3

СЕРИЯ 1, 1986

ВЕСТНИК

Белорусского государственного университета имени В.И. Ленина

Физика
Математика
Механика

МИНСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО
„УНИВЕРСИТЕТСКОЕ"
1986

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Физика

УКК 530.12; 530.145

Г. В. ШИШКИН, И. Е. АНДРУШКЕВИЧ

РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ В УРАВНЕНИИ ДИРАКА В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ. IV

1. В полях тяготения общей теории относительности с метрикой

$$\begin{aligned} ds^2 = \operatorname{sign}(\beta - i)\cdot A_{ijmn,i}(x^i, x^j, x^m, x^n)\cdot (dx^i)^2 + \\ + \operatorname{sign}(\beta - j)\cdot A_{ijmn,j}(x^i, x^j, x^m, x^n)\cdot (dx^j)^2 + \\ + \operatorname{sign}(\beta - m)\cdot A_{ijmn,m}(x^i, x^j, x^m, x^n)\cdot (dx^m)^2 + \\ + \operatorname{sign}(\beta - n)\cdot A_{ijmn,n}(x^i, x^j, x^m, x^n)\cdot (dx^n)^2, \end{aligned}$$

ковариантное обобщение уравнения Дирака (КОУД) при диагональной калибровке тетрады имеет вид [1]:

$$\begin{aligned} \Bigg\{ \frac{\tilde{\gamma}^i}{\sqrt{A_{ijmn,i}}}\left(\partial_i - \frac{\partial_i A_{ijmn,i}}{4A_{ijmn,i}}\right) + \frac{\tilde{\gamma}^j}{\sqrt{A_{ijmn,j}}}\cdot\left(\partial_j - \frac{\partial_j A_{ijmn,j}}{4A_{ijmn,j}}\right) + \\ + \frac{\tilde{\gamma}^m}{\sqrt{A_{ijmn,m}}}\left(\partial_m - \frac{\partial_m A_{ijmn,m}}{4A_{ijmn,m}}\right) + \frac{\tilde{\gamma}^n}{\sqrt{A_{ijmn,n}}}\Bigg(\partial_n - \\ - \frac{\partial_n A_{ijmn,n}}{4A_{ijmn,n}}\Bigg) + m_0\Bigg\}\Phi = 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь и далее индексы i, j, m, n не носят тензорного характера; $\tilde{\gamma}$ — матрицы Дирака специальной теории относительности.

В настоящей работе продолжим исследования уравнения (1) на предмет разделения переменных по методике выделения дифференциальных операторов первого порядка (ОПП), начатые в [1—3]. В [1] определены условия отделения одной переменной; в [2] подобная задача решалась для попарного разделения; в работе [3] показано, что для отделения в КОУД x^i от x^j, x^m, x^n и x^j от x^m, x^n необходимо и достаточно, чтобы функции $A_{ijmn,k}$, $(k = i, j, m, n)$ удовлетворяли условию

$$A_{ijmn,k}(x^i, x^j, x^m, x^n) = A_{i,k}(x^i)A_{j,k}(x^j)A_{mn,k}(x^m, x^n) \qquad (2)$$

и выполнялся один из наборов требований

$$A_{i,j},\ A_{i,m},\ A_{i,n},\ A_{j,m}/A_{j,n},\ A_{mn,i},\ A_{mn,j}; \qquad (3)$$

$$A_{i,j},\ A_{i,m},\ A_{i,n},\ A_{j,m},\ A_{j,n},\ A_{mn,i}/A_{mn,j}; \qquad (4)$$

$$A_{i,j},\ A_{i,m},\ A_{i,n},\ A_{j,i}/A_{j,m},\ A_{j,i}/A_{j,n},\ A_{mn,j}; \qquad (5)$$

$$A_{i,j},\ A_{i,m},\ A_{i,n},\ A_{j,i},\ A_{j,m},\ A_{j,n}. \qquad (6)$$

В (3)—(6) и далее в подобных наборах перечисленные функции и отношения функций должны быть постоянными, т. е., например, (3) следует понимать: $A_{i,j} = \text{const}, \ldots, A_{j,m}/A_{j,n} = \text{const}, \ldots, A_{mn,j} = \text{const}$.

Теперь определим закономерности полного разделения переменных. Необходимо иметь в виду следующие возможности: 1) в уравнении Дирака после отделения x^i от x^j, x^m, x^n и x^j от x^m, x^n потребовать отделения и x^m от x^n; 2) в КОУД сразу (или же после отделения только одной переменной) потребовать полного разделения переменных.

Аналогично тому, как это делалось в [3], можно показать несостоятельность возможности 2), ибо не могут быть выполнены необходимые коммутационные соотношения.

Рассуждения, необходимые при исследовании закономерностей полного разделения переменных в уравнении (1), не имеют принципиальных отличий от тех, которые проведены в работах [1—3], и потому позволим в основном приводить лишь конечные результаты.

