Домашние задания

**21.2.** Найти неопределенные интегралы:

1)  $\int \sin^3 x \cos^8 x dx$ ;      2)  $\int \sin^4 3x \cos^2 3x dx$ ;      3)  $\int \cos^5 x \sin x dx$ ;

4)  $\int \sqrt[5]{\sin^3 2x} \cos^3 2x dx$ ;    5)  $\int \frac{dx}{3\cos x - 4\sin x}$ ;

6)  $\int \frac{dx}{16\sin^2 x - 8\sin x \cos x}$ ;    7)  $\int \frac{dx}{2 - 5\sin x}$ ;    8)  $\int \frac{dx}{1 + 3\sin^2 x}$ ;

9)  $\int \cos \frac{x}{6} \cos \frac{5x}{6} dx$ ;    10)  $\int \operatorname{tg}^4 x dx$ .

## Тема 22. Интегрирование иррациональных функций

### Аудиторные задания

**22.1.** Найти неопределенные интегралы:

1)  $\int \frac{dx}{(x+5)\sqrt{3+x}}$ ;    2)  $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$ ;      3)  $\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x}+4)\sqrt{x}}$ ;

4)  $\int \frac{dx}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2})}$ ;    5)  $\int \frac{x^2 + \sqrt{1+x}}{x^3 \sqrt{1+x}} dx$ ;      6)  $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1} + \sqrt[3]{2x+1}}$ ;

7)  $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3}+5}$ ;      8)  $\int \frac{(1-\sqrt[6]{x})^3}{\sqrt[3]{x}} dx$ .

**22.2.** С помощью соответствующих подстановок найти неопределенные интегралы:

1)  $\int \frac{dx}{x^{11} \sqrt{1+x^4}}$ ;      2)  $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$ ;      3)  $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x} dx$ .

**22.3.** С помощью тригонометрических подстановок найти неопределенные интегралы:

$$1) \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}; \quad 2) \int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x} dx; \quad 3) \int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx;$$

$$4) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-4}}; \quad 5) \int x^3 \sqrt{1-x^2} dx; \quad 6) \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4} dx.$$

### Домашние задания

**22.4.** С помощью соответствующих подстановок найти неопределенные интегралы:

$$1) \int \frac{x+1}{x\sqrt{x+2}} dx; \quad 2) \int \frac{1-\sqrt{x+1}}{(1+\sqrt[3]{x+1})\sqrt{x+1}} dx; \quad 3) \int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})} dx;$$

$$4) \int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[3]{x})} dx; \quad 5) \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^6} dx; \quad 6) \int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}};$$

$$7) \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}}; \quad 8) \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx.$$

## Тема 23. Вычисление определенных интегралов

### Аудиторные задания

**23.1.** Вычислить определенные интегралы:

$$1) \int_2^9 \sqrt[3]{x-1} dx; \quad 2) \int_0^3 \frac{x^2 dx}{4+x^3}; \quad 3) \int_1^2 \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}} dx; \quad 4) \int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)};$$

$$5) \int_1^e \frac{\cos \ln x}{x} dx; \quad 6) \int_0^{\pi/4} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx; \quad 7) \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx;$$

$$8) \int_0^5 \frac{dx}{2x + \sqrt{3x+1}}; \quad 9) \int_4^9 \frac{y-1}{\sqrt{y}+2} dy; \quad 10) \int_0^9 \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}}; \quad 11) \int_1^e \ln x dx;$$

$$12) \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}; \quad 13) \int_0^\pi (2x+1)\cos x dx; \quad 14) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x};$$

$$15) \int_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin 2x dx; \quad 16) \int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x dx; \quad 17) \int_0^1 \arctg x dx;$$

$$18) \int_2^3 \frac{7x-15}{x^3 - 2x^2 + 5x} dx; \quad 19) \int_0^1 \frac{t^5+1}{16-t^4} dt; \quad 20) \int_0^2 \frac{2x-1}{2x+1} dx.$$

### Домашние задания

**23.2.** Вычислить определенные интегралы:

$$1) \int_0^{\pi/2} x \cos x dx; \quad 2) \int_1^e x \ln^2 x dx; \quad 3) \int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{1+x}}; \quad 4) \int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}};$$

$$5) \int_0^5 \frac{dx}{2+\sqrt{3x+1}}; \quad 6) \int_1^e \ln^3 x dx; \quad 7) \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x dx}{\sin^2 x};$$

$$8) \int_{-2}^2 \frac{3x^7 - 2x^5 + x^3 - x}{x^4 + 3x^2 + 1} dx; \quad 9) \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}; \quad 10) \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}.$$

## Тема 24. Приложения определенных интегралов

### Аудиторные задания

**24.1.** Найти площади криволинейных фигур, ограниченных линиями:

$$1) \quad y = \ln x, \quad x = e, \quad x = e^3, \quad y = 0; \quad 2) \quad y = x^2 + 2x, \quad y = x + 2;$$

3)  $y^2 = x^3, \quad y = 1, \quad x = 0;$

4)  $y = x^2 - 64x, \quad y = 0;$

5)  $y^2 = 2px, \quad x^2 = 2py;$

6)  $x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t;$

7)  $x = 2 \cos t, \quad y = 2 \sin t;$

8)  $r = a\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi;$

9)  $r = a \cos \varphi;$

10)  $x^3 + y^3 - 3axy = 0.$

**24.2.** Найти длину дуги кривой:

1)  $y^2 = x^3, \quad x = 5;$

2)  $y = \ln x, \quad \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8};$

3)  $y = \ln \cos x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4};$

4)  $x = R \cos t, \quad y = R \sin t;$

5)  $x = a(2 \cos t - \cos 2t), \quad y = a(2 \sin t - \sin 2t);$

6)  $x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t$  (астроида); 7)  $r = a(1 + \cos \varphi)$  (кардиоида);

8)  $r = ae^\varphi$  в круге радиуса  $r = a;$  9)  $x = t^2, \quad y = t - \frac{1}{3}t^3, \quad 0 \leq t \leq 1.$

**24.3.** Найти объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной заданными кривыми, около указанной оси:

1)  $y^2 = 4x, \quad x = 1, \quad Ox;$  2)  $y = e^x, \quad x = 0, \quad x = 1, \quad y = x, \quad Ox;$

3)  $y = x^2, \quad y^2 = x, \quad Oy;$  4)  $y = 2x - x^2, \quad y = 0, \quad Oy;$

5)  $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad Oy.$

### Домашние задания

**24.4.** Найти площади криволинейных фигур, ограниченных линиями:

$$1) y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = 0, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right];$$

$$2) y = (x^2 + 2)e^{-x}, \quad y = 0;$$

$$3) x = 3t^2, \quad y = 3t - t^3; \quad 4) x = t^2 - 1, \quad y = t^3 - 1; \quad 5) r = a \sin 2\varphi.$$

**24.5.** Найти длину дуги кривой:

$$1) y = \ln(1 - x^2), \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right];$$

$$2) x = R(\cos t + t \sin t), \quad y = R(\sin t - t \cos t), \quad t \in [0, \pi];$$

$$3) r = \frac{1}{\varphi}, \quad \varphi \in \left[\frac{3}{4}, \frac{4}{3}\right].$$

**24.6.** Найти объем тела вращения:

$$1) x^2 - y^2 = a^2, \quad x = a + h \quad (h > 0), \quad O x;$$

$$2) y = \arcsin x, \quad x \in [0, 1], \quad O x; \quad 3) x = a \cos t, \quad y = a \sin 2t, \quad O x.$$

## Тема 25. Несобственные интегралы

### Аудиторные задания

**25.1.** Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$1) \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}; \quad 2) \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}; \quad 3) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{4+x}}; \quad 4) \int_0^{+\infty} x \cos x dx;$$

$$5) \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx; \quad 6) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 6x + 11}; \quad 7) \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^2}; \quad 8)$$

$$\int_{-2}^0 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}};$$

$$9) \int_0^{\pi/2} \frac{2x+1}{\sin^2 x} dx; \quad 10) \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}; \quad 11) \int_0^{2/\pi} \frac{\cos 1/x}{x^2} dx; \quad 12) \int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

**25.2.** Исследовать на сходимость интегралы:

$$1) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{5x^2 + 4x + 3}; \quad 2) \int_1^{+\infty} \frac{4 + \sin x}{\sqrt[3]{x}} dx; \quad 3) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} + \sin^2 x};$$

$$4) \int_0^3 \frac{\cos 1/x}{\sqrt[3]{x}} dx; \quad 5) \int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{tg} x - x}; \quad 6) \int_0^{\pi/2} \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}} dx.$$

### Домашние задания

**25.3.** Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$1) \int_1^{+\infty} \frac{x dx}{x^2 + 1}; \quad 2) \int_1^{+\infty} \frac{\arctg x}{1 + x^2} dx; \quad 3) \int_1^{+\infty} \frac{x dx}{(1+x)^2}; \quad 4) \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}};$$

$$5) \int_0^1 x \ln x dx; \quad 6) \int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}; \quad 7) \int_{-1}^0 \frac{e^{-1/x}}{x^2} dx.$$

**Образец решения типового варианта по теме:**  
**«Дифференциальное исчисление функций**  
**одной переменной»**

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя:

1)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - x - 28}{x^2 - 16}.$

**Решение.** Так как  $\lim_{x \rightarrow 4} (2x^2 - x - 28) = 0$  и  $\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 16) = 0$ , то имеем неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ . Разложим числитель и знаменатель дроби на линейные множители. Так как  $2x^2 - x - 28 = 0$  при  $x_1 = 4$  и  $x_2 = -\frac{7}{2}$ , то  $2x^2 - x - 28 = 2(x - 4)(x + \frac{7}{2})$ ;  $x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$ .

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - x - 28}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(x - 4)(x + \frac{7}{2})}{(x - 4)(x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(x + \frac{7}{2})}{x + 4} = \frac{2 \cdot 4 + 7}{4 + 4} = \frac{15}{8}.$$

2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x^2 + 3x + 1}{x^3 + x - 3}.$

**Решение.** Так как при  $x \rightarrow \infty$  числитель и знаменатель дроби, стоящей под знаком предела, стремятся к бесконечности, то имеем неопределенность вида  $\frac{\infty}{\infty}$ . Для раскрытия таких неопределенностей делим числитель и знаменатель дроби на старшую степень  $x$ . После деления на  $x^3$  получаем:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x^2 + 3x + 1}{x^3 + x - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{6x^2}{x^3} + \frac{3x}{x^3} + \frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} + \frac{x}{x^3} - \frac{3}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{6}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{0 + 0 + 0}{1 + 0 - 0} = 0.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x \sin 3x}.$$

**Решение.** Воспользуемся эквивалентными бесконечно малыми функциями. Так как при  $x \rightarrow 0$

$$1 - \cos 5x = 2 \sin^2 \frac{5x}{2} \sim 2 \left( \frac{5x}{2} \right)^2 = 25 \frac{x^2}{2} \text{ и } \sin 3x \sim 3x,$$

$$\text{то } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x \sin 3x} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{25 \frac{x^2}{2}}{x \cdot 3x} = \frac{25}{6}.$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-3}{x+1} \right)^{x-2}.$$

**Решение.** Для раскрытия неопределенности вида  $1^\infty$  воспользуемся вторым замечательным пределом, предварительно преобразовав выражение в скобках:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-3}{x+1} \right)^{x-2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{(x+1)-4}{x+1} \right)^{x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{4}{x+1} \right)^{x-2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left( 1 - \frac{4}{x+1} \right)^{\frac{x+1}{4}} \right)^{-\frac{4}{x+1}(x-2)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4(x-2)}{x+1}} = e^{-4} \end{aligned}$$

2. Исследовать функции на непрерывность и указать вид точек разрыва; в условии 2) дополнительно построить график функции:

$$1) f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x^3}.$$

**Решение.** Функция  $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x^3}$  определена для всех  $x \in \mathbb{R}$ , кроме  $x=0$ . Определим характер точки разрыва. Найдем  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^3} = \left(\frac{0}{0}\right)$ . Применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(1+x^2))'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{(1+x^2)3x^2} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1+x^2)x} = \infty,$$

Это означает, что заданная функция в точке  $x=0$  имеет разрыв 2-го рода.

$$2) f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{при } x \leq 1; \\ 2x & \text{при } 1 < x \leq 3; \\ x + 2 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

**Решение.** Заданная функция  $f(x)$  определена и непрерывна на интервалах  $(-\infty, 1)$ ,  $(1, 3)$ ,  $(3, +\infty)$ , где она задана непрерывными элементарными функциями. Следовательно, разрыв возможен только в точках  $x_1=1$  и  $x_2=3$ .

