суждение, получаем, что f_d содержит лишь переменные $x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}$ из $\{x_1, \ldots, x_p\}$. По лемме 4 можно считать, что три переменные из $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}\}$ равны 1. Получим противоречие. Теорема доказана.

Следствие 1. $\tilde{G}$-решетка в P_k континуальна.

Следствие 2. G-решетка в P_k континуальна.

Автор выражает искреннюю благодарность доценту В. В. Горлову за постановку задачи и помощь при выполнении работы.

Список литературы

1. Нгуен Ван Хоа // Тез. докл. VII Всесоюзной конференции по математической логике.— Новосибирск.—1984.— С. 119.
2. Янов Ю. И., Мучник А. А. // Докл. АН СССР.— 1959.— Т. 127.— № 1.—С. 44.
3. Яблонский С. В. // Труды МИ АН СССР.—1958.— Т. 51.— С. 5.

Поступила в редакцию 21.12.84.

УДК 517.925

А. И. ЯБЛОНСКИЙ, А. Ф. КОРЗЮК

СВОЙСТВА ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ ТРЕХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x}=Ax, \tag{1}$$

где $x = \mathrm{colon}(x_1, x_2, x_3)$, матрица

$$A=\begin{pmatrix} -b & a & 0 \\ -2c & 0 & 2a \\ 0 & -c & b \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$a \neq 0$, b, c — аналитические в некоторой области D_1 комплексной плоскости функции. Вместе с системой (1)—(2) рассмотрим нелинейную систему трех дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = a\varphi^2 - 2a\varphi\psi + b\varphi + 2a\omega + 2c, \\ \dot{\psi} = 2a\psi^2 + b\psi - a\omega + c, \\ \dot{\omega} = 2a\psi\omega + 2b\omega + 2c\psi. \end{cases} \tag{3}$$

Теорема 1. Если известно хотя бы одно решение системы (3), то общее решение системы (1)—(2) находится в квадратурах.

Действительно, сделаем в системе (1)—(2) преобразование $y=Sx$:

$$S=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \varphi & 1 & 0 \\ \omega & \psi & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Тогда система (1)—(2) примет вид $\dot{y} = By$, где [1] $B = \dot{S}S^{-1} + SAS^{-1}$, $\dot{S}$ — производная от матрицы S, S^{-1} — обратная к S. Проделав соответствующие вычисления, получим

$$B=\begin{pmatrix} -(b+a\varphi) & a & 0 \\ 0 & a(\varphi-2\psi) & 2a \\ 0 & 0 & b+2a\psi \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Завершение доказательства теоремы очевидно.

В дальнейшем с системой (1)—(2) будем связывать уравнение Риккати [2]

$$y' = ay^2 + by + c. \tag{6}$$

Пусть y_1 — частное решение уравнения (6). Легко убедиться, что $\varphi = 2y_1$, $\psi = y_1$, $\omega = y_1^2$ является решением системы (3).

Следствие 1. Если известно хотя бы одно решение уравнения (6), то общее решение системы (1)—(2) находится в квадратурах.

Имеет место и обратное утверждение.

Теорема 2. Если известно одно решение системы (1)—(2), то уравнение (6) решается в квадратурах, если известны два линейно независимые решения системы (1)—(2), то общий интеграл (6), а значит, и решение находится без квадратур.

Для доказательства запишем (6) в дифференциалах

$$(ay^2 + by + c)\,dx - dy = 0 \tag{7}$$

и будем искать интегрирующий множитель уравнения (7) в виде

$$\mu = \frac{1}{\alpha y^2 + \beta y + \gamma}. \tag{8}$$

Использовав уравнение интегрирующего множителя, найдем, что α, β, γ удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} \dot\alpha &= -b\alpha + a\beta, \\ \dot\beta &= -2c\alpha + 2a\gamma, \\ \dot\gamma &= -c\beta + b\gamma, \end{aligned} \tag{9}$$

т. е. (α, β, γ) удовлетворяют системе (1)—(2). Обратное тоже верно, если (α, β, γ) удовлетворяют системе (1)—(2), т. е. имеет место (9), то (8) является интегрирующим множителем уравнения (6).