2.1. Пусть выполнены условия (2), (3). Тогда зависимость волновой функции от переменных x^m, x^n будет определяться уравнением

$$\left\{\frac{\tilde{\gamma}^j\tilde{\gamma}^i\tilde{\gamma}^m}{\sqrt{A_{mn,m}}}\left(\partial_m-\frac{\partial_m A_{mn,m}}{4A_{mn,m}}\right)+\frac{\tilde{\gamma}^j\tilde{\gamma}^i\tilde{\gamma}^n}{\sqrt{A_{mn,n}}}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\partial_n-\frac{\partial_n A_{mn,n}}{4A_{mn,n}}\right)-k_{mn}\right\}\Phi=0. \qquad (7)$$

Предположив возможность разделения в (7) x^m и x^n, необходимо потребовать, чтобы функции $A_{ijmn,k}$ имели вид

$$A_{ijmn,k}=A_{i,k}(x^i)A_{j,k}(x^j)A_{m,k}(x^m)A_{n,k}(x^n) \qquad (8)$$

и выполнялось одно из требований:

$$A_{n,m}=\text{const}\ (9),\qquad A_{m,n}=\text{const}. \qquad (10)$$

Очевидно, условия (9), (10), ввиду симметрии индексов m и n, являются тождественными. В дальнейшем из тождественных условий (или их наборов) будем указывать только одно.

2.2. При выполнении (2), (4) вместо (7) имеем

$$\left\{-\eta^{mm}\tilde{\gamma}^n\left(\frac{A_{mn,i}}{A_{mn,m}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\partial_m-\frac{\partial_m A_{mn,m}}{4A_{mn,m}}\right)+\eta^{nn}\tilde{\gamma}^m\left(\frac{A_{mn,i}}{A_{mn,n}}\right)^{\frac{1}{2}}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\partial_n-\frac{\partial_n A_{mn,n}}{4A_{mn,n}}\right)+m_0\tilde{\gamma}^m\tilde{\gamma}^n(A_{mn,i})^{\frac{1}{2}}-k_{mn}\right\}\Phi=0,$$

а для возможности отделения x^m от x^n необходимо потребовать выполнения (8) и условия

$$A_{n,i}=\text{const},\ A_{n,m}=\text{const}. \qquad (11)$$

2.3. Если выполнены (2), (5), то вместо (7) имеем

$$\left\{\eta^{mm}\frac{\tilde{\gamma}^n\tilde{\gamma}^i}{\sqrt{A_{mn,m}}}\left(\partial_m-\frac{\partial_m A_{mn,m}}{4A_{mn,m}}\right)+\eta^{nn}\frac{\tilde{\gamma}^i\tilde{\gamma}^m}{\sqrt{A_{mn,n}}}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\partial_n-\frac{\partial_n A_{mn,n}}{4A_{mn,n}}\right)+k_i\frac{\tilde{\gamma}^m\tilde{\gamma}^n}{\sqrt{A_{mn,i}}}-k_{mn}\right\}\Phi=0, \qquad (12)$$

или

$$\left\{\eta^{mm}\Omega\tilde{\gamma}^n\tilde{\gamma}^i\left(\frac{A_{mn,i}}{A_{mn,m}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\partial_m-\frac{\partial_m A_{mn,m}}{4A_{mn,m}}\right)+\right.$$
$$+\eta^{nn}\Omega\tilde{\gamma}^i\tilde{\gamma}^m\left(\frac{A_{mn,i}}{A_{mn,n}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\partial_n-\frac{\partial_n A_{mn,n}}{4A_{mn,n}}\right)+$$
$$\left.+\Omega k_j\cdot(A_{mn,i})^{\frac{1}{2}}-k_{mn}\right\}\Phi=0, \qquad (13)$$

где k_i, k_j — собственные значения операторов по отделенным переменным x^i, x^j [1, 3], а Ω может быть одной из матриц $\tilde{\gamma}^i$, $\tilde{\gamma}^j\tilde{\gamma}^i$, $\tilde{\gamma}^m\tilde{\gamma}^n$, $\tilde{\gamma}^j\tilde{\gamma}^m\tilde{\gamma}^n$.

Для разделения переменных в (12) необходимо выполнение (8) и набора требований:

$$A_{n,i}=\text{const},\ A_{n,m}=\text{const}. \qquad (14)$$

Аналогично можно получить, что для разделения x^m и x^n в уравнении (13) необходимо выполнение (8) и одного из наборов условий:

$$A_{m,n} = \text{const},\ A_{n,i}/A_{n,m} = \text{const}; \qquad (15)$$
$$A_{n,i} = \text{const},\ A_{n,m} = \text{const}. \qquad (16)$$

2.4. В случае, когда справедливы (2), (6), по переменным x^m, x^n имеем уравнение

$$\Bigg\{\tilde{\gamma}^j\tilde{\gamma}^m\left(\frac{A_{mn,j}}{A_{mn,m}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\partial_m - \frac{\partial_m A_{mn,m}}{4A_{mn,m}}\right) + \tilde{\gamma}^j\tilde{\gamma}^n\left(\frac{A_{mn,j}}{A_{mn,n}}\right)^{\frac{1}{2}} \times$$
$$\times\left(\partial_n - \frac{\partial_n A_{mn,n}}{4A_{mn,n}}\right) + m_0\tilde{\gamma}^j(A_{mn,j})^{\frac{1}{2}} + k_i\eta^{ii}\tilde{\gamma}^j\tilde{\gamma}^i\left(\frac{A_{mn,j}}{A_{mn,i}}\right)^{\frac{1}{2}} - k_{mn}\Bigg\}\Phi = 0. \qquad (17)$$

Здесь k_i — собственное значение оператора по отделившейся переменной x^i.