Для точки  $x_1=1$  имеем:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (x^2 + 1) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} 2x = 2.$$

Кроме того,  $f(1) = x^2 + 1|_{x=1} = 2$ . Это означает, что функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_1=1$ .

Для точки  $x_2=3$  имеем:

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} 2x = 6, \quad \lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+0} (x+2) = 5, \quad f(3) = 2x|_{x=3} = 6.$$

Так как односторонние пределы конечны, но  $\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3+0} f(x)$ , то  $x_2 = 3$  – точка разрыва 1-го рода.

График функции  $f(x)$  представлен на рис. 1:

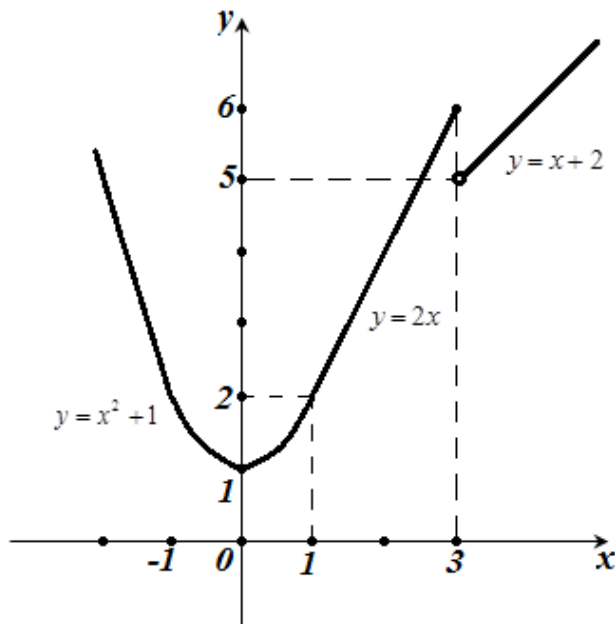


Рис. 1. График функции  $f(x)$

3. Найти производные функций:

1)  $y = \sqrt{x} \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \ln \sqrt{1+x}$ ;

**Решение.**

$$\begin{aligned} y' &= (\sqrt{x} \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \ln \sqrt{1+x})' = (\sqrt{x})' \operatorname{arctg} \sqrt{x} + \sqrt{x} (\operatorname{arctg} \sqrt{x})' - \\ &\quad - \left( \frac{1}{2} \ln(1+x) \right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{arctg} \sqrt{x} + \sqrt{x} \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \frac{1}{1+x} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{arctg} \sqrt{x} + \frac{1}{2} \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} \frac{1}{1+x} = \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

$$2) y = (\cos 5x)^{x^3}.$$

**Решение.** Логарифмируя данную функцию, получим:  
 $\ln y = x^3 \ln(\cos 5x)$ . Дифференцируем обе части этого равенства, нахо-  
 дим:  $\frac{y'}{y} = 3x^2 \ln(\cos 5x) + x^3 \frac{1}{\cos 5x} (-\sin 5x) 5$ , откуда выражаем  $y'$ :

$$y' = y(3x^2 \ln(\cos 5x) + x^3 \frac{1}{\cos 5x} (-\sin 5x) 5) = \\ (\cos 5x)^{x^3} (3x^2 \ln(\cos 5x) - 5x^3 \operatorname{tg} 5x).$$

$$3) x \cos y + y^2 = xy.$$

**Решение.** Дифференцируем обе части уравнения по  $x$   
 $\cos y + x(-\sin y)y' + 2y \cdot y' = y + xy'$  и выражаем  $y'$ :

$$y'(-x \sin y + 2y - x) = y - \cos y \Rightarrow y' = \frac{y - \cos y}{2y - x \sin y - x}.$$

4. Найти дифференциал второго порядка от функции:

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 4}).$$

**Решение.** Последовательно находим первую и вторую производные функции:

$$y' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 4}} \left( 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 4}} \right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 4}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 4} + x}{\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}},$$

$$y'' = \left( (x^2 + 4)^{-1/2} \right)' = -\frac{1}{2} (x^2 + 4)^{-3/2} \cdot 2x = -\frac{x}{\sqrt{(x^2 + 4)^3}}.$$

Дифференциал второго порядка находим по формуле

$$d^2 y = y'' dx^2 = -\frac{x}{\sqrt{(x^2 + 4)^3}} dx^2.$$

5. Найти производные первого и второго порядков от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \arccos t, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$$

**Решение.** Находим производные:

$$x'_t = (\arccos t)' = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \quad y'_t = (\sqrt{1-t^2})' = \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}.$$

$$\text{Тогда } y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = t, \quad (y'_x)'_t = 1, \quad y''_{x^2} = \left(\frac{y'_x}{x'_t}\right)'_t = -\sqrt{1-t^2}.$$

6. Пользуясь правилом Лопиталя, найти пределы функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}.$$

$$\text{Решение. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x} - 2x)'}{(x - \sin x)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x + e^{-x} - 2)'}{(1 - \cos x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x})'}{(\sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \ln(1-x) \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}.$$

**Решение.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \ln(1-x) \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2} &= (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1-x)}{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln(1-x))'}{\left( \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \right)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{1-x}(-1)}{\frac{\cos^2 \frac{\pi x}{2}}{1-x}} = -\frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos^2 \frac{\pi x}{2}}{1-x} = \left( \frac{0}{0} \right) = -\frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\left( \cos^2 \frac{\pi x}{2} \right)'}{(1-x)'} = \\ &= -\frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \cos \frac{\pi x}{2} \cdot \left( -\sin \frac{\pi x}{2} \right) \cdot \frac{\pi}{2}}{-1} = -2 \lim_{x \rightarrow 1} \cos \frac{\pi x}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \sin \frac{\pi x}{2} = 0. \end{aligned}$$

7. Написать формулу Тейлора третьего порядка с остаточным членом в форме Лагранжа для заданной функции в точке  $x_0$ .

$$y = xe^{x^2}, \quad x_0 = 1.$$

**Решение.** Формула Тейлора третьего порядка имеет вид

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + R_3(x),$$

где  $R_3(x) = \frac{(x-x_0)^4}{4!} f^{IV}(x_0 + \theta(x-x_0))$ ,  $0 < \theta < 1$  – остаток в форме Лагранжа.

Найдем значения производных заданной функции в точке  $x_0 = 1$ :

$$f(1) = xe^{x^2} \big|_{x=1} = e,$$

$$f'(1) = (xe^{x^2})' \big|_{x=1} = (e^{x^2} + 2x^2e^{x^2}) \big|_{x=1} = 3e,$$

$$f''(1) = (e^{x^2}(1+2x^2))' \big|_{x=1} = (2xe^{x^2}(1+2x^2) + 4xe^{x^2}) \big|_{x=1} = 2xe^{x^2}(2x^2+3) \big|_{x=1} = 10e,$$

$$f'''(1) = (2xe^{x^2}(2x^2+3))' \big|_{x=1} = 2e^{x^2}(4x^4+12x^2+3) \big|_{x=1} = 38e,$$

$$f^{IV}(x) = (2xe^{x^2}(4x^4+12x^2+3))' = 4xe^{x^2}(4x^4+20x^2+15).$$

Таким образом, формула Тейлора для заданной функции имеет вид

$$xe^{x^2} \approx e + 3e(x-1) + \frac{10e}{2!}(x-1)^2 + \frac{38e}{3!}(x-1)^3 + R_3(x),$$

где

$$R_3(x) = \frac{(x-1)^4}{4!} 4(1+\theta(x-1))e^{(1+\theta(x-1))^2} \left( 4(1+\theta(x-1))^4 + 20(1+\theta(x-1))^2 + 15 \right),$$

$$0 < \theta < 1.$$

**8.** Исследовать функцию и построить ее график  $y = \frac{x^2 + x - 5}{x - 2}$ .

**Решение.** Воспользуемся общей схемой исследования функции.

1) Найдём область определения функции. Так как при  $x = 2$  функция терпит разрыв, то область определения  $D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$ .

Найдем точки пересечения графика с осями координат. Если  $x = 0$ , то  $y = \frac{5}{2} = 2,5$ , то есть  $A(0; 2,5)$  – точка пересечения с осью  $Oy$ . Если

$y = 0$ , то  $x^2 + x - 5 = 0$  и  $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} \approx 1,8$ ,  $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} \approx -2,8$ , то есть  $B(-2,8; 0)$  и  $C(1,8; 0)$  – точки пересечения с осью  $Ox$ .

2) Исследуем функцию на чётность и нечётность. Так как область определения функции несимметрична относительно начала координат, то функция не является ни четной, ни нечётной.

3) Определим интервалы монотонности и точки экстремума функции. Находим первую производную:

$$y' = \frac{(2x+1)(x-2) - (x^2 + x - 5)}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}.$$

Критические точки функции найдём из следующих условий:  $y' = 0$ ,  $x^2 - 4x + 3 = 0$ ,  $x_1 = 1$  и  $x_2 = 3$ ,  $y'$  не существует при  $x_3 = 2$  (при этом  $x = 2 \notin D(y)$ ). Исследуем знак  $y'$  при переходе через критические точки

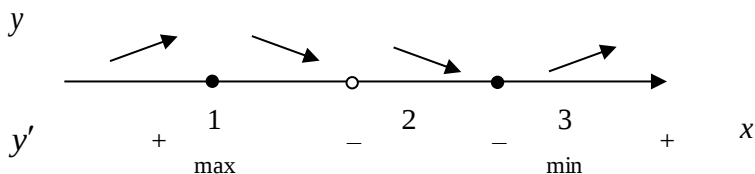


Рис. 2. Знак  $y'$  при переходе через критические точки

Таким образом, на интервалах  $(-\infty; 1)$  и  $(3; +\infty)$  функция возрастает, а на интервалах  $(1; 2)$  и  $(2; 3)$  функция убывает.

$$y_{\max}(1) = \frac{1+1-5}{1-2} = 3, \quad y_{\min}(3) = \frac{3^2+3-5}{3-2} = 7.$$

Следовательно,  $D(1; 3)$  – точка максимума, а  $E(3; 7)$  – точка минимума функции.

