УДК 539.3

И. А. ПРУСОВ, В. А. САВЕНКОВ

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ОРТОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ВНУТРЕННИМ ПРЯМОЛИНЕЙНЫМ РАЗРЕЗОМ

Пусть упругое ортотропное тело занимает в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ область $S^-(y < 0)$, ограниченную прямой $L_0(y = 0)$. При этом будем предполагать, что компоненты напряжений и проекции смещений на оси x и y в области S^- определяются по формулам [1]:

$$\begin{aligned}
\sigma_y &= 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{2}[s_j\Phi(z_j) + n_j\Phi(\bar{z}_j)], \quad z_j = x + \mu_j y,\\
\sigma_x &= 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{2}[s_j\mu_j^2\Phi(z_j) + n_j\bar{\mu}_j^2\Phi(\bar{z}_j)],\\
\tau_{xy} &= -2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{2}[s_j\mu_j\Phi(z_j) + n_j\bar{\mu}_j\Phi(\bar{z}_j)], \quad \mu_j = i\gamma_j, \qquad (1)\\
u &= 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{2}[s_j p_j\varphi(z_j) + n_j\bar{p}_j\varphi(\bar{z}_j)], \quad p_j = c_{11}\mu_j^2 + c_{12},\\
v &= 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{2}[s_j q_j\varphi(z_j) + n_j\bar{q}_j\varphi(\bar{z}_j)], \quad \mu_j q_j = c_{12}\mu_j^2 + c_{22},
\end{aligned}$$

где $\Phi(z_j)$ — произвольная аналитическая функция; μ_j — характеристические числа; $\varphi'(z_j) = \Phi(z_j)$; s_j, n_j — произвольные постоянные; c_{ik} — коэффициенты закона Гука.

Вначале рассмотрим смешанную краевую задачу, полагая, что на отрезке $L'(|x| < a)$ силой p_0, направленной по оси y вертикально вниз, вдавливается плоский штамп, касательные напряжения $\tau_{xy} = 0$ на L'; внешняя нагрузка на участках $L'' = L_0 \setminus L'$ контура L_0 и компоненты напряжений на бесконечности отсутствуют. Кроме того, предположим, что в некоторой точке $N_0(x_0, y_0)$ внутри области S^- приложена сосредоточенная сила с проекциями (X_0, Y_0). Требуется найти функцию $\Phi(z_j)$, удовлетворяющую краевым условиям на L_0 и условиям однозначности перемещений в области S^-.

При построении решения этой задачи искомые функции напряжений будем искать в виде:

$$\begin{aligned}
\Phi(z_j) &= \frac{a_0}{z_j - \tau_j} + \sum_{k=1}^{2}\frac{\alpha_k\bar{a}_0 + \beta_k b_0}{z_j - \bar{\tau}_k} + \Phi_0(z_j), \quad z_j \to \tau_j,\\
\Phi(\bar{z}_j) &= \frac{b_0}{\bar{z}_j - \bar{\tau}_j} + \sum_{k=1}^{2}\frac{\lambda_k a_0 + \nu_k\bar{b}_0}{\bar{z}_j - \tau_k} + \Phi_0(\bar{z}_j), \quad \bar{z}_j \to \bar{\tau}_j.
\end{aligned} \qquad (2)$$

Здесь $\Phi_0(z_j)$ — функция, голоморфная в окрестности точек $\tau_j = x_0 + \mu_j y$ и $\bar{\tau}_j$; α_k, β_k, λ_k, ν_k — произвольные коэффициенты. Постоянные a_0 и b_0 определяются по формулам [1]:

$$a_0 = -\frac{Y_0 + \eta X_0}{2\pi i(1+\varkappa)}, \quad b_0 = -\frac{\varkappa(Y_0 + \eta X_0)}{2\pi i(1+\varkappa)}, \qquad (3)$$

где $\eta = -\dfrac{i}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}$, $\varkappa = \dfrac{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}(\gamma_1 + \gamma_2 + \sqrt{\gamma_1\gamma_2})c_{11} + c_{12}}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}(\gamma_1 + \gamma_2 - \sqrt{\gamma_1\gamma_2})c_{11} - c_{12}}$.