Как и в п. 2.3, получаем, что для разделения переменных в (17) необходимым является условие (8) и один из наборов требований:

$$A_{n,i},\ A_{n,j},\ A_{n,m}; \qquad (18)$$
$$A_{m,i}/A_{m,n},\ A_{n,j},\ A_{n,m}; \qquad (19)$$
$$A_{m,n},\ A_{n,i}/A_{n,j},\ A_{n,i}/A_{n,m}. \qquad (20)$$

3. Анализируя полученные результаты (9), (10), (11), (14), (15), (16), (18)—(20) и принимая во внимание (2)—(6), с учетом симметрии по индексам i, j, m, n, имеем следующие различные наборы условий, позволяющих осуществить полное разделение переменных в уравнении (1):

$$A_{i,j},\ A_{i,m},\ A_{i,n},\ A_{j,m}/A_{j,n},\ A_{m,i},\ A_{m,j},\ A_{m,n},\ A_{n,i},\ A_{n,j}; \qquad (21)$$
$$A_{i,j},\ A_{i,m},\ A_{i,n},\ A_{j,i}/A_{j,m},\ A_{j,i}/A_{j,n},\ A_{m,i},\ A_{m,j},\ A_{m,n},\ A_{n,j}; \qquad (22)$$
$$A_{i,j},\ A_{i,m},\ A_{i,n},\ A_{j,i}/A_{j,m},\ A_{j,i}/A_{j,n},\ A_{m,i}/A_{m,n},\ A_{m,j},\ A_{n,j},\ A_{n,m}; \qquad (23)$$
$$A_{i,j},\ A_{i,m},\ A_{i,n},\ A_{j,i},\ A_{j,m},\ A_{j,n},\ A_{m,i},\ A_{m,j},\ A_{m,n}. \qquad (24)$$

Достаточность полученных требований доказывается обратными рассуждениями.

Таким образом, доказана справедливость теоремы.

Теорема. Для полного разделения переменных в КОУД при диагональной калибровке тетрады по методике ОПП необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (8) и один из наборов требований (21)—(24).

4. Следствия теоремы (явный вид операторов). Операторы, соответствующие разделенным переменным, имеют вид:

1) Выполнены условия (8), (21):

$$\text{а)}\ \hat{K}_i = \eta^{ii}\frac{\Omega}{\sqrt{A_{i,i}}}\partial_i, \qquad (25)$$

$$\hat{K}_j = -\eta^{jj}\tilde{\gamma}^i\sqrt{\frac{A_{j,m}}{A_{j,j}}}\partial_j + k_i\tilde{\gamma}^j\sqrt{\frac{A_{j,m}}{A_{j,i}}} + \tilde{\gamma}^j\tilde{\gamma}^i m_0\sqrt{A_{j,m}}, \qquad (26)$$

$$\hat{K}_m = \eta^{mm}\frac{\Omega_1}{\sqrt{A_{m,m}}}\partial_m, \qquad (27)$$

$$\hat{K}_n = \Omega_1\tilde{\gamma}^m\tilde{\gamma}^n\sqrt{\frac{A_{n,m}}{A_{n,n}}}\partial_n - \Omega_1\tilde{\gamma}^i\tilde{\gamma}^j\tilde{\gamma}^m k_{mn}\sqrt{A_{n,m}}\,\eta^{ii}\eta^{jj}, \qquad (28)$$

$$\Omega = I = \text{diag}(1, 1, 1, 1), \qquad (29)$$

$$\Omega_1 = \tilde{\gamma}^j\tilde{\gamma}^i,\ \tilde{\gamma}^j,\ \tilde{\gamma}^i,\ I. \qquad (30)$$

б) Для операторов $\hat{K}_i$, $\hat{K}_m$, $\hat{K}_n$ соответственно справедливы выражения (25), (27), (28),

$$\hat{K}_j = \Omega\tilde{\gamma}^i\tilde{\gamma}^j\left(\frac{A_{j,i}}{A_{j,j}}\right)^{\frac{1}{2}}\partial_j + k_{mn}\eta^{jj}\Omega\tilde{\gamma}^j\left(\frac{A_{j,i}}{A_{j,m}}\right)^{\frac{1}{2}} + m_0\Omega\tilde{\gamma}^i\sqrt{A_{j,i}}, \qquad (31)$$

$$\Omega = I,\ \tilde{\gamma}^i\tilde{\gamma}^m\tilde{\gamma}^j,\ \tilde{\gamma}^i\tilde{\gamma}^n\tilde{\gamma}^j,\ \tilde{\gamma}^m\tilde{\gamma}^n, \qquad (32)$$

а матрица Ω_1 по-прежнему определяется соотношением (30).

в) Операторы $\widehat{K}_i$, $\widehat{K}_j$, $\widehat{K}_m$ соответственно определяются выражениями (25), (31), (27),

$$\widehat{K}_n = \tilde{\gamma}^j\tilde{\gamma}^i\tilde{\gamma}^n \frac{1}{\sqrt{A_{n,n}}} \partial_n + k_m \eta^{mm} \tilde{\gamma}^j \tilde{\gamma}^i \tilde{\gamma}^m \frac{1}{\sqrt{A_{n,m}}}, \tag{33}$$

для Ω справедливо соотношение (32),

$$\Omega_1 = I. \tag{34}$$

г) Для операторов $\widehat{K}_i$, $\widehat{K}_j$, $\widehat{K}_m$, $\widehat{K}_n$ и матриц Ω, Ω_1 справедливы выражения (25)—(27), (33), (29), (34) соответственно.