4) Определим интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба графика функции. Для этого найдем вторую производную:

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(2x-4)(x-2)^2 - 2(x-2)(x^2 - 4x + 3)}{(x-2)^4} = \\ &= \frac{(2x-4)(x-2) - 2(x^2 - 4x + 3)}{(x-2)^3} = \frac{2}{(x-2)^3}. \end{aligned}$$

Заметим, что  $y'' \neq 0$  ни при каком значении  $x$ . Однако, при  $x = 2$   $y''$  не существует. Поэтому исследуем знак  $y''$  при переходе через точку  $x = 2$ :

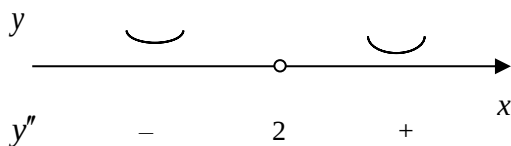


Рис. 3. Знак  $y''$  при переходе через точку  $x = 2$

Видим, что на интервале  $(-\infty; 2)$  кривая выпукла, на интервале  $(2; +\infty)$  кривая вогнута. Но, так как  $x = 2 \notin D(y)$ , то точек перегиба нет.

5) При  $x \neq 2$  функция непрерывна. Так как  $\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^2 + x - 5}{x - 2} = -\infty$ ,

а  $\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^2 + x - 5}{x - 2} = +\infty$ , то  $x = 2$  – вертикальная асимптота.

Уравнения наклонных асимптот ищем в виде  $y = kx + b$ , где

$$y = kx + b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 5}{x(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 5}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + x - 5}{x - 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 5}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{5}{x}}{1 - \frac{2}{x}} = 3.$$

Следовательно,  $y = x + 3$  – наклонная асимптота.

6) Строим график функции

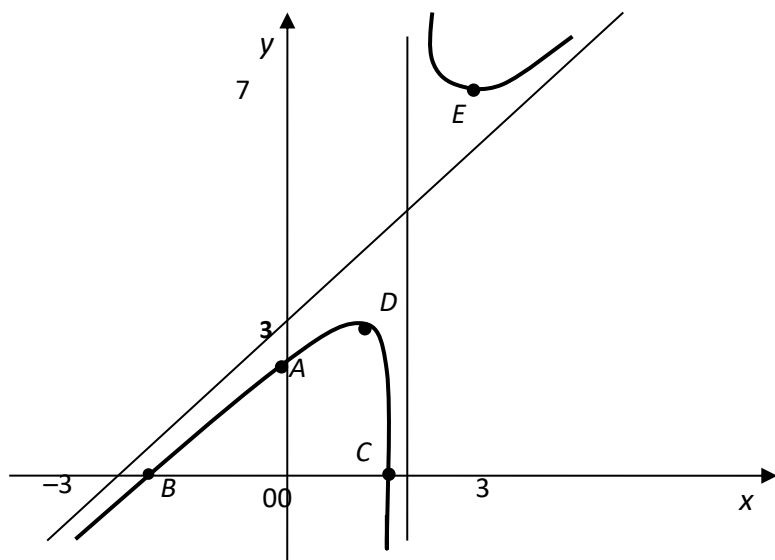


Рис. 4. График функции

# Индивидуальные задания по теме: «Дифференциальное исчисление функций одной переменной»

## Вариант 1

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталья:

$$1) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 + 7x + 12}; 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 2x + 1}{3x^3 + 3x^2 - 2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x-3} \right)^{x+2}.$$

2. Исследовать функции на непрерывность и указать вид точек разрыва; в условии 2) дополнительно построить график функции:

$$1) f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^2}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{при } -\infty < x \leq 1; \\ \frac{2}{x} & \text{при } 1 < x < 4; \\ x - 3 & \text{при } x \geq 4. \end{cases}.$$

3. Найти производные функций:

$$1) y = \sqrt{x} \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{1-x}; \quad 2) y = x^{\arcsin x};$$

$$3) x^4 - 6x^2y^2 - 9y^4 - 5x^2 - 15y^2 - 100 = 0.$$

4. Найти дифференциал второго порядка от функции:

$$y = \cos^2 x.$$

5. Найти производные первого и второго порядков от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = t^2 + 2, \\ y = \frac{1}{3}t^3 - 1. \end{cases}$$

6. Пользуясь правилом Лопиталья, найти пределы функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{2x+1} + 1}{\sqrt{x+2} + x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}.$$

7. Написать формулу Тейлора третьего порядка с остаточным членом в форме Лагранжа для заданной функции в точке  $x_0$ :

$$y = xe^{2x}, \quad x_0 = -1.$$

8. Исследовать функцию и построить ее график  $y = \frac{1-x^2}{x^2}$ .

### Вариант 2

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x - 6}{x^2 - 3x + 2}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 - 2x^3 + 1}{5x^3 + 4x^2 + 3};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos x}{x^2}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 4x)^{\frac{1-x}{x}}.$$

2. Исследовать функции на непрерывность и указать вид точек разрыва; в условии 2) дополнительно построить график функции:

$$1) f(x) = \arctg \frac{1}{x}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } -\infty < x \leq 0; \\ \sin x & \text{при } 1 < x < \frac{\pi}{6}; \\ \frac{1}{2} & \text{при } x \geq \frac{\pi}{6}. \end{cases}$$

3. Найти производные функций:

$$1) y = \operatorname{Intg} \frac{2x+1}{4}; \quad 2) y = x^{\frac{1}{\ln x}}; \quad 3) x^y - y^x = 0.$$

4. Найти дифференциал второго порядка от функций:

$$y = \arctg x^3.$$

5. Найти производные первого и второго порядков от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$$

6. Пользуясь правилом Лопиталя, найти пределы функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \alpha x}{1 - \cos \beta x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} x \left( e^{\frac{1}{x}} - 1 \right).$$

7. Написать формулу Тейлора третьего порядка с остаточным членом в форме Лагранжа для заданной функции в точке  $x_0$  :

$$y = \frac{a}{2} \left( e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right), \quad x_0 = 0.$$

8. Исследовать функцию и построить ее график  $y = \frac{x}{(1+x)^3}$ .

### Вариант 3

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя:

$$1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2 + x - 4}{3x^2 + 5x + 2}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^4 + 4x - 12}{3x^6 - 4x^2 + 1};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^2 x}{x^2}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+4}{3x+2} \right)^{x+2}.$$

2. Исследовать функции на непрерывность и указать вид точек разрыва; в условии 2) дополнительно построить график функции:

$$1) f(x) = 3^{\frac{1}{x-2}}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ x-1 & \text{при } 1 < x \leq 3; \\ x^2-3 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

3. Найти производные функций:

$$1) y = \ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}; \quad 2) y = x^x; \quad 3) e^x + e^y - 2^{xy} - 3 = 0.$$

4. Найти дифференциал второго порядка от функций:

$$y = \log_2 \sqrt[3]{1-x^4}.$$

5. Найти производные первого и второго порядков от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = at^2, \\ y = bt^3. \end{cases}$$

6. Пользуясь правилом Лопиталя, найти пределы функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} (\pi - 2 \operatorname{arctg} x) \ln x.$$

7. Написать формулу Тейлора третьего порядка с остаточным членом в форме Лагранжа для заданной функции в точке  $x_0$  :

$$y = e^x, \quad x_0 = -1.$$

8. Исследовать функцию и построить ее график

$$y = \frac{4x^2 + 1}{x}.$$

### Вариант 4

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 5x - 7}{3x^2 - x - 2}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + x^2 - 6}{2x^4 - x - 12};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \operatorname{tg} x}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x-2} \right)^x.$$

2. Исследовать функции на непрерывность и указать вид точек разрыва; в условии 2) дополнительно построить график функции:

$$1) f(x) = \frac{1}{1 - e^{1-x}}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x & \text{при } 0 < x \leq \frac{\pi}{4}; \\ \frac{2\pi}{x} & \text{при } \frac{\pi}{4} < x < \pi; \\ \sin x + 2 & \text{при } x \geq \pi. \end{cases}$$

3. Найти производные функций:

$$1) y = \ln(3x^2 + \sqrt{9x^4 + 1}); \quad 2) y = x^{\ln x};$$

$$3) \sin(y - x^2) - \ln(y - x)^2 + 2\sqrt{y - x^2} - 3 = 0.$$

4. Найти дифференциал второго порядка от функций:

$$y = e^{-x^2}.$$

5. Найти производные первого и второго порядков от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$$

6. Пользуясь правилом Лопиталья, найти пределы функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \sin x}{x^3}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}{\ln(1+x)}.$$

7. Написать формулу Тейлора третьего порядка с остаточным членом в форме Лагранжа для заданной функции в точке  $x_0$ :

$$y = 4^x, \quad x_0 = 0.$$

8. Исследовать функцию и построить ее график  $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ .

### Вариант 5

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталья:

$$1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{3x^2 + 4x + 1}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 8x + 1}{7x^5 + 4x^2 + 5};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x^2}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 2} \right)^x.$$

2. Исследовать функции на непрерывность и указать вид точек разрыва; в условии 2) дополнительно построить график функции:

$$1) f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^x + 1}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{при } -\infty < x \leq 1; \\ 3^x & \text{при } 0 < x \leq 2; \\ 6-x & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

3. Найти производные функций:

$$1) y = \arcsin \frac{2x^3}{1+x^6}; \quad 2) y = x^{\sin x}; \quad 3) \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} - 3\sqrt[3]{\frac{y}{x}} = 0.$$

4. Найти дифференциал второго порядка от функций:

$$y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

5. Найти производные первого и второго порядков от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

6. Пользуясь правилом Лопиталья, найти пределы функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{-2ax}}{\ln(1+x)}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\ln(x-1)}{\operatorname{ctg} \pi x}.$$

7. Написать формулу Тейлора третьего порядка с остаточным членом в форме Лагранжа для заданной функции в точке  $x_0$ :

$$y = \sqrt{x}, x_0 = 4.$$

8. Исследовать функцию и построить ее график  $y = \frac{x^3}{2(1+x)^2}.$

### Вариант 6

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталья:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x - 10}{x^2 - x - 2}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 6x - 5}{5x^2 - x - 1};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{x}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2}.$$

2. Исследовать функции на непрерывность и указать вид точек разрыва; в условии 2) дополнительно построить график функции:

$$1) f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ x^2 + 2 & \text{при } 1 < x \leq 2; \\ \frac{2}{x} + 4 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

3. Найти производные функций:

$$1) y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}; \quad 2) y = (\sin x)^{\cos x};$$

$$3) x^2 \sin y + y^3 \cos x - 2x - 3y + 1 = 0.$$

4. Найти дифференциал второго порядка от функций:

$$y = -\frac{22x}{x+5}.$$

5. Найти производные первого и второго порядков от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = a \cos^2 t, \\ y = a \sin^2 t \end{cases}.$$

6. Пользуясь правилом Лопиталя, найти пределы функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \arcsin x \cdot \operatorname{ctg} x.$$

7. Написать формулу Тейлора третьего порядка с остаточным членом в форме Лагранжа для заданной функции в точке  $x_0$ :

$$y = x^{10} - 3x^6 + x^2 + 2, \quad x_0 = 1.$$

8. Исследовать функцию и построить ее график  $y = \frac{x^3 + 2}{2x}$ .