Распоряжаясь значениями коэффициентов s_j, n_j, α_k, β_k, λ_k, ν_k, согласно формулам (1), получим граничные условия на L_0 в виде:

$$\Phi_0^-(x) - \Phi_0^+(x) = 0, \quad x \in L'', \tag{4}$$

$$\operatorname{Im}[\Phi_0^-(x) - \Phi_0^+(x)] = 0, \quad \operatorname{Im}[\varkappa \Phi_0^-(x) + \Phi_0^+(x)] = g(x), \quad x \in L', \tag{5}$$

где $g(x) = -\operatorname{Im}\sum_{k=1}^{2} \frac{G_k a_0 + B_k \bar{b}_0}{x - \tau_k}$, $G_k = \mu_0 s_k q_k (\bar{\eta} - \eta) + \lambda_k - \varkappa \alpha_k$, $B_k = = \mu_0 n_k q_k (\bar{\eta} - \eta) + \nu_k - \varkappa \beta_k$, $\alpha_k = -s_k(1 - \eta\bar{\mu}_k)$, $\beta_k = -n_k(1 - \eta\bar{\mu}_k)$, $\lambda_k = s_k(1 - \eta\mu_k)$, $\nu_k = n_k(1 - \eta\mu_k)$, $\mu_0 = [\sqrt{\gamma_1\gamma_2}(\gamma_1 + \gamma_2 - \sqrt{\gamma_1\gamma_2})c_{11} - - c_{12}]^{-1}$, $s_1 = -\frac{\sqrt{\gamma_2}}{2(\sqrt{\gamma_1} - \sqrt{\gamma_2})}$, $s_2 = \frac{\sqrt{\gamma_1}}{2(\sqrt{\gamma_1} - \sqrt{\gamma_2})}$, $n_1 = -\frac{\sqrt{\gamma_2}}{2(\sqrt{\gamma_1} + \sqrt{\gamma_2})}$, $n_2 = -\frac{\sqrt{\gamma_1}}{2(\sqrt{\gamma_1} + \sqrt{\gamma_2})}$. Ограниченное на бесконечности решение краевой задачи (4) определяется известным способом [2].

Пусть теперь в полуплоскости S^- имеется прямолинейный разрез L, расположенный вдоль отрезка оси y. На берегах разреза зададим самоуравновешенную, непрерывную по Гельдеру нагрузку $\sigma_x^\pm - \eta\tau_{xy}^\pm$ (верхний знак относится к левому берегу разреза L).

Следуя методу работы [3], предположим, что вдоль L действуют непрерывно распределенные усилия. Тогда функцию $\Phi(z_j)$, описывающую поле напряжений в данной полуплоскости с разрезом, можно представить как результат суперпозиций (dy — элемент отрезка L):

$$\Phi(z_j) = \Phi_0(z_j) + \sum_{k=1}^{2}\int_L \left[\frac{a_0(t)}{z_j - t_j} + \frac{\alpha_k \overline{a_0(t)}}{z_j - \bar{t}_k} + \frac{\beta_k b_0(\bar{t})}{z_j - \bar{t}_k}\right] dy, \tag{6}$$

$$\Phi(\bar{z}_j) = \Phi_0(\bar{z}_j) + \sum_{k=1}^{2}\int_L \left[\frac{b_0(\bar{t})}{\bar{z}_j - \bar{t}_j} + \frac{\lambda_k a_0(t)}{\bar{z}_j - t_k} + \frac{\nu_k b_0(t)}{\bar{z}_j - t_k}\right] dy,$$

$$\Phi_0(z_j) = \frac{X(z_j)}{\pi(\varkappa + 1)}\int_{-a}^{a} \frac{g_1(x)\,dx}{X^+(x)(x - z_j)} + \frac{i p_0 X(z_j)}{2\pi}, \tag{7}$$

где

$$X(z_j) = \frac{1}{\sqrt{z_j^2 - a^2}}, \quad g_1(x) = \operatorname{Im}\sum_{k=1}^{2}\int_L \frac{G_k a_0(t) + B_k \bar{b}_0(t)}{x - t_k} dy. \tag{8}$$

Подставляя значение $g_1(x)$ из (8) в формулу (7), меняя порядок интегрирования и вычисляя внутренний интеграл, получим

$$\Phi_0(z_j) = -\frac{1}{2(\varkappa + 1)}\sum_{k=1}^{2}\left\{\int_L [G_k a_0(t) + B_k \bar{b}_0(t)]\Lambda(z_j, t_k)\,dy - \right.$$
$$\left. - \int_L [\bar{G}_k \overline{a_0(t)} + \bar{B}_k b_0(\bar{t})]\Lambda(z_j, \bar{t}_k)\,dy\right\} + \frac{i p_0}{2\pi\sqrt{z_j^2 - a^2}},$$

где $\Lambda(z_j, t_k) = \frac{\sqrt{z_j^2 - a^2} - \sqrt{t_k^2 - a^2}}{\sqrt{z_j^2 - a^2}\,(z_j - t_k)}$.