2) Имеют место условия (8), (22).

а)
$$\widehat{K}_i = \eta^{ii}\Omega\tilde{\gamma}^n\tilde{\gamma}^m \frac{1}{\sqrt{A_{i,i}}} \partial_i,$$

$$\widehat{K}_j = \tilde{\gamma}^i\tilde{\gamma}^n\tilde{\gamma}^m\tilde{\gamma}^j \left(\frac{A_{j,i}}{A_{j,j}}\right)^{\frac{1}{2}} \partial_j + m_0 \tilde{\gamma}^i\tilde{\gamma}^m\tilde{\gamma}^n \sqrt{A_{j,i}}, \tag{35}$$

$$\widehat{K}_m = \eta^{mm}\Omega_1\Omega\tilde{\gamma}^i\tilde{\gamma}^n \frac{1}{\sqrt{A_{m,m}}} \partial_m,$$

$$\widehat{K}_n = \eta^{nn}\Omega_1\Omega\tilde{\gamma}^m\tilde{\gamma}^j \left(\frac{A_{n,m}}{A_{n,n}}\right)^{\frac{1}{2}} \partial_n + k_i\Omega_1 \left(\frac{A_{n,m}}{A_{n,i}}\right)^{\frac{1}{2}} + k_j\Omega_1\Omega\sqrt{A_{n,m}},$$

$$\Omega = \tilde{\gamma}^i;\ \Omega_1 = \tilde{\gamma}^n,\ \tilde{\gamma}^i\tilde{\gamma}^m;$$

$$\Omega = \tilde{\gamma}_j\tilde{\gamma}^i;\ \Omega_1 = \tilde{\gamma}^i\tilde{\gamma}^m,\ \tilde{\gamma}^j\tilde{\gamma}^n;$$

$$\Omega = \tilde{\gamma}^n\tilde{\gamma}^m;\ \Omega_1 = \tilde{\gamma}^n,\ \tilde{\gamma}^i\tilde{\gamma}^m,\ \tilde{\gamma}^j\tilde{\gamma}^n,\ \tilde{\gamma}^i\tilde{\gamma}^j\tilde{\gamma}^m;$$

$$\Omega = \tilde{\gamma}^j\tilde{\gamma}^n\tilde{\gamma}^m;\ \Omega_1 = \tilde{\gamma}^i\tilde{\gamma}^m,\ \tilde{\gamma}^i\tilde{\gamma}^j\tilde{\gamma}^m.$$

б) Операторы $\widehat{K}_i$, $\widehat{K}_j$, $\widehat{K}_m$ и матрицы Ω, Ω_1 определяются соотношениями (25), (35), (27), (34) соответственно,

$$\widehat{K}_n = \eta^{nn} \frac{\tilde{\gamma}^m\tilde{\gamma}^i}{\sqrt{A_{n,n}}} \partial_n + k_i \frac{\tilde{\gamma}^n\tilde{\gamma}^m}{\sqrt{A_{n,i}}} + k_m \frac{\tilde{\gamma}^i\tilde{\gamma}^n}{\sqrt{A_{n,m}}}.$$

3) Справедливы требования (8) и (23). Для операторов $\widehat{K}_i$, $\widehat{K}_j$ имеют место соотношения (25), (35),

$$\widehat{K}_m = \Omega_1\Omega\tilde{\gamma}^i\tilde{\gamma}^m \left(\frac{A_{m,i}}{A_{m,m}}\right)^{\frac{1}{2}} \partial_m - k_j \eta^{nn}\eta^{mm}\Omega_1\Omega\tilde{\gamma}^n\tilde{\gamma}^m \sqrt{A_{m,i}},$$

$$\widehat{K}_n = \Omega_1\Omega\tilde{\gamma}^i\tilde{\gamma}^n \frac{1}{\sqrt{A_{n,n}}} \partial_n + k_i\Omega_1 \frac{1}{\sqrt{A_{n,i}}},$$

$$\Omega = \tilde{\gamma}^i\tilde{\gamma}^m\tilde{\gamma}^n;\ \Omega_1 = \tilde{\gamma}^j\tilde{\gamma}^m,\ \tilde{\gamma}^i\tilde{\gamma}^j\tilde{\gamma}^n;$$

$$\Omega = \tilde{\gamma}^i\tilde{\gamma}^j\tilde{\gamma}^m\tilde{\gamma}^n;\ \Omega_1 = \tilde{\gamma}^m,\ \tilde{\gamma}^i\tilde{\gamma}^j\tilde{\gamma}^n;$$

$$\Omega = \tilde{\gamma}^j;\ \Omega_1 = \tilde{\gamma}^m,\ \tilde{\gamma}^j\tilde{\gamma}^m.$$