Предположим, что $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ и $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ — два линейно независимые решения системы (1)—(2). Тогда они порождают два интегрирующих множителя μ_1 и μ_2 уравнения (6). Чтобы закончить доказательство теоремы 2, достаточно доказать, что $\frac{\mu_1}{\mu_2} \neq \mathrm{const}$. Пусть $\frac{\mu_1}{\mu_2} \equiv \equiv \frac{\alpha_2 y^2 + \beta_2 y + \gamma_2}{\alpha_1 y^2 + \beta_1 y + \gamma_1} \equiv k$ — постоянное число. Тогда $y^2(\alpha_2 - k\alpha_1) + y(\beta_2 - k\beta_1) + \gamma_2 - k\gamma_1 \equiv 0$. Но отсюда, в силу переменности y, получим линейную зависимость между $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ и $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, что противоречит предположению.

Следствие 2. Если известно одно решение системы (1)—(2), то общее решение этой системы находится в квадратурах.

Доказательство этого утверждения дают теорема 2 и следствие 1. Дальше будем исследовать свойства решений системы (3). Эта система имеет однопараметрическое семейство решений без подвижных критических точек — решение, выражающееся через общее решение уравнения Риккати (6).

Докажем, что система (3) без подвижных критических особых точек. Система (1)—(2) через интегрирующий множитель вида (8) порождается уравнением (6). Для простоты рассуждений уравнение (6) преобразуем к каноническому виду (не меняя обозначений)

$$y' = y^2 + R(z). \tag{10}$$

Тогда матрица (2) системы (1) примет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2R & 0 & 2 \\ 0 & -R & 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Очевидно, что $R(z)$ в качестве особых точек содержит, вообще говоря, особые точки a, b, c и нули a. В дальнейшем $R(z)$ будем рассматривать в области D, где нет ее особых точек и $z = \infty$. Система (3) в этом случае примет вид

$$\begin{cases} \dot\varphi = \varphi^2 - 2\varphi\psi + 2\omega + 2R, & (*) \\ \dot\psi = 2\psi^2 - \omega + R, & (**) \\ \dot\omega = 2\psi\omega + 2R\psi. & (***) \end{cases} \tag{12}$$

Заметим, что к такому виду можно свести систему (3), не преобразуя (6) к (10). Матрица (5) в этом случае запишется

$$B = \begin{pmatrix} -\varphi & 1 & 0 \\ 0 & \varphi - 2\psi & 2 \\ 0 & 0 & 2\psi \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Фундаментальная система решений системы $\dot y = By$

$$y = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & \beta_{12} & \beta_{13} \\ 0 & 0 & \gamma_{13} \end{pmatrix}, \tag{14}$$

где $z_0 \in D$ и не совпадает с особыми точками подынтегральных функций, а путь интегрирования не проходит через особые точки.

$$\alpha_{11} = \exp\left(-\int_{z_0}^{z} \varphi dx\right), \quad \beta_{11} = \gamma_{11} = 0,$$

$$\alpha_{12} = \exp\left(-\int_{z_0}^{z} \varphi dz\right) \int_{z_0}^{z} \left(\exp 2 \int_{z_0}^{z} (\varphi - \psi)\, dz\right) dz,$$

$$\beta_{12} = \exp \int_{z_0}^{z} (\varphi - 2\psi)\, dz, \quad \gamma_{12} = 0,$$

$$\alpha_{13} = 2\exp\left(-\int_{z_0}^{z} \varphi dz\right) \int_{z_0}^{z} \left(\exp 2 \int_{z_0}^{z} (\varphi - \psi)\, dz \int_{z_0}^{z} \exp \int_{z_0}^{z} (4\psi - \varphi)\, dz\right) dz,$$

$$\beta_{13} = 2\exp \int_{z_0}^{z} (\varphi - 2\psi) dz \int_{z_0}^{z} \left(\exp \int_{z_0}^{z} (4\psi - \varphi)\, dz\right) dz,$$

$$\gamma_{13} = \exp 2 \int_{z_0}^{z} \psi dz. \tag{15}$$

Известно, что решение системы (1) с матрицей (11) в D особых точек иметь не может. Найдем интегральную подстановку этой системы по формуле $x = S^{-1}y$, где S^{-1} — обратная матрица к (4), y — (14)—(15). Тогда

$$x = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ -\varphi\alpha_{11} & -\varphi\alpha_{12} + \beta_{12} & -\varphi\alpha_{13} + \beta_{13} \\ (\varphi\psi - \omega)\alpha_{11} & (\varphi\psi - \omega)\alpha_{12} - \psi\beta_{12} & (\varphi\psi - \omega)\alpha_{13} - \psi\beta_{13} + \gamma_{13} \end{pmatrix}.$$