### Вариант 7

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\frac{x}{2} - 1}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^3 - (x-1)^3}{(x+1)^2 + (x+1)^2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{1 - \cos 4x}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-2}{3x+2} \right)^{2x}.$$

2. Исследовать функции на непрерывность и указать вид точек разрыва; в условии 2) дополнительно построить график функции:

$$1) f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - x^3}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{при } -\infty < x \leq 1; \\ \frac{2}{x} & \text{при } 1 < x \leq 4; \\ x - 2 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

3. Найти производные функций:

$$1) y = \arcsin \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}; \quad 2) y = (x+1)^x; \quad 3) \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

4. Найти дифференциал второго порядка от функций:

$$y = \frac{1}{4}x^2(2\ln x - 3).$$

5. Найти производные первого и второго порядков от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^2 - 1. \end{cases}$$

6. Пользуясь правилом Лопиталя, найти пределы функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} \quad (\alpha > 0).$$

7. Написать формулу Тейлора третьего порядка с остаточным членом в форме Лагранжа для заданной функции в точке  $x_0$ :

$$y = \frac{1}{x+8}, \quad x_0 = 0.$$

8. Исследовать функцию и построить ее график  $y = \frac{4x}{4+x^2}$ .

### Вариант 8

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя:

$$1) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{x^2 + x - 20}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 3x^2 + 1}{4x^6 + 6x^3 - 3};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{ctg} 2x}{\sin 2x}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{1/x}.$$

2. Исследовать функции на непрерывность и указать вид точек разрыва; в условии 2) дополнительно построить график функции:

$$1) f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{при } -\infty < x \leq 3; \\ 3x-7 & \text{при } 3 < x < 4; \\ 3+\sqrt{x} & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

3. Найти производные функций:

$$1) y = \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}; \quad 2) y = x^2 e^{x^2} \sin 2x; \quad 3) x^4 + y^4 = x^2 y^2.$$

4. Найти дифференциал второго порядка от функций:

$$y = \frac{1}{3}x^2 \cdot \sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{1-x^2} + x \arcsin x.$$

5. Найти производные первого и второго порядков от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln(1-t^2). \end{cases}$$

6. Пользуясь правилом Лопиталя, найти пределы функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{\sin x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{100}}{e^x}.$$

7. Написать формулу Тейлора третьего порядка с остаточным членом в форме Лагранжа для заданной функции в точке  $x_0$ :

$$y = x \cos x, \quad x_0 = 0.$$

8. Исследовать функцию и построить ее график  $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ .

### Вариант 9

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя:

$$1) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 7x + 10}{2x^2 + 9x + 10}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 5x^2 - 3}{4x^6 + 6x^3 - 3};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{1 - \cos 2x}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-1}{2x+1} \right)^x.$$

2. Исследовать функции на непрерывность и указать вид точек разрыва; в условии 2) дополнительно построить график функции:

$$1) f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{при } x \leq 0; \\ 1-x & \text{при } 0 < x \leq 3; \\ x^2 - 5 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

3. Найти производные функций:

$$1) y = e^x - \sin e^x \cos^3 e^x - \sin^3 e^x \cos e^x; \quad 2) y = x^2 e^{x^2} \ln x;$$

$$3) \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}.$$

4. Найти дифференциал второго порядка от функций:

$$y = -\frac{1}{9}x \cdot \sin 3x - \frac{2}{27} \cos 3x.$$

5. Найти производные первого и второго порядков от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = at \cdot \cos t, \\ y = at \cdot \sin t. \end{cases}$$

6. Пользуясь правилом Лопиталя, найти пределы функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{\sin \frac{1}{x}}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}.$$

7. Написать формулу Тейлора третьего порядка с остаточным членом в форме Лагранжа для заданной функции в точке  $x_0$ :

$$y = \frac{x}{x-1}, \quad x_0 = 2.$$

8. Исследовать функцию и построить ее график  $y = \frac{x^2}{x-1}$ .

### Вариант 10

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 - x - 1}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + 5x^2 - 4x^5}{8 - 6x - x^5};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 \frac{x}{3}}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{x-2} \right)^{2x-1}.$$

2. Исследовать функции на непрерывность и указать вид точек разрыва; в условии 2) дополнительно построить график функции:

$$1) f(x) = \frac{\sin(x-3)}{x^2 - 4x + 3}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ \operatorname{tg} x & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}; \\ \frac{4}{\pi} x & \text{при } x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

3. Найти производные функций:

$$1) y = \operatorname{arctg}(x+1) + \frac{x+1}{x^2 + 2x + 2}; \quad 2) y = (x+1)^{2/x}; \quad 3) 2y \ln y = x.$$

4. Найти дифференциал второго порядка от функций:

$$y = \sin^2 x.$$

5. Найти производные первого и второго порядков от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \arccos \sqrt{t}, \\ y = \sqrt{t - t^2}. \end{cases}$$

6. Пользуясь правилом Лопиталя, найти пределы функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{\operatorname{tg} x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow -1} (1+x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}.$$

7. Написать формулу Тейлора третьего порядка с остаточным членом в форме Лагранжа для заданной функции в точке  $x_0$ :

$$y = e^{\sin x}, \quad x_0 = 0.$$

8. Исследовать функцию и построить ее график  $y = \frac{4x^3 + 5}{x}$ .

### Вариант 11

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - x - 10}{x^3 - x - 6}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^5 - 2x^4 + 3}{2x^6 + 3x^2 - 1};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{1 - \sqrt{1 - x^2}}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{2x} - 1}{x}.$$

2. Исследовать функции на непрерывность и указать вид точек разрыва; в условии 2) дополнительно построить график функции:

$$1) f(x) = \frac{2}{4 - x^2}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} 3 & \text{при } x \leq 0; \\ x & \text{при } 0 < x < \pi; \\ \sin x & \text{при } x > \pi. \end{cases}$$

3. Найти производные функций:

$$1) y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \cos x + \frac{1}{3} \cos^2 x; \quad 2) y = (\ln x)^x;$$

$$3) e^x \sin y - e^y \cos x = 0.$$

4. Найти дифференциал второго порядка от функций:

$$y = \operatorname{tg} x.$$

5. Найти производные первого и второго порядков от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\cos t}, \\ y = \operatorname{tg} t. \end{cases}$$

6. Пользуясь правилом Лопиталя, найти пределы функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{1/x^3}.$$

7. Написать формулу Тейлора третьего порядка с остаточным членом в форме Лагранжа для заданной функции в точке  $x_0$ :

$$y = \frac{1}{2} \left( e^x + e^{-x} \right), \quad x_0 = 0.$$

8. Исследовать функцию и построить ее график  $y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$ .

### Вариант 12

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталья:

$$1) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{20 + x - x^2}{3x^2 - 11x - 20}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{3x^3 + x - 5};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos 8x}{2x \operatorname{tg} 4x}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}.$$

2. Исследовать функции на непрерывность и указать вид точек разрыва; в условии 2) дополнительно построить график функции:

$$1) f(x) = e^{\frac{1}{4x-2}}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } x \leq 1 \\ x & \text{при } 1 < x \leq 2; \\ x-2 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

3. Найти производные функций:

$$1) y = \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}; \quad 2) y = \frac{(x-2^2 \cdot \sqrt[3]{x+1})}{(x-5)^3}; \quad 3) xy = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}.$$

4. Найти дифференциал второго порядка от функций:

$$y = \sqrt{1+x^2}.$$

5. Найти производные первого и второго порядков от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln(1+t^2). \end{cases}$$

6. Пользуясь правилом Лопиталья, найти пределы функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(3^{\frac{1}{x}} - 1\right)x.$$

7. Написать формулу Тейлора третьего порядка с остаточным членом в форме Лагранжа для заданной функции в точке  $x_0$ :

$$y = \ln(1 + \sin x), \quad x_0 = 0.$$

8. Исследовать функцию и построить ее график  $y = \frac{2-4x^2}{1-4x^2}$ .

### Вариант 13

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя:

$$1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x^2 - 5x - 21}{2x^2 - 3x - 9}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{11x^5 - 5x^2 - 1}{24x^4 - 4x + 7};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin x \operatorname{ctg} 3x; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}.$$

2. Исследовать функции на непрерывность и указать вид точек разрыва; в условии 2) дополнительно построить график функции:

$$1) f(x) = \frac{|x-1|}{x-1}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} e^x & \text{при } x \leq 0; \\ 1+x & \text{при } 0 < x < 1; \\ x & \text{при } x \geq 1. \end{cases}$$

3. Найти производные функций:

$$1) y = \ln \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x+1}; \quad 2) y = \frac{(x+1)^3 \cdot \sqrt[4]{4-2x}}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}; \quad 3) x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

4. Найти дифференциал второго порядка от функций:

$$y = (x^2 - 3x + 2)^3.$$

5. Найти производные первого и второго порядков от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t. \end{cases}$$

6. Пользуясь правилом Лопиталя, найти пределы функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x^2 - 3)}{x^2 + 3x - 10}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^5}.$$

7. Написать формулу Тейлора третьего порядка с остаточным членом в форме Лагранжа для заданной функции в точке  $x_0$ :

$$y = \ln(5 - 4x), \quad x_0 = 0.$$

8. Исследовать функцию и построить ее график

$$y = \frac{2 + x^3}{x^2}.$$

### Вариант 14

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 7x + 2}{2x^2 + 5x + 2}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^6 + 5x^5 - x^3 + 5}{3x^4 - 4x^3 + 1};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{3x \sin 2x}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{x}.$$

2. Исследовать функции на непрерывность и указать вид точек разрыва; в условии 2) дополнительно построить график функции:

$$1) f(x) = \frac{x+2}{x+4}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ 1 & \text{при } 0 < x < 1; \\ 2-x & \text{при } x \geq 1. \end{cases}$$

3. Найти производные функций:

$$1) y = \arccos(2e^{2x} - 1); \quad 2) y = \sqrt{x \sin x} \sqrt{1 - e^x}; \\ 3) \sin(xy) + \cos(xy) = 0.$$

4. Найти дифференциал второго порядка от функций:

$$y = x \cdot e^{x^2}.$$

5. Найти производные первого и второго порядков от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = R \sin t + \sin Rt, \\ y = R \cos t + \cos Rt. \end{cases}$$

6. Пользуясь правилом Лопиталя, найти пределы функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a^{\ln x} - 1}{\ln x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1000}}{2x^{100} + 1}.$$

7. Написать формулу Тейлора третьего порядка с остаточным членом в форме Лагранжа для заданной функции в точке  $x_0$ :

$$y = 3^x, \quad x_0 = 0.$$

8. Исследовать функцию и построить ее график  $y = \frac{x^4 + 1}{x^2}$ .

### Вариант 15

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталья:

$$1) \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 2x - 15}{2x^2 + 7x + 1}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - 3x - 5x^2}{1 + 4x + 2x^2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 2x}{x^3}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow \infty} (x + 2)(\ln(2x + 1) - \ln(2x - 1)).$$

2. Исследовать функции на непрерывность и указать вид точек разрыва; в условии 2) дополнительно построить график функции:

$$1) f(x) = 2^{-\frac{1}{x+3}}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \leq 1; \\ x^2 & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ x^2 + 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

3. Найти производные функций:

$$1) y = \arctg \frac{3x - x^2}{1 - 3x^2}; \quad 2) y = \sqrt{\frac{1 - \arcsin x}{1 + \arcsin x}}; \quad 3) 2x + 2^y = 2^{x+y}.$$

4. Найти дифференциал второго порядка от функций:

$$y = \frac{1}{1 + x^3}.$$

5. Найти производные первого и второго порядков от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = t^2 + 2t, \\ y = \ln(t + 1). \end{cases}$$

6. Пользуясь правилом Лопиталья, найти пределы функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{5x}}{\sin x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{1+x}}.$$

7. Написать формулу Тейлора третьего порядка с остаточным членом в форме Лагранжа для заданной функции в точке  $x_0$ :

$$y = \frac{1}{x}, x_0 = 1.$$

8. Исследовать функцию и построить ее график  $y = \frac{x^3}{1 - x^2}$ .