4) Если имеют место (8) и (24), то операторы $\widehat{K}_i$, $\widehat{K}_m$ будут определяться соотношениями (25), (27),

$$\widehat{K}_j = \eta^{jj} \cdot \frac{1}{\sqrt{A_{j.}}} \partial_j,$$

$$\widehat{K}_n = \widetilde{\gamma}^m \widetilde{\gamma}^n \left(\frac{A_{n,m}}{A_{n,n}} \right)^{\frac{1}{2}} \partial_n + \eta^{ii} k_i \widetilde{\gamma}^m \widetilde{\gamma}^i \left(\frac{A_{n,m}}{A_{n,i}} \right)^{\frac{1}{2}} + $$

$$+ \eta^{jj} k_j \widetilde{\gamma}^m \widetilde{\gamma}^j \left(\frac{A_{n,m}}{A_{n,j}} \right)^{\frac{1}{2}} + m_0 \widetilde{\gamma}^m \sqrt{A_{n,m}},$$

а для матриц Ω, Ω_1 по-прежнему справедливы (29) и (34).

Операторы, фигурирующие в п. 4, действуют на функцию $\widetilde{\Phi}$, такую, что

$$\Phi = (A_{i,i} A_{j,j} A_{m,m} A_{n,n})^{\frac{1}{4}} \widetilde{\Phi}.$$

Список литературы

1. Шишкин Г. В., Андрушкевич И. Е. // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.—1985.— № 3.— С. 26.
2. Шишкин Г. В., Андрушкевич И. Е. // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.—1986.— № 1.— С. 6.
3. Шишкин Г. В., Андрушкевич И. Е. // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.—1986.— № 2.— С. 5.

Поступила в редакцию 17.01.85.

УДК 535.34

Н. А. ИВАНОВА, А. Л. ТОЛСТИК, А. В. ЧАЛЕЙ

ВЛИЯНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ РЕШЕТКИ НА БИСТАБИЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕРФЕРОМЕТРА ФАБРИ — ПЕРО

Бистабильная зависимость интенсивности выходящего из высокодобротного интерферометра светового потока исследовалась в работах [1, 2]. Расчет проводился в приближении средней интенсивности без учета интерференции волн в среде. Бистабильность коэффициента преобразования при четырехволновом взаимодействии в резонаторе Фабри — Перо с учетом интерференции опорных волн рассматривалась в [3]. В данном сообщении исследуется влияние светоиндуцированной пространственной решетки просветления на бистабильные характеристики интерферометра Фабри — Перо: интенсивность включения и выключения, ширину петли гистерезиса, область значений параметров нелинейной среды и резонатора, при которых проявляется бистабильность.

Рассмотрим пространственную структуру поля, установившуюся в интерферометре Фабри — Перо. В приближении плоских волн с учетом нелинейного поглощения и многократного отражения на границах $z = 0$, L (L — база интерферометра) распределение интенсивности поля запишется в виде

$$J(z) = I_z (1 + \gamma_z \cos 2\Phi_{L-z}), \tag{1}$$

где

$$I_z = \frac{I_0 (1 - R) \tau_z (1 + R \tau_{L-z}^2)}{1 + R^2 \tau_L^2 - 2R\tau_L \cos 2\Phi_L}, \tag{2}$$

$$\gamma_z = 2\sqrt{R}\, \tau_{L-z} / (1 + R\tau_{L-z}^2), \tag{3}$$

R — коэффициент отражения зеркал интерферометра; I_0 — интенсивность падающего на границу $z = 0$ внешнего светового потока; τ_z — пропускание нелинейного слоя толщиной z; Φ_z — набег фазы на этой толщине.

В общем случае τ_z и Φ_z — сложные функции, учитывающие как модуляцию коэффициента поглощения и показателя преломления, так и перерассеяние света на амплитудно-фазовой решетке, образуемой в результате просветления среды в интерференционных максимумах встречных потоков.

Величина модуляции поля в среде γ_z может принимать различные значения $(0 < \gamma_z < 1)$. При низкой добротности резонатора и относительно большом поглощении излучения $(\sqrt{R}\tau \ll 1)$ модуляцией светового поля в интерферометре можно пренебречь. Наоборот, в интерферометре с хорошо отражающими зеркалами, заполненном слабопоглощающей средой $(\sqrt{R}\tau \simeq 1)$, образуется стоячая волна с максимальной глубиной модуляции.

Используя (1)—(3), интенсивность выходящего светового потока определим выражением

$$I_{\text{вых.}} = I_0(T^2 + \Phi^2)^{-1}, \tag{4}$$

где

$$T = (1 - \tau_L R)/\sqrt{\tau_L}(1 - R), \tag{5}$$

$$\Phi = (2\sqrt{R}\sin\Phi_L)/(1 - R). \tag{6}$$

Пропускание нелинейного слоя толщиной L, τ_L и набег фазы Φ_L находим из решения нелинейных волновых уравнений для двух распространяющихся навстречу друг другу плоских волн. Эти уравнения в приближении слабого поглощения, которому соответствует максимальная глубина модуляции стоячей волны, сводятся к виду [3]

$$\partial A_{1,2}/\partial z = \pm ik_0(\chi_0 + \chi_1)A_{1,2}/2, \tag{7}$$

где $A_{1,2}$ — комплексные амплитуды волн; k_0 — коэффициент поглощения невозбужденной среды; $\chi_m = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\chi(J)\cos 4\pi mz/\lambda d(4\pi z/\lambda)$ — Фурье-компоненты разложения нелинейной восприимчивости $\chi(J)$ по гармоникам светоиндуцированной решетки.