Учитывая формулу $dt_j = \mu_j dy$ и вводя функции $f(t) = -\frac{2\pi i a_0(t)}{\mu_j}$, $q(t) = = -\frac{2\pi i b_0(t)}{\mu_j}$, приведем (6) к виду:

$$\Phi(z_j)=\Phi_0(z_j)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(t)\,dt_j}{t_j-z_j}+\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{2}\int_L\frac{\beta_k q(\bar t)-\alpha_k\overline{f(t)}}{\bar t_k-z_j}\,d\bar t_k,$$

$$\Phi(\bar z_j)=\Phi_0(\bar z_j)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\bar q(\bar t)\,d\bar t_j}{\bar t_j-\bar z_j}+\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{2}\int_L\frac{\lambda_k f(t)-\nu_k\bar q(t)}{\bar t_k-\bar z_j}\,dt_k, \qquad (9)$$

$$\Phi_0(z_j)=-\frac{1}{4\pi i(\varkappa+1)}\sum_{k=1}^{2}\Big\{\int_L[B_k\bar q(t)-G_k f(t)]\,\Lambda(z_j,t_k)\,dt_k-$$

$$-\int_L[\overline{G_k f(t)}-\bar B_k q(\bar t)]\,\Lambda(z_j,\bar t_k)\,d\bar t_k\Big\}+\frac{ip_0}{2\pi\sqrt{z_j^2-a^2}}.$$

Функции, определенные равенствами (9), обеспечивают выполнение граничных условий на границе полуплоскости.

Функции $f(t)$ и $q(t)$ определим, удовлетворяя условиям на берегах разреза:

$$2\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2}[s_j\mu_j^2\Phi^{\pm}(t_j)+n_j\bar\mu_j^2\Phi^{\pm}(\bar t_j)]+2\eta\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2}[s_j\mu_j\Phi^{\pm}(t_j)+n_j\bar\mu_j\Phi^{\pm}(\bar t_j)]=$$

$$=\sigma_x^{\pm}-\eta\tau_{xy}^{\pm}=F^{\pm}(t),\ (t\in L). \qquad (10)$$

Подставляя предельные значения функций (9) в краевое условие (10) и вычитая из первого равенства второе, находим

$$\bar q(t)=w(t)+A\overline{f(t)}+Df(t),\ (t\in L), \qquad (11)$$

где $w(t)=\frac{1}{\Delta}[\rho_4\overline{F_1(t)}-\rho_2F_1(t)]$, $A=\frac{1}{\Delta}(\rho_2\rho_3-\rho_1\rho_4)$, $D=\frac{1}{\Delta}(\rho_1\rho_2-$ $-\rho_3\rho_4)$, $F_1(t)=F^+(t)-F^-(t)$, $\rho_1=\sum_{j=1}^{2}\mu_j s_j(\mu_j+\eta)$, $\rho_2=\sum_{j=1}^{2}\mu_j n_j(\mu_j+$ $+\eta)$, $\rho_3=\sum_{j=1}^{2}\bar\mu_j s_j(\bar\mu_j+\eta)$, $\rho_4=\sum_{j=1}^{2}\bar\mu_j n_j(\bar\mu_j+\eta)$, $\Delta=\rho_4^2-\rho_2^2$. Складывая предельные равенства и учитывая (11), после преобразований придем к сингулярному интегральному уравнению относительно неизвестной функции $f(t)$:

$$\sum_{j=1}^{2}\Big\{\frac{\gamma_j^2-i\eta\gamma_j}{\pi i}\int_L\frac{\bar k_j\overline{f(t)}-\bar m_j f(t)}{\bar t_j-\bar t_{j0}}\,d\bar t_j-\frac{\gamma_j^2+i\eta\gamma_j}{\pi i}\int_L\frac{k_j f(t)-m_j\overline{f(t)}}{t_j-t_{j0}}\,dt_j+$$

$$+(i\eta-\gamma_j)K(t_{j0})+(i\eta+\gamma_j)\bar K(\bar t_{j0})\Big\}=F_0(t),\ t\in L. \qquad (12)$$

Здесь

$$K(t_{j0})=\sum_{k=1}^{2}\Big\{\frac{\gamma_j}{\pi_i}\int_L\frac{\beta_{jk}f(t)-\alpha_{jk}f(\bar t)}{\bar t_k-t_{j0}}\,d\bar t_k-\frac{\gamma_j(s_j-n_j)}{2\pi i(\varkappa+1)}\Big[\int_L(d_k f(t)+$$

$$+c_k\overline{f(t)})\,\Lambda(t_{j0},t_k)\,dt_k+\int_L(d_k\overline{f(t)}+c_k f(t))\,\Lambda(t_{j0},\bar t_k)\,d\bar t_k\Big]\Big\},$$