### Вариант 16

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталья:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 - 2x + 1}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + x - 3x^2}{1 - 3x + 6x^3};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow \infty} (2x - 3)(\ln(x - 2) - \ln(x - 1)).$$

2. Исследовать функции на непрерывность и указать вид точек разрыва; в условии 2) дополнительно построить график функции:

$$1) f(x) = \frac{x + 2}{x^2 + 3x}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ 1 & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ x & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

3. Найти производные функций:

$$1) y = \ln \operatorname{tg} \frac{e^{2 \sin x}}{4}; \quad 2) y = x^{1/x}; \quad 3) x - y = \arcsin x - \arcsin y.$$

4. Найти дифференциал второго порядка от функций:

$$y = (1 + x^2) \operatorname{arctg} x.$$

5. Найти производные первого и второго порядков от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = 1 + e^{at}, \\ y = at + e^{-at}. \end{cases}$$

6. Пользуясь правилом Лопиталья, найти пределы функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x - \frac{1}{2} \operatorname{tg} x}{1 + \cos 4x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 - x}.$$

7. Написать формулу Тейлора третьего порядка с остаточным членом в форме Лагранжа для заданной функции в точке  $x_0$ :

$$y = e^{5x-1}, \quad x_0 = 0.$$

8. Исследовать функцию и построить ее график  $y = \frac{4x^3}{1 - x^3}.$

### Вариант 17

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{3x^2 - 2x - 1}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x^2 - 5}{x^2 + x - 2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2x \operatorname{tg} 2x}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot (\ln(x + a) - \ln x).$$

2. Исследовать функции на непрерывность и указать вид точек разрыва; в условии 2) дополнительно построить график функции:

$$1) f(x) = \frac{3}{x^2 - 9}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{при } x \leq 0; \\ x^2 & \text{при } 0 < x < 1; \\ x - 1 & \text{при } x \geq 1. \end{cases}$$

3. Найти производные функций:

$$1) y = \frac{\arctg x}{2} - \ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}; \quad 2) y = \left( \frac{x}{1+x} \right)^x; \quad 3) x^2 + y^2 = r^2.$$

4. Найти дифференциал второго порядка от функций:

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

5. Найти производные первого и второго порядков от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \cos t + t \sin t, \\ y = \sin t - t \cos t. \end{cases}$$

6. Пользуясь правилом Лопиталя, найти пределы функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{3^x}.$$

7. Написать формулу Тейлора третьего порядка с остаточным членом в форме Лагранжа для заданной функции в точке  $x_0$ :

$$y = \frac{1}{x+2}, \quad x_0 = -3.$$

8. Исследовать функцию и построить ее график  $y = \frac{x^2}{1-x}$ .

### Вариант 18

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя:

$$1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 3x - 5}{2x^2 - x - 1};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{\cos x - 1};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} (x - 4)(\ln(2 - 3x) - \ln(5 - 3x)).$$

2. Исследовать функции на непрерывность и указать вид точек разрыва; в условии 2) дополнительно построить график функции:

$$1) f(x) = 4^{\frac{1}{4-x}};$$

$$2) f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{при } -\infty < x \leq 0; \\ 1 & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ 1 - x & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

3. Найти производные функций:

$$1) y = \sqrt{2x+1}(\ln(2x+1) - 2); \quad 2) y = 2x^{\sqrt{x}}; \quad 3) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}.$$

4. Найти дифференциал второго порядка от функций:

$$y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

5. Найти производные первого и второго порядков от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$$

6. Пользуясь правилом Лопиталя, найти пределы функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^3 - 4x^2 + 3};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{3}{2} \sin \frac{1}{x}}.$$

7. Написать формулу Тейлора третьего порядка с остаточным членом в форме Лагранжа для заданной функции в точке  $x_0$ :

$$y = \arcsin x, \quad x_0 = 0.$$

8. Исследовать функцию и построить ее график  $y = \frac{x^4}{1 - x^2}$ .

### Вариант 19

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталья:

$$1) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 9x - 5}{x^2 - 4x - 5}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x}{x^4 - 3x^2 + 1};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x - \sin 2x}{x \sin^2 2x}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow \infty} (2x - 5)(\ln(2x + 4) - \ln(2x + 1)).$$

2. Исследовать функции на непрерывность и указать вид точек разрыва; в условии 2) дополнительно построить график функции:

$$1) f(x) = \frac{x+2}{x^2 - 4x + 3}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ -2 & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ x-2 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

3. Найти производные функций:

$$1) y = \frac{1 + \ln \cos x}{\cos x}; \quad 2) y = (x^2 + 1)^{\sin x}; \quad 3) y^3 - 3y + 3ax = 0.$$

4. Найти дифференциал второго порядка от функций:

$$y = e^{\sqrt{x}}.$$

5. Найти производные первого и второго порядков от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t + t^3. \end{cases}$$

6. Пользуясь правилом Лопиталья, найти пределы функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - \cos \alpha x}{e^{\beta x} - \cos \beta x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1/10} \frac{\ln x}{x^{1/10}}.$$

7. Написать формулу Тейлора третьего порядка с остаточным членом в форме Лагранжа для заданной функции в точке  $x_0$ :

$$y = x^3 \ln x, \quad x_0 = 1.$$

8. Исследовать функцию и построить ее график  $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ .

### Вариант 20

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталья:

$$1) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{5x^2 + 9x - 44}{2x^2 + 5x - 12}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{5x^2 - x + 2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow \infty} (x + 2)(\ln(2x + 3) - \ln(2x - 4)).$$

2. Исследовать функции на непрерывность и указать вид точек разрыва; в условии 2) дополнительно построить график функции:

$$1) f(x) = \frac{\sin(2-x)}{2-x}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \leq 1; \\ x & \text{при } 1 < x \leq 2; \\ 1-x^2 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

3. Найти производные функций:

$$1) y = y^x \sqrt{1 - e^{2x}} - \arcsin e^x; \quad 2) y = \sqrt[3]{\frac{x(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2}}; \quad 3) \cos(xy) = x.$$

4. Найти дифференциал второго порядка от функций:

$$y = \sqrt{1 - x^2} \cdot \arcsin x.$$

5. Найти производные первого и второго порядков от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = e^{3t}. \end{cases}$$

6. Пользуясь правилом Лопиталья, найти пределы функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} \right)^{\lg x}.$$

7. Написать формулу Тейлора третьего порядка с остаточным членом в форме Лагранжа для заданной функции в точке  $x_0$ :

$$y = \ln x, \quad x_0 = 1.$$

8. Исследовать функцию и построить ее график  $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$ .

### Вариант 21

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя:

$$1) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 14x - 5}{x^2 - 2x - 15};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^3 + 3x^2}{2x^3 - 100x + 1};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 8x - 1}{1 - \cos 4x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}.$$

2. Исследовать функции на непрерывность и указать вид точек разрыва; в условии 2) дополнительно построить график функции:

$$1) f(x) = \frac{\operatorname{tg} x \cdot (x^2 - 9)}{x^2 - 3x}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{при } -\infty < x \leq 2; \\ x - 1 & \text{при } 0 < x < 3; \\ \sqrt{x} + 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

3. Найти производные функций:

$$1) y = \arccos \sqrt{1 - e^x}; \quad 2) y = (\sqrt{x})^{\sqrt[3]{x}}; \quad 3) y^2 \cos x = a^2 \sin 3x.$$

4. Найти дифференциал второго порядка от функций:

$$y = \arcsin(a \cdot \sin x).$$

5. Найти производные первого и второго порядков от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = 2 \cos^2 t, \\ y = 2 \sin^2 t. \end{cases}$$

6. Пользуясь правилом Лопиталя, найти пределы функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 3x - 1}{\sin^2 4x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^9}{3^x}.$$

7. Написать формулу Тейлора третьего порядка с остаточным членом в форме Лагранжа для заданной функции в точке  $x_0$ :

$$y = x^5 - 5x^3 + x, \quad x_0 = 2.$$

8. Исследовать функцию и построить ее график  $y = \frac{x^3 - 1}{x^2}$ .

## Вариант 22

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя:

$$1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 4x + 1}{x^2 + 3x + 2}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 4x^2 + 5}{3x^2 + x + 3};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos mx}{x^2}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x)^{1/x}.$$

2. Исследовать функции на непрерывность и указать вид точек разрыва; в условии 2) дополнительно построить график функции:

$$1) f(x) = 5^{\frac{1}{x-2}}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{при } -\infty < x \leq 0; \\ -x^2 + 9 & \text{при } 0 < x \leq 3; \\ x - 3 & \text{при } x > 3. \end{cases}.$$

3. Найти производные функций:

$$1) y = \log_2(\sin^2 x); \quad 2) y = (\ln x)^{1/x}; \quad 3) y^2 - 3y + 2x^2 = 0.$$

4. Найти дифференциал второго порядка от функции:

$$y = x \cdot \sqrt{1 + x^2}.$$

5. Найти производные первого и второго порядков от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = 1 + e^t, \\ y = t + e^{-t}. \end{cases}$$

6. Пользуясь правилом Лопиталя, найти пределы функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1}{\cos x - 1}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin \frac{a}{x}.$$

7. Написать формулу Тейлора третьего порядка с остаточным членом в форме Лагранжа для заданной функции в точке  $x_0$ :

$$y = \ln(x + 5), \quad x_0 = 0.$$

8. Исследовать функцию и построить ее график  $y = \frac{4x^3}{x^3 - 1}$ .

### Вариант 23

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталья:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2x^2 - 7}{9x^4 + 3x + 5};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{2x}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\operatorname{cosec} x}.$$

2. Исследовать функции на непрерывность и указать вид точек разрыва; в условии 2) дополнительно построить график функции:

$$1) f(x) = \frac{1 - \cos x}{2x^2 - x^3}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} x & \text{при } -\infty < x \leq 0; \\ -\sqrt{x} & \text{при } 0 < x \leq 4; \\ (x-4)^2 & \text{при } x > 4. \end{cases}.$$

3. Найти производные функций:

$$1) y = \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^4; \quad 2) y = (\sin x)^{\arcsin x}; \quad 3) e^y + xy = 1.$$

4. Найти дифференциал второго порядка от функции:

$$y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

5. Найти производные первого и второго порядков от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = 2 \sin t + \sin 4t, \\ y = 2 \cos t + \cos 2t. \end{cases}$$

6. Пользуясь правилом Лопиталья, найти пределы функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} + x - 1}{\sin 2x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)}{\arctg x}.$$

7. Написать формулу Тейлора третьего порядка с остаточным членом в форме Лагранжа для заданной функции в точке  $x_0$ :

$$y = \sin \frac{x}{3}, \quad x_0 = 0.$$

8. Исследовать функцию и построить ее график  $y = \frac{x^2 - 5}{x - 3}$ .