Используя (7), искомые величины τ_L и Φ_L можно записать

$$\tau_L = 1 - k_0 L\,\mathrm{Im}(\chi_0 + \chi_1), \tag{8}$$

$$\Phi_L = k_0 L\,\mathrm{Re}(\chi_0 + \chi_1)/2. \tag{9}$$

Для резонансной среды, моделируемой двухуровневой схемой как с совпадающими, так и со стоксово смещенными контурами полос поглощения и испускания, нелинейная восприимчивость равна [4]:

$$\chi(J) = \frac{cn_0k_0}{4\pi\omega}\left(\frac{\hat{\vartheta}_{12}}{B_{12}} - \frac{\hat{\Theta}J}{1 + \alpha J}\right), \tag{10}$$

где n_0 — показатель преломления среды без учета рассматриваемого перехода; $\hat{\Theta} = \Theta + i\alpha = (\hat{\vartheta}_{12} + \hat{\vartheta}_{21})/vp_{21}$; p_{21} — вероятность спонтанных и безызлучательных переходов; v — скорость света в среде; $\hat{\vartheta}_{ij} = \vartheta_{ij} + iB_{ij}$; параметры $\vartheta_{ij}(\omega)$ связаны дисперсионными соотношениями с коэффициентами Эйнштейна для поглощения $B_{12}(\omega)$ и испускания $B_{21}(\omega)$.

Пропускание нелинейного слоя τ_L и фазовый набег Φ_L для данной модели резонансной среды с учетом (8)—(10) определяются выражениями:

$$\tau_L = 1 - k_0 L\,\frac{1 + 2\alpha I - \sqrt{1 + 2\alpha I}}{\alpha I\,(1 + 2\alpha I)},$$

$$\Phi_L = k_0 L\left[\frac{\vartheta_{12}}{B_{12}} - \frac{\Theta}{\alpha} - \frac{\Theta}{\alpha}\cdot\frac{1 + 2\alpha I - \sqrt{1 + 2\alpha I}}{\alpha I(1 + 2\alpha I)}\right].$$

Тогда в случае высокодобротного интерферометра и близкой к резонансу настройки полости соотношения (5), (6) примут вид

$$T = T_0 + \Delta, \quad \Phi = \Phi_0 - \frac{\Theta}{\alpha}\Delta,$$

где

$$\Delta = C\frac{\sqrt{1+2\alpha I}-1}{(2+2\alpha I)(1+2\alpha I+\sqrt{1+2\alpha I})}, \qquad (11)$$

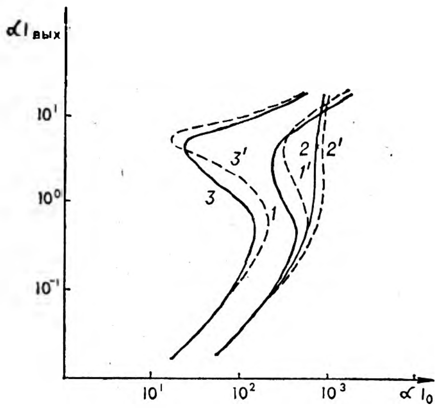


Рис. 1. Зависимости интенсивности прошедшего через интерферометр Фабри—Перо светового пучка от интенсивности падающего потока, рассчитанные при отстройке частоты возбуждения ω от центра контура поглощения ω_{12}, нормированной на полуширину контура Ω, $\eta = (\omega - \omega_{12})/\Omega = 0{,}8$ (*1,1′*, *2,2′*), 1,6 (*3,3′*); отстройке между контурами поглощения и испускания $\delta = (\omega_{12} - \omega_{21})/\Omega = 0$ (*2,2′*), 1,6 (*1,1′*, *3,3′*); $\Phi_р = 5$; $C = 64$. Кривые *1′—3′* соответствуют приближению среднего поля

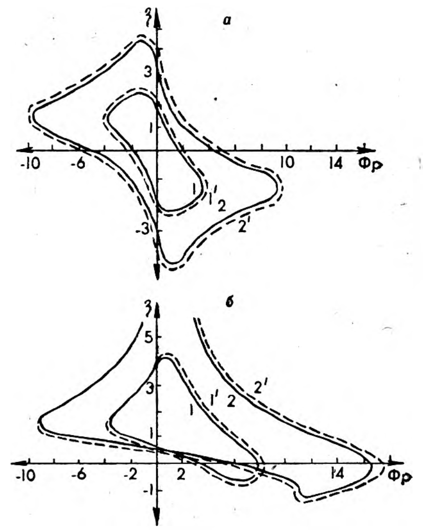


Рис. 2. Области значений параметров η и $\Phi_р$, для которых наблюдается эффект оптической бистабильности, $\delta = 0$(*а*), 0,8(*б*), $C = 16$ (*1,1′*), 32 (*2,2′*). Кривые *1′—2′* рассчитаны в приближении среднего поля

$C = k_0(\omega)L/(1-R)$ — параметр, определяющий условия возникновения бистабильности и равный отношению поглощаемой средней мощности светового потока к выходящей за пределы резонатора; $T_0 = 1 + C/(1+\alpha I)$; $\Phi_0 = \Phi_р - C\vartheta_{12}/B_{12} + C\Theta I/(1+\alpha I)$ — параметры, описывающие выходящий световой поток (4) в приближении средней интенсивности [2]; $\Phi_р = 2(m\pi - 2\pi n_0 L/\lambda - \varphi_R)/(1-R)$ определяет отстройку интерферометра от резонанса без учета рассматриваемого перехода (φ_R — изменение фазы световой волны при отражении от зеркала; m — целое число).