$k_j=s_j-n_jD$, $m_j=n_jA$, $c_k=B_kA$, $d_k=B_kD-G_k$, $\beta_{jk}=(s_j\beta_k+n_j\nu_k)A$, $\alpha_{jk}=s_j(\beta_kD-\alpha_k)-n_j(\lambda_k-\nu_kD)$,

$$F_0(t)=\sum_{j=1}^{2}\Big\{\frac{\gamma_j^2-i\eta\gamma_j}{\pi i}\int_L\frac{n_j w(\bar t)\,d\bar t_j}{\bar t_j-\bar t_{j0}}-\frac{\gamma_j^2+i\eta\gamma_j}{\pi i}\int_L\frac{k_j w(t)\,dt_j}{t_j-t_{j0}}+$$

$$+(i\eta-\gamma_j)K_1(t_{j0})+(i\eta+\gamma_j)\bar K_1(\bar t_{j0})\Big\}+F^+(t)+F^-(t),$$

$$K_1(t_{j0}) = \sum_{k=1}^{2} \left\{ \frac{\gamma_j}{\pi_i} \int_L \frac{n_j \nu_k w(t)\, dt_k}{t_k - \bar{t}_{j0}} - \frac{\gamma_j}{\pi_i} \int_L \frac{s_j \beta_k \overline{w(t)}\, d\bar{t}_k}{\bar{t}_k - t_{j0}} + \frac{p_0 \gamma_j (s_j - n_j)}{\pi i \sqrt{t_{j0}^2 - a^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\gamma_j^2 (s_j - n_j)}{2\pi i (\varkappa + 1)} \left[\int_L B_k w(t) \Lambda(t_{j0}, t_k)\, dt_k + \int_L B_k \overline{w(t)} \Lambda(t_{j0}, \bar{t}_k)\, d\bar{t}_k \right] \right\}.$$

Интегральное уравнение (12) обычным образом [4] сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно значений плотности $f(t)$ в узлах интерполяции.

Уравнение (12) необходимо решать совместно с условием однозначности смещений, которое в рассматриваемом случае имеет вид:

$$\sum_{j,k=1}^{2} \left\{ \int_L \left[r_j' \overline{f(t)} + l_j' (Af(t) + \overline{w(t)}) \right] d\bar{t}_j - \int_L [r_j f(t) + l_j (A\overline{f(t)} + w(t))]\, dt_j - \right.$$

$$- \varkappa \int_L [\beta_k Af(t) + (\beta_k D - \alpha_k) \overline{f(t)} + \beta_k \overline{w(t)}]\, d\bar{t}_k + \int_L [(\lambda_k - \nu_k D) f(t) -$$

$$\left. - \nu_k A \overline{f(t)} - \nu_k w(t)]\, dt_k + \frac{1-\varkappa}{1+\varkappa} \operatorname{Re} \int_L [B_k w(t) + c_k \overline{f(t)} + d_k f(t)]\, dt_k \right\} -$$

$$- p_0 (\varkappa - 1) = 0,$$

где $r_j = \mu_0 (p_j - \eta q_j)(s_j + n_j D)$, $r_j' = \mu_0 (p_j - \eta \bar{q}_j)(s_j + n_j D)$, $l_j = \mu_0 n_j \times \times (p_j - \eta q_j)$, $l_j' = \mu_0 n_j (p_j - \eta q_j)$.

Список литературы

1. Прусов И. А. Термоупругие анизотропные пластинки.— Минск, 1978.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М., 1966.
3. Фильштинский Л. А. // Изв. АН СССР. Сер. механика твердого тела.— 1980.— № 6.— С. 72.
4. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости.— М., 1973.

Поступила в редакцию 23.03.85.

УДК 517.925

А. В. КОЗУЛИН

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

1. **Необходимые условия.** Рассмотрим дифференциальное уравнение вида:

$$w''' = \frac{P_n(z, w')}{Q_m(z, w')}, \tag{1}$$

где многочлены $P_n(z, w') = \sum_{k=0}^{n} p_k(z) w'^{\,n-k}$, $Q_m(z, w') = \sum_{k=0}^{m} q_k(z) w'^{\,m-k}$ предлагаются взаимно простыми, а $p_k(z)$, $q_k(z)$ — аналитические коэффициенты в области D.

Выделим такие классы уравнений (1), решения которых имеют особенность, в окрестности которой главная часть есть полюс первого порядка, т. е. если w — решение уравнения (1), то

$$w = \frac{\alpha_1}{z - z_0} + \ldots, \tag{2}$$

где $z_0 \in D$, α_1 — целое число.

Обозначим w' через u. Тогда (1) примет вид:

$$u'' = \frac{P_n(z, u)}{Q_m(z, u)}. \tag{3}$$