### Вариант 24

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталья:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - 3x + 2}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5x + 4}{5x^2 - 2x - 3};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \arcsin x - \operatorname{arctg} 2x}{x}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x^2-x}}.$$

2. Исследовать функции на непрерывность и указать вид точек разрыва; в условии 2) дополнительно построить график функции:

$$1) f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{при } -\infty < x \leq 0; \\ \operatorname{tg} x & \text{при } 0 < x \leq \frac{\pi}{4}; \\ 1 & \text{при } x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

3. Найти производные функций:

$$1) y = \ln(2x^3 + 3x^2); \quad 2) y = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}; \quad 3) x \sin y + y \sin x = 0.$$

4. Найти дифференциал второго порядка от функции:

$$y = \ln(x^2 + \sqrt{1 + x^4}).$$

5. Найти производные первого и второго порядков от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$$

6. Пользуясь правилом Лопиталья, найти пределы функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{x} \right); \quad 2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)^{\cos x}.$$

7. Написать формулу Тейлора третьего порядка с остаточным членом в форме Лагранжа для заданной функции в точке  $x_0$ :

$$y = xe^x, \quad x_0 = 0.$$

8. Исследовать функцию и построить ее график  $y = x^2 e^{-x}$ .

### Вариант 25

1. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 2x - 12}{x^2 - 3x + 2}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 - x^3 + 8}{100 - x^3};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 6x - \cos 3x}{x^2}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(x+5) - \ln x).$$

2. Исследовать функции на непрерывность и указать вид точек разрыва; в условии 2) дополнительно построить график функции:

$$1) f(x) = 3^{\frac{1}{1-x}}; \quad 2) f(x) = \begin{cases} -x & \text{при } -\infty < x \leq 0; \\ 1 - x^2 & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ \ln x & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

3. Найти производные функций:

$$1) y = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}; \quad 2) y = (\sqrt{x})^{\cos \sqrt{x}}; \quad 3) \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} - \sqrt[3]{\frac{y}{x}} = 0.$$

4. Найти дифференциал второго порядка от функции:

$$y = x \ln x.$$

5. Найти производные первого и второго порядков от функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = e^{2t} + 4, \\ y = e^{3t} - 5. \end{cases}$$

6. Пользуясь правилом Лопиталя, найти пределы функций:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{x^{3/2}}.$$

7. Написать формулу Тейлора третьего порядка с остаточным членом в форме Лагранжа для заданной функции в точке  $x_0$ :

$$y = \frac{1}{3-2x}, \quad x_0 = 0.$$

8. Исследовать функцию и построить ее график  $y = x\sqrt{1-x^2}$ .

**Образец решения типового варианта по теме:  
«Интегральное исчисление функций одной переменной»**

1. Найти неопределенные интегралы:

1)  $\int \frac{x - \operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx$ .

**Решение**

$$\begin{aligned} \int \frac{x - \operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx &= \int \frac{x}{1 + x^2} dx - \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(1 + x^2)}{1 + x^2} - \\ &- \int \operatorname{arctg} x \, d(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 x + c. \end{aligned}$$

2)  $\int (x^2 + 2x) \cos 2x dx$ .

**Решение**

Применим формулу интегрирования по частям

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 2x) \cos 2x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x^2 + 2x, \, du = (2x + 2) dx, \\ dv = \cos 2x \, dx, \, v = \int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{2} (x^2 + 2x) \sin 2x - \int (x + 1) \sin 2x \, dx = \left| \begin{array}{l} u = x + 1, \, du = dx, \\ dv = \sin 2x \, dx, \, v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{2} (x^2 + 2x) \sin 2x - \left( -(x + 1) \frac{1}{2} \cos 2x + \int \frac{1}{2} \cos 2x \, dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} (x^2 + 2x) \sin 2x + \frac{1}{2} (x + 1) \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x + c. \end{aligned}$$

3)  $\int \frac{3x - 2}{x^2 + 4x + 13} dx$ .

### Решение

$$\begin{aligned}\int \frac{3x-2}{x^2+4x+13} dx &= |(x^2+4x+13)' = 2x+4| = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+4) - 6 - 2}{x^2+4x+13} dx = \\&= \frac{3}{2} \int \frac{2x+4}{x^2+4x+13} dx - 8 \int \frac{dx}{(x^2+4x+4)+9} = \frac{3}{2} \int \frac{d(x^2+4x+13)}{x^2+4x+13} - \\&- 8 \int \frac{dx}{(x+2)^2+3^2} = \frac{3}{2} \ln|x^2+4x+13| - \frac{8}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{3} + c.\end{aligned}$$

$$4) \int \frac{x^5 - x^2 - 2}{x^2(x^2+1)} dx.$$

### Решение

Дробь  $\frac{x^5 - x^2 - 2}{x^2(x^2+1)}$  является неправильной. Выделим целую часть дроби:

$$\begin{array}{r|l} x^5 - x - 2 & x^4 + x^2 \\ -x^5 + x^3 & x \\ \hline -x^3 - x^2 - 2 & \end{array}$$

Следовательно,

$$\int \frac{x^5 - x^2 - 2}{x^2(x^2+1)} dx = \int \left( x - \frac{x^3 + x^2 + 2}{x^2(x^2+1)} \right) dx = \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^3 + x^2 + 2}{x^2(x^2+1)} dx.$$

Вычислим последний интеграл. Разложение подынтегральной функции на простейшие дроби имеет вид

$$\frac{x^3 + x^2 + 2}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю и приравнявая числители, получаем  $x^3 + x^2 + 2 = Ax(x^2+1) + D(x^2+1) + (Cx+D)x^2$ .

Применим метод неопределенных коэффициентов, то есть будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  :

$$x^3: 1 = A + C,$$

$$x^3: 1 = B + D,$$

$$x: 0 = A,$$

$$x^0: 2 = B,$$

откуда находим  $A=0$ ,  $B=2$ ,  $C=1$ ,  $D=-1$ . Значит,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 - x^2 - 2}{x^2(x^2 + 1)} dx &= \frac{x^2}{2} - \int \left( \frac{2}{x^2} + \frac{x-1}{x^2+1} \right) dx = \frac{x^2}{2} - 2 \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{x dx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1} = \\ &= \frac{x^2}{2} - 2 \left( -\frac{1}{x} \right) - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + \arctg x = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{x} - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \arctg x + c. \end{aligned}$$

$$5) \int \frac{\sqrt[6]{x} dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$$

**Решение**

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt[6]{x} dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} &= \left| \begin{array}{l} \text{НОК}(2,3,6) = 6 \\ x = t^6, \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right| = \int \frac{t}{t^3 + t^2} 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^4}{t+1} dt = \\ &= 6 \int \left( t^3 - t^2 + t - 1 + \frac{1}{t+1} \right) dt = \frac{3}{2} t^4 - 2t^3 + 3t^2 - 6t + 6 \ln|t+1| + c = \\ &= \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} + c. \end{aligned}$$

$$6) \int \frac{dx}{\cos x + 2}.$$

### Решение

Применяя универсальную подстановку, получим

$$\int \frac{dx}{\cos x + 2} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + 2} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2+2+2t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{3+t^2} =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} + c = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + c.$$

2. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_3^4 \frac{dx}{\left(\sqrt[4]{x-3}+1\right)\sqrt{x-3}}.$$

### Решение

$$\int_3^4 \frac{dx}{\left(\sqrt[4]{x-3}+1\right)\sqrt{x-3}} = \left| \begin{array}{l} HOK(2,4) = 4 \\ x-3 = t^4 \\ x = t^4 + 3, dx = 4t^3 dt \\ x = 3 \Rightarrow t = 0 \\ x = 4 \Rightarrow t = 1 \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{4t^3 dt}{(t+1)t^2} =$$
$$= 4 \int_0^1 \frac{t dt}{t+1} = 4 \int_0^1 \frac{(t+1)-1}{t+1} dt = 4 \left( \int_0^1 dt - \int_0^1 \frac{d(t+1)}{t+1} \right) =$$
$$4(t - \ln|t+1|) \Big|_0^1 = 4(1 - \ln 2).$$

3. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость:

$$\int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}.$$

**Решение**

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2 + 4} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{-1}^b \frac{dx}{(x+1)^2 + 4} = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} \Big|_{-1}^b = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \operatorname{arctg} \frac{b+1}{2} - \operatorname{arctg} 0 \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

4. Найти площадь фигуры, ограниченной окружностью  $r = a \cos \varphi$  и лучами  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ .

**Решение**

В полярной системе координат уравнение  $r = a \cos \varphi$  задает окружность радиусом  $\frac{a}{2}$  со смещенным центром (рис. 5).

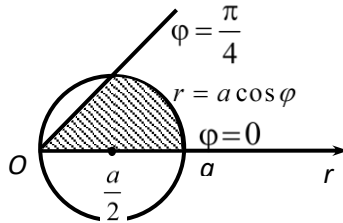


Рис. 5. Окружность радиусом  $\frac{a}{2}$  со смещенным центром

Криволинейный сектор, площадь которого мы находим, ограничен кривой  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  и лучами  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ . Поэтому

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (a \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{4} \left( \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{4} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{a^2(\pi+2)}{16}.$$

5. Вычислить длину дуги полукубической параболы  $y^2 = x^3$  от начала координат до точки А (4, 8) (рис. 6).

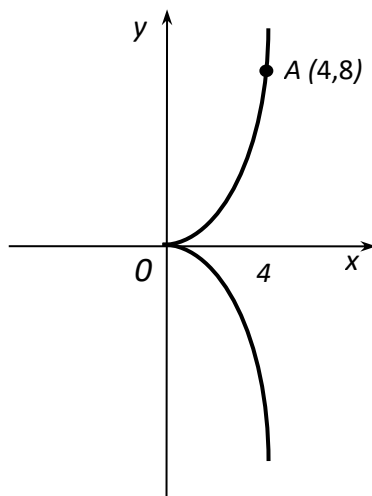


Рис. 6. Дуга полукубической параболы

### Решение

Имеем  $y = x^{\frac{3}{2}}, \quad y' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$  и

$$\begin{aligned} l &= \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}\right)^2} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4} x} dx = \frac{4}{9} \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4} x} d\left(1 + \frac{9}{4} x\right) = \\ &= \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left(1 + \frac{9}{4} x\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1). \end{aligned}$$

6. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной кривыми  $y = x^2$  и  $y^2 = x$  (рис.7).