Максимальное влияние интерференции волн проявится в области максимума добавки Δ. Из (11) следует, что $\Delta_{max} \simeq 0{,}041$ при $\alpha I \simeq 0{,}63$. Это соответствует изменению нелинейной части параметров T и Φ менее, чем на 10 %, в сравнении с приближением средней интенсивности. Результат иллюстрирует рис. 1, где показаны зависимости $I_{вых}(I_0)$ для обоих случаев. Расчет проводился для гауссовой формы зеркально-симметричных контуров поглощения и испускания. На рис. 2 показаны области, в пределах которых проявляется бистабильность. Как видно, учет интерференции волн в среде несколько уменьшает области бистабильности и увеличивает порог бистабильности по параметру C, что справедливо для любой отстройки между контурами поглощения и испускания. Так, для совпадающих контуров ($\delta = 0$) пороговое значение $C_{пор.} \simeq 9{,}8$ при $\eta \simeq \pm 0{,}8$ и $\Phi_р \simeq \mp 0{,}6$, в то время как в приближении средней интенсивности $C_{пор.} = 8$ при $\eta = 0$ и $\Phi_р = 0$. Существование двух пороговых точек, отстроенных по частоте η и фазовому набегу $\Phi_р$, объясняется перерассеянием волн в объеме среды на светоиндуцированной амплитудно-фазовой решетке.

Расчеты ширины петли гистерезиса, интенсивности включения и выключения при различном расположении контуров поглощения и испускания показали, что учет пространственной решетки также приводит к небольшому уменьшению указанных параметров в сравнении с приближением средней интенсивности.

Таким образом, пространственное распределение поля, записанное при интерференции встречных потоков в высокодобротном резонаторе Фабри — Перо, практически не влияет на бистабильные характеристики прибора и для расчета можно использовать приближение средней интенсивности.

Список литературы

1 Agrawal G. P., Flytzanis C. // IEEE Quantum Electron.— 1981.— V. QE—17.— № 3.— P. 374.

2. Иванова Н. А., Рубанов А. С., Толстик А. Л., Чалей А. В. // ЖПС.— 1985.— Т. 43.— № 3.— С. 435.

3. Agrawal G. P. // J. Opt. Soc. Amer.— 1983.— V. 73.— № 5.— P. 654.

4. Кабанов В. В., Рубанов А. С. // Докл. АН БССР.—1980.— Т. 24.— № 1.— С. 34.

Поступила в редакцию 22.02.85.

УДК 535.012.2

Л. И. БУРОВ, Е. С. ВОРОПАЙ,
И. И. ГАНЧЕРЕНОК, В. А. САЕЧНИКОВ

ПРОЯВЛЕНИЕ ЭФФЕКТОВ СВЕТОИНДУЦИРОВАННОЙ АНИЗОТРОПИИ РАСТВОРОВ КРАСИТЕЛЕЙ ПРИ НЕКОЛЛИНЕАРНОЙ НАКАЧКЕ

Обнаруженные для ряда красителей значительные эффекты светоиндуцированной оптической активности [1] и их насыщающийся характер [1—3] позволяют создавать высокоэффективные и стабильные динамически управляемые модуляторы света и оптические затворы. В связи с этим представляет интерес анализ влияния геометрии световых потоков, поскольку во всех выполненных до настоящего времени исследованиях использовалась параллельная геометрия [1—3]. В предлагаемой работе исследуется случай произвольных направлений распространения сильной и слабой (зондирующей) волн в кубически нелинейной среде, а также приведены некоторые экспериментальные данные для ортогонального варианта накачки, который весьма распространен в квантовой электронике, а следовательно, важен для практически реализуемых систем.

Применительно к растворам сложных молекул уравнение распространения слабой волны может быть записано следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\underline{E}_1=2\pi i k_1 N I_0 F(\omega_0,\ \omega_1)\hat{S}_{\perp}\underline{E}_1, \qquad (1)$$

где $\underline{E}_1$, k_1, ξ, $\underline{n}_1$ — вектор амплитуды, волновое число, пространственная координата и единичный вектор направления распространения слабой волны соответственно; N — концентрация молекул в растворе; I_0 — интенсивность сильного поля; $F(\omega_0,\ \omega_1)$ — плавная частотная функция, сложным образом определяемая через дипольные моменты перехода, релаксационные параметры и функции равновесного распределения по колебательным подуровням [4]; $\hat{S}_{\perp}$ — ортогональная проекция тензора наведенной анизотропии, имеющая вид:

$$\hat{S}_{\perp}=\hat{I}+\underline{a}\cdot\underline{a}^*+\underline{a}^*\cdot\underline{a}, \qquad (2)$$

$$\hat{I}=1-\underline{n}_1\cdot\underline{n}_1,\ \ \underline{a}=\hat{I}\underline{e}_0, \qquad (3)$$

где $\underline{e}_0$ — вектор поляризации сильного поля; точка означает диадное произведение. При выводе (2) предполагалось отсутствие вырождения состояний сложных молекул.