Из голоморфности в D α_{11} видно, что φ может иметь в D лишь простые полюсы с целыми отрицательными вычетами. В этих точках α_{11} имеет нуль. Аналогично можно установить, что ψ в D может иметь лишь простые полюсы, ω может допускать полюсы второго порядка, но других особенностей φ, ψ, ω иметь не могут. Следовательно, система (12) — система, которая имеет подвижными особыми точками только полюсы.

Действительно, систему (**) — (***) из (12) можно привести (исключая ω) к уравнению второго порядка

$$\ddot{\psi} = 6\dot{\psi}\psi - 4\psi^3 - 4R\dot{\psi} + \dot{R}, \tag{16}$$

которое преобразованием $\psi = -u/2$ сводится к одному из 50 канонических уравнений Пенлеве, а преобразованием $u = \dot{v}/v$ — к линейному уравнению

$$\dddot{v} + 4R\dot{v} + 2\dot{R}v = 0. \tag{17}$$

Пусть $z_0 \in D$ — произвольная точка, тогда существует однопараметрическое решение (17) с простым нулем в z_0 и одно решение с двукратным нулем. Семейству v с простым нулем соответствует полярное решение (16) с главной частью $G_\psi = -\frac{1}{2(z-z_0)}$ и параметром $\psi_0(\psi_0$ — коэффициент при $(z-z_0\backslash^0)$, а решению v с двукратным нулем соответствует полярное решение ψ с главной частью $\widetilde{G}_\psi = -\frac{1}{z-z_0}$. Других видов подвижных особых точек, т. е. точек $z_0 \in D$, $\psi(z)$ иметь не может. Из ((12), (*), (**)) следует, что семейству полярных решений (16) с главной частью $G_\psi = -\frac{1}{2(z-z_0)}$ соответствуют полярные решения ω и φ с главными частями $G_\omega = \frac{-2\psi_0}{z-z_0}$, $G_\varphi = -\frac{2}{z-z_0}$ (параметр $\varphi_0 = -4\psi_0$). Но в этом случае $\varphi(z)$ может быть голоморфным, причем $\varphi_0 = \varphi(z_0) = 4\psi_0$. Полярному решению $\psi(z)$ с главной частью $\widetilde{G}_\psi = -\frac{1}{z-z_0}$ соответствуют полярные решения ω и φ с главными частями $\widetilde{G}_\omega = \frac{1}{z-z_0}$, $\widetilde{G}_{1\varphi} = -\frac{1}{z-z_0}$ или $G_{2\varphi} = -\frac{2}{z-z_0}$.

Здесь мы не касаемся неподвижных особых точек, так как структура решений в окрестности этих точек зависит от характера особенностей $R(z)$. Заметим лишь только, что в случае рациональности $R(z)$, решение (16) не может иметь решений с конечным числом полюсов, отличных от рациональных. Это же относится и к ω, и к φ.

Список литературы

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.— М., 1966.— С. 423.
2. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений.— М., 1958.— С. 47.

Поступила в редакцию 28.12.84.

УДК 519.1

М. М. КОВАЛЕВ, В. М. КОТОВ

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ СЕРИЙ ПРИБЛИЖЕННЫХ АЛГОРИТМОВ

В теории схем, распознавании образов идея синтеза из «ненадежных алгоритмов» алгоритмов с требуемой точностью получила широкое распространение. Пути использования этой идеи в дискретной оптимизации (ДО) указали Ю. И. Журавлев и В. К. Леонтьев. В настоящей статье предлагается схема построения серии приближенных решений и указывается метод получения оценки погрешности лучшего из построенных решений, иллюстрируемый на модельной задаче ДО — задаче коммивояжера на максимум, для которой, в частности, построен полиномиаль-