### Решение

Найдем точки пересечения кривых из системы

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases} \Rightarrow x = x^4 \Leftrightarrow x - x^4 = 0, \quad x(1 - x^3) = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1.$$

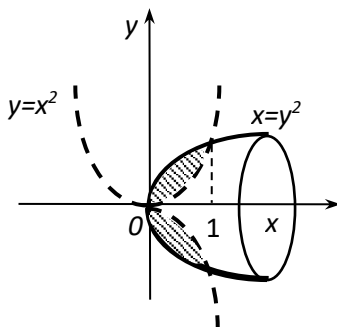


Рис. 7. Точки пересечения кривых

Искомый объем есть разность двух объемов: объема  $V_1$ , полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной параболой  $y = \sqrt{x}$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) и объема  $V_2$ , полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной параболой  $y = x^2$  ( $0 \leq x \leq 1$ ). Следовательно,

$$\begin{aligned} V_x = V_1 - V_2 &= \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx - \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^1 x dx - \pi \int_0^1 x^4 dx = \\ &= \pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 - \pi \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \pi \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3}{10} \pi. \end{aligned}$$

**Индивидуальные задания по теме:  
«Интегральное исчисление функций одной переменной»**

В заданиях:

№ 1–6 – найти неопределенные интегралы;

№ 7 – вычислить определенный интеграл;

№ 8 – вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

**Вариант 1**

1)  $\int \frac{x dx}{2x+1}$ ;                      2)  $\int (2x-1)\sin^2 x dx$ ;                      3)  $\int \frac{x dx}{2+\sqrt{x+4}}$ ;

4)  $\int \sin^3 2x \cos^2 2x dx$ ;                      5)  $\int \frac{x^4 + 2x^2 + 3}{x^3 - 8} dx$ ;                      6)  $\int \frac{\arctg 2x}{1+4x^2} dx$ ;

7)  $\int_0^1 \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^x + 1}}$ ;                      8)  $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{4+x^2}$ .

9) Вычислить площадь трапеции, ограниченной линиями  
 $\rho = a \cos \varphi$ ,  $\rho = 2a \cos \varphi$ .

10) Найти длину полукубической параболы  $y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^2$ , заключенную внутри параболы  $y^2 = \frac{x}{3}$ .

**Вариант 2**

1)  $\int x^2 e^{x^3} dx$ ;                      2)  $\int \sqrt[3]{x} \ln x dx$ ;                      3)  $\int \frac{\sin^2 x + x \sin 2x}{x \sin^2 x} dx$ ;

4)  $\int \sin^4 \frac{3}{2} x dx$ ;                      5)  $\int \frac{2x+3}{x(x^2+2x-3)} dx$ ;                      6)  $\int \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}+1} dx$ ;

7)  $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{4+\ln x}}$ ;                      8)  $\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^3}$ .

9) Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями  $y = x^2$ ,  $y = 2 - x$ .

10) Найти длину кардиоиды  $\rho = 2(1 - \sin \varphi)$ .

### Вариант 3

1)  $\int \frac{\sin x dx}{4 + \cos^2 x}$ ;      2)  $\int e^x \cos 2x dx$ ;      3)  $\int \sin^2 x \cos x dx$ ;

4)  $\int \frac{dx}{\cos x + 3 \sin x}$ ;      5)  $\int \frac{(x^2 + 1) dx}{x^3 + 4x^2}$ ;      6)  $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x} + 1}$ ;

7)  $\int_1^4 \frac{1 + \sqrt{y}}{y^2} dy$ ;      8)  $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$ .

9) Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линией  $\rho = a(1 - \cos \varphi)$ .

10) Найти объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции, ограниченной линиями  $y = x^2$ ,  $y = 2 - x$ ,  $y = 0$ , вокруг оси  $Ox$ .

### Вариант 4

1)  $\int \frac{x^2 dx}{9 - x^3}$ ;      2)  $\int \arctg 2x dx$ ;      3)  $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$ ;

4)  $\int \frac{2\sqrt{\ln x} dx}{x}$ ;      5)  $\int \frac{x^3 dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$ ;      6)  $\int \frac{x dx}{\sqrt{x} + 4}$ ;

7)  $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$ ;      8)  $\int_1^e \frac{dx}{x \ln^2 x}$ .

9) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  $xy = 6$ ,  $x + y = 7$ .

10) Найти периметр фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2$ ,  $y = \sqrt{x}$ .

### Вариант 5

$$\begin{aligned}
 &1) \int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt{1 - \operatorname{ctg} x}}; \quad 2) \int \ln 4x dx; \quad 3) \int \frac{dx}{\arccos x \sqrt{1 - x^2}}; \\
 &4) \int \frac{6 \sin x + \cos x}{1 + \cos x} dx; \quad 5) \int \frac{x^4 dx}{x^3 + 1}; \quad 6) \int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2 + 2}} dx; \\
 &7) \int_1^e \frac{\ln x + 4x^2}{x} dx; \quad 8) \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{(1 + x^2)^2}.
 \end{aligned}$$

9) Найти длину дуги кривой  $y = e^x - 1$  от точки  $(0; 0)$  до точки  $(1; e-1)$ .

10) Найти объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2$ ,  $y = 0$ ,  $x = 2$ , вокруг оси  $Oy$ .

### Вариант 6

$$\begin{aligned}
 &1) \int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^4 x}; \quad 2) \int x \arccos 2x dx; \quad 3) \int \frac{2 \operatorname{tg} x + 3}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx; \\
 &4) \int x \sin(1 - 3x^2) dx; \quad 5) \int \frac{x^5 + 2x - 1}{x^4 - 1} dx; \quad 6) \int \frac{\sqrt{2x+1} dx}{4 + \sqrt{2x+1}}; \\
 &7) \int_0^{\pi/3} \sin^2 x dx; \quad 8) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}.
 \end{aligned}$$

9) Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой  $x = t - \sin t$ ,  $y = 1 + \cos t$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ .

10) Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Oy$  криволинейной трапеции, ограниченной линиями  $xy = 1$ ,  $x = 3$ ,  $y = 3$ .

### Вариант 7

$$\begin{aligned}
 &1) \int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx; \quad 2) \int \frac{2x - 1}{\cos^2 x} dx; \quad 3) \int x^2 \sqrt{1 - 3x^3} dx;
 \end{aligned}$$

$$4) \int \frac{dx}{\cos x - 3\sin x}; \quad 5) \int \frac{x^2 + 3x + 1}{x^3 + 2x^2 - 3x} dx; \quad 6) \int \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x}} dx;$$

$$7) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\arctg x}{1 + x^2} dx; \quad 8) \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$$

9) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией  $\rho = 2\cos 3\varphi$ .

10) Вычислить длину кривой  $x = \cos^3 t$ ,  $y = \sin^3 t$ .

### Вариант 8

$$1) \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1 - x^4}}; \quad 2) \int \ln(1 + x^2) dx; \quad 3) \int e^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}};$$

$$4) \int \frac{dx}{5 + 2\sin x + 3\cos x}; \quad 5) \int \frac{x^3 + 2x^2}{(x-1)(x^2+1)} dx;$$

$$6) \int \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+1}(\sqrt[3]{x+1} + 1)} dx; \quad 7) \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx; \quad 8) \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}.$$

9) Вычислить длину кривой  $y = \ln x$  от точки  $(1; 0)$  до точки  $(e; 1)$ .

10) Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной линией  $x = \cos t$ ,  $y = 3\sin t$ ,  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ .

### Вариант 9

$$1) \int \frac{(1 + \sqrt{x})^5 dx}{\sqrt{x}}; \quad 2) \int (2x - 1)e^{4x} dx; \quad 3) \int \frac{x^6 dx}{10 + x^7};$$

$$4) \int \sin^4 2x \cos^2 2x dx; \quad 5) \int \frac{4 - 3x}{x^3 + 8x^2} dx;$$

$$6) \int \frac{dx}{x\sqrt{x+2}};$$

$$7) \int_4^9 \frac{x+1}{\sqrt{x}-1} dx; \quad 8) \int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

9) Найти площадь фигуры, ограниченной линией  $\rho = 2a \sin \varphi$ .

10) Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Oy$  фигуры, ограниченной линиями  $y^2 = x$ ,  $x = 4$ .

### Вариант 10

1)  $\int x^2 \sin x^3 dx$ ;    2)  $\int x^2 \sin 3x dx$ ;    3)  $\int (x^2 + 1)e^{x^3+3x} dx$ ;

4)  $\int \frac{\sqrt{\sin x} dx}{\sqrt{\cos^5 x}}$ ;    5)  $\int \frac{x^2 + 1}{x^3 + 2x^2 + 3x} dx$ ;    6)  $\int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[6]{x}} dx$ ;

7)  $\int_0^{\ln 4} \frac{dx}{e^x + 1}$ ;    8)  $\int_0^1 \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ .

9) Найти длину кривой  $\rho = 4 \sin \varphi$ .

10) Найти площадь фигуры, ограниченную линией  $x = 4 \cos t$ ,  $y = 3 \sin t$ .

### Вариант 11

1)  $\int (1 + \operatorname{ctg}^3 x) \frac{dx}{\sin^2 x}$ ;    2)  $\int (x^2 + 1) \ln x dx$ ;

3)  $\int \sqrt{9 - x^2} dx$ ;    4)  $\int \frac{dx}{2 \cos x + 3}$ ;    5)  $\int \frac{x^2 + 4}{x^3 + x} dx$ ;

6)  $\int \frac{\sqrt{2x-1} dx}{\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[6]{2x-1}}$ ;    7)  $\int_0^{\pi/2} \cos x 2^{\sin x} dx$ ;    8)  $\int_1^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{16 - x^4}}$ .

9) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  $x^2 = 16x - 4y$ ,  $x = 4 + y$ .

10) Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной линиями  $x^2 - y^2 = a^2$ ,  $x = 2a$ .

### Вариант 12

- 1)  $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ ;    2)  $\int \frac{\ln x}{x^4} dx$ ;    3)  $\int x^3 e^{4x^4} dx$ ;    4)  $\int tg^4 3x dx$
- 5)  $\int \frac{2x+9}{x^4-x^2-12} dx$ ;    6)  $\int \frac{\sqrt[6]{x} dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ ;    7)  $\int_0^{e^2} \frac{\ln^2 x}{x} dx$ ;    8)  $\int_1^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^3+1)^4}$ .
- 9) Найти длину кривой  $y = \ln \cos x$  от точки  $(0; 0)$  до точки  $(\frac{\pi}{4}; \ln \frac{\sqrt{2}}{2})$ .
- 10) Найти площадь фигуры, ограниченной одним витком  $\rho = 2\varphi$ .

### Вариант 13

- 1)  $\int tg 3x dx$ ;    2)  $\int (4x-1) \cos^2 2x dx$ ;    3)  $\int \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ ;
- 4)  $\int \frac{dx}{5\sin^2 x - 3\cos^2 x}$ ;    5)  $\int \frac{3x+4}{x^3+5x^2-6x} dx$ ;    6)  $\int \frac{\sqrt{x} dx}{1-\sqrt[4]{x}}$ ;
- 7)  $\int_0^{\sqrt{3}} x^3 \sqrt{1+x^2} dx$ ;    8)  $\int_1^2 \frac{x dx}{(x-1)^2}$ .
- 9) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  $y^2 = x+5$ ,  $y^2 = 4-x$ .
- 10) Найти длину кривой  $x = e^t \cos t$ ,  $y = e^t \sin t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ).

### Вариант 14

- 1)  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$ ;    2)  $\int \ln^2 2x dx$ ;    3)  $\int e^x \cos e^x dx$ ;
- 4)  $\int ctg^3 3x dx$ ;    5)  $\int \frac{3x+8}{x^3-x} dx$ ;    6)  $\int \frac{\sqrt[6]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}} dx$ ;

$$7) \int_1^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}; \quad 8) \int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x} dx.$$

9) Найти площадь фигуры, ограниченной линией  $\rho = 4\sin 2\varphi$ .

10) Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Oy$  фигуры, ограниченной линиями  $y^2 = 9 - x$ ,  $x = 0$ .

### Вариант 15

$$1) \int \cos x \sqrt{1 - \sin x} dx; \quad 2) \int \frac{x dx}{\sin^2 2x}; \quad 3) \int x 4^{x^2} dx;$$

$$4) \int \frac{dx}{2 + \cos x}; \quad 5) \int \frac{2x - 1}{x^4 + 5x^2 + 6} dx; \quad 6) \int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx;$$

$$7) \int_0^{\pi/3} \sin x \cos^2 x dx; \quad 8) \int_1^{+\infty} \frac{\sin \frac{1}{x^2}}{x^3} dx.$$

9) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $y = \frac{x^2}{2}$ .

10) Найти длину кривой  $x = 2(\cos t + t \sin t)$ ,  $y = 2(\sin t - t \cos t)$ ,  $(0 \leq t \leq \pi)$ .

### Вариант 16

$$1) \int \frac{\sqrt{1 - 2\ln x}}{x} dx; \quad 2) \int e^{2x} \sin^2 x dx; \quad 3) \int \frac{2x + 3}{x^2 + x + 2} dx;$$

$$4) \int \sin^4 2x \cos^4 2x dx; \quad 5) \int \frac{3x^2 + 4x - 1}{x^4 + x^2} dx; \quad 6) \int \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[6]{x}} dx;$$

$$7) \int_{\pi/6}^{\pi/3} tg^2 x dx; \quad 8) \int_1^4 \frac{x dx}{x^2 - 1}.$$

9) Найти длину кривой  $y^2 = (x-3)^3$  от точки  $(1; 0)$  до точки  $(6; \sqrt{125})$ .

10) Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Oy$  фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2 - x$ ,  $y = 0$ .

### Вариант 17

$$\begin{array}{ll} 1) \int 2^x \sqrt{1+2^x} dx; & 2) \int \frac{3x+5}{\cos^2 3x} dx; \quad 3) \int \frac{4x-3}{\sqrt{2-2x-x^2}} dx; \\ 4) \int \frac{\sin 2x dx}{4\sin^2 x + \cos^2 x}; & 5) \int \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^4 - 8x^2 - 9} dx; \quad 6) \int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x} - 1} dx; \\ 7) \int_0^{\pi/6} \sin^3 2x dx; & 8) \int_1^2 \frac{x^2 dx}{x^3 - 1}. \end{array}$$

9) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  $y^2 = 9x$ ,  $y = 3x$ .

10) Вычислить длину кривой  $x = 5\cos^2 t$ ,  $y = 5\sin^2 t$  ( $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ).

### Вариант 18

$$\begin{array}{ll} 1) \int \frac{4x-1}{\sqrt{2x^2-x+3}} dx; & 2) \int x \arctg 2x dx; \quad 3) \int \sin 2x \cos^2 x dx; \\ 4) \int \operatorname{tg}^5 2x dx; & 5) \int \frac{x^2 + 4x - 3}{x^4 + 4x^2} dx; \quad 6) \int \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x} + 1)} dx; \\ 7) \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3 + 5\cos x}; & 8) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}. \end{array}$$

9) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  $xy = 4$ ,  $y = 1$ ,  $y = 4$ ,  $x = 0$ .

10) Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Oy$  фигуры, ограниченной линиями  $y = 2x$ ,  $y = x$ ,  $x = 3$ .

### Вариант 19

- 1)  $\int \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{\sin^2 x} dx$ ;    2)  $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$ ;    3)  $\int \frac{x^2 dx}{2x^2 + 1}$ ;    4)  $\int \frac{\sin x dx}{1 + \cos x}$ ;  
5)  $\int \frac{x^4 + 2x - 1}{8 - x^3} dx$ ;    6)  $\int \frac{x + 2}{1 + \sqrt{x + 1}} dx$ ;    7)  $\int_0^{\pi/4} \sin^5 x dx$ ;    8)  $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} x dx$ .

9) Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной линиями  $y = \sin x$ ,  $y = 0$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ).

10) Найти длину кривой  $x = 8 \sin t + 6 \cos t$ ,  $y = 6 \sin t - 8 \cos t$ , ( $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ).

### Вариант 20

- 1)  $\int 3^{\operatorname{tg} 3x} \frac{dx}{\cos^2 3x}$ ;    2)  $\int x^2 e^{3x} dx$ ;    3)  $\int \frac{4x + 1}{x + 2} dx$ ;  
4)  $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 6 \sin x \cos x - 16 \cos^2 x}$ ;    5)  $\int \frac{x^3 + x - 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx$ ;  
6)  $\int \frac{x - 1}{x\sqrt{x - 2}} dx$ ;    7)  $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin 2x}{4 + \cos^2 x} dx$ ;    8)  $\int_0^{\pi/4} 4^{\operatorname{ctg} x} \frac{dx}{\sin^2 x}$ .

9) Найти площадь фигуры, ограниченной линией  $\rho = 3 \cos \varphi$ .

10) Найти длину кривой  $y = e^{-x}$  от точки  $(0; 1)$  до точки  $(5; e^{-5})$ .

### Вариант 21

- 1)  $\int \frac{2x + 3}{\sqrt{x^2 + 3x + 5}} dx$ ;    2)  $\int \arccos 2x dx$ ;    3)  $\int 2^x \operatorname{tg} 2^x dx$ ;  
4)  $\int \frac{2 - \sin x + 3 \cos x}{1 + \cos x} dx$ ;    5)  $\int \frac{4x^2 + 38}{(x + 1)(x^2 - 4x + 13)} dx$ ;  
6)  $\int \frac{\sqrt{x} dx}{3x + \sqrt[3]{x^2}}$ ;    7)  $\int_0^{\pi/4} \frac{x dx}{\cos^2 3x}$ ;    8)  $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln \ln x}$ .

9) Найти площадь фигуры, ограниченной линией  $\rho = 4 \cos 3\varphi$ .

10) Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Oy$  фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2$ ,  $y = 2 - x$ ,  $x = 0$  ( $x > 0$ ).

### Вариант 22

1)  $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^2 x}}{x} dx$ ;      2)  $\int (2x + 3)2^x dx$ ;      3)  $\int \frac{4x - 1}{x^2 + 2x + 2} dx$ ;

4)  $\int \operatorname{ctg}^6 3x dx$ ;      5)  $\int \frac{6x dx}{x^3 - 1}$ ;      6)  $\int \frac{\sqrt{x + 3} dx}{1 + \sqrt[3]{x + 3}}$ ;

7)  $\int_{\pi/12}^{\pi/9} \operatorname{ctg} 3x dx$ ;      8)  $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$ .

9) Найти площадь фигуры, ограниченной линией  $x = 4 \cos t$ ,  $y = 9 \sin t$ .

10) Найти длину кривой  $\rho = 4(1 - \sin \varphi)$ .

### Вариант 23

1)  $\int \sin 2x \sqrt{1 + \sin^2 x} dx$ ;      2)  $\int \log_2(3x - 1) dx$ ;

3)  $\int \frac{x - 1}{\sqrt{13 - 6x + x^2}} dx$ ;      4)  $\int \frac{dx}{2 \sin x + 3 \cos x + 3}$ ;

5)  $\int \frac{3x - 1}{x^4 + 13x^2 + 36} dx$ ;      6)  $\int \frac{x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} dx$ ;

7)  $\int_{\pi/16}^{\pi/12} \cos^2 4x dx$ ;      8)  $\int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt[4]{(x^2 - 1)^3}}$ .

9) Найти длину кривой  $y = \ln \sin x$  ( $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ ).

10) Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной линиями  $xy = 4$ ,  $y = x$ ,  $x = 1$ .

### Вариант 24

- 1)  $\int \frac{\sin x}{e^{\cos x}} dx$ ;      2)  $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx$ ;      3)  $\int \frac{3x-4}{x^2+6x+13} dx$ ;  
4)  $\int \frac{dx}{4\sin^2 x + 8\sin x \cos x}$ ;      5)  $\int \frac{x^2 dx}{x^4 + 5x^2 + 4}$ ;      6)  $\int \frac{\sqrt{x} dx}{2 + \sqrt[4]{x}}$ ;  
7)  $\int_1^{e/2} \ln 2x dx$ ;      8)  $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$ .

9) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  $xy=9$ ,  $y=x$ ,  $x=5$ .

10) Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Oy$  фигуры, ограниченной линиями  $y^2=x$ ,  $x=4$ .

### Вариант 25

- 1)  $\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2} dx$ ;      2)  $\int (x^2 - 2x + 1)e^{3x} dx$ ;      3)  $\int \frac{8x-5}{\sqrt{x^2+4x+5}} dx$ ;  
4)  $\int \operatorname{ctg}^5 4x dx$ ;      5)  $\int \frac{x^3 + 2x + 3}{x^4 - 16} dx$ ;      6)  $\int \frac{\sqrt{x} dx}{4x + \sqrt[3]{x^2}}$ ;  
7)  $\int_1^{\sqrt{3}} x \sqrt{4-x^2} dx$ ;      8)  $\int_0^1 \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx$ .

9) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями  $y=x^2$ ,  $y=4-3x^2$ .

10) Найти длину кривой  $\rho=5(1+\cos \varphi)$ .

## Рекомендуемая литература

1. *Ахраменко, В. К.* Высшая математика. Сборник задач : учеб. пособие. В 3 ч. Ч. 1. Аналитическая геометрия. Анализ функции одной переменной / сост. В. К. Ахраменко [и др.]. – Минск : БГУ, 2013. – 359 с.
2. *Бричикова, Е. А.* Математика : практикум : в 4 ч. Ч. 1 / сост. Е. А. Бричикова [и др.]. – Минск : БНТУ, 2014. – 134 с.
3. *Бричикова, Е. А.* Математика : практикум : в 4 ч. Ч. 2 / сост. Е. А. Бричикова [и др.]. – Минск : БНТУ, 2015. – 138 с.
4. *Морозова, И. М.* Математика : учеб.-метод. комплекс. В 4 ч. Ч. 1 / сост. И. М. Морозова [и др.]. – Минск : БГАТУ, 2011. – 232 с.
5. *Морозова, И. М.* Математика : учеб.-метод. комплекс. В 4 ч. Ч. 2 / сост. И. М. Морозова [и др.]. – Минск : БГАТУ, 2011. – 188 с.
6. *Рябушко, А. П.* Высшая математика : теория и задачи : учеб. пособие. В 5 ч. Ч. 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной / А. П. Рябушко, Т. А. Жур. – Минск : Вышэйш. шк., 2016. – 303 с.: ил.
7. *Рябушко, А. П.* Высшая математика : теория и задачи : учеб. пособие. В 5 ч. Ч. 2. Комплексные числа. Неопределенный и определенный интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения / А. П. Рябушко, Т. А. Жур. – Минск : Вышэйш. шк., 2016. – 273 с.: ил.

Учебное издание

**Катковская** Ирина Николаевна  
**Хвощинская** Людмила Аркадьевна

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Практикум

В двух частях

Часть 1

Редактор *Л. М. Корневская*  
Компьютерная верстка *М. Ю. Мошкова*  
Техническое редактирование *М. Ю. Мошкова*

Подписано в печать  
Формат 60×90 1/16. Бумага офсетная.  
Усл. печ. л. 6,1. Уч.-изд. л. 4,27.  
Тираж 100 экз. Заказ №

Республиканское унитарное предприятие  
«Информационно-вычислительный центр  
Министерства финансов Республики Беларусь».  
Свидетельство о государственной регистрации издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий  
№ 1/161 от 27.01.2014, № 2/41 от 29.01.2014,  
ул. Кальварийская, 17, 220004, г. Минск.