Уравнение (1) является линейным относительно слабого поля, поэтому при анализе данной проблемы можно воспользоваться понятиями и методами классической кристаллооптики. Решение этого уравнения может быть легко получено в приближении заданного сильного поля ($I_0 = \text{const}$), которое обычно хорошо выполняется в нелинейной спектроскопии, тогда

$$\underline{E}_1(\xi) = \Big(\sum_{\pm} G_{\pm} \exp(2\pi i k_1 N I_0 F(\omega_0,\ \omega_1)\lambda_{\pm}\xi)\underline{E}_1(0), \tag{4}$$

где $\lambda_{\pm}$ и $G_{\pm}$ — собственные значения и проективные операторы тензора $\hat{S}_{\perp}$. Операторы $G_{\pm}$ проецируют любой вектор на направления собственных векторов $\hat{S}_{\perp}$. С другой стороны, в силу ортогональности $G_{\pm}$ волны, чья поляризация совпадает с собственными векторами $\hat{S}_{\perp}$, распространяются без изменения последней и могут быть названы нормальными. Теперь решение (4) может рассматриваться как разложение по нормальным волнам, а эффекты гиротропии и дихроизма можно интерпретировать как следствие различий фазовых скоростей и коэффициентов поглощения (усиления) для этих волн.

Анализ показывает, что в данном случае нормальные волны имеют линейную поляризацию, направление которой зависит от поляризации сильного поля и направления зондирующей волны. В общем случае выразить эту связь в простой аналитической форме не удается, однако для ряда важных частных случаев она является весьма простой.

Например, при линейной поляризации сильного поля вектор $\underline{a}$ становится вещественным и направления поляризации нормальных волн определяются векторами $\underline{a}$ и $[\underline{n}_1\underline{a}]$. Подтверждением этого вывода могут служить результаты работ [1, 3] по исследованию этанольных растворов триметинцианин перхлората и родамина 6Ж. Зарегистрированные авторами [1] незначительные отклонения от линейной поляризации при больших мощностях накачки обусловлены, по-видимому, эффектами самовоздействия сильной волны. Следует отметить, что наличие затухания этой волны в данном случае не имеет значения, поскольку измерения проводились в рамках параллельной геометрии.

Как отмечалось, особый интерес представляет вариант ортогональной накачки, широко используемый в экспериментальных схемах жидкостных усилителей и генераторов [5]. В этом случае выражение (2) сводится к простому виду:

$$\hat{S}_{\perp} = \hat{I} + C_0[\underline{n}_1\underline{n}_0]\cdot[\underline{n}_1\underline{n}_0], \tag{5}$$

где $C_0 = 2|[\underline{n}_1\underline{e}_0]|^2$; $\underline{n}_0$ — единичный вектор направления распространения сильной волны. Соотношение (5) показывает, что теперь раствор красителя может рассматриваться как обычный одноосный кристалл [6]. Нормальные волны будут поляризованы вдоль направлений $\underline{n}_0$ и $[\underline{n}_1\underline{n}_0]$ независимо от поляризации сильного поля.

Экспериментальная проверка этого вывода осуществлялась с помощью спектрометра (см. рисунок). Излучение моноимпульсного рубинового лазера ($I_0 \simeq 40$—50 Мвт/см^2, $\tau_{и} \simeq 20$ нс) возбуждало раствор красителя (криптоцианин в этаноле, $N = 2 \cdot 10^{-4}$ моль/л) в кювете длиной 1 см, расположенной между скрещенными поляризатором П и анализатором А (степень скрещенности 0,98—0,99). В качестве зондирующего использовалось излучение жидкостного ОКГ, накачка которого производилась излучением того же рубинового лазера. Длина волны и мощность зондирующего потока выбирались таким образом, чтобы наряду с индуцированным дихроизмом [7] (при параллельных линейных поляризациях обеих волн усиление сигнала достигало 2,0) существенным был и эффект двулучепреломления [2] (отстройка длины волны жидкостного ОКГ от максимума полосы поглощения криптоцианина составляла 100—110 нм). Излучение рубинового лазера попадает в полосу поглощения красителя, так что эффекты наведенной анизотропии носят резонансный характер, и вклад иных механизмов (например, оптический эффект Керра) пренебрежимо мал [2].

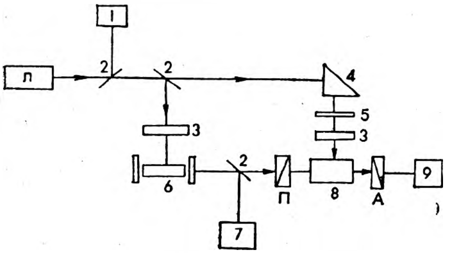


Схема установки:

Л — рубиновый моноимпульсный лазер; *1, 7, 9* — фотоэлемент; *2* — светоделительная пластинка; *3* — цилиндрическая линза; *4* — поворотная призма; *5* — фазовая пластинка; *6* — лазер на красителе; *8* — кювета с исследуемым веществом; П — поляризатор (призма Глана); *А* — анализатор (поляроид)

В эксперименте измерялось отношение сигналов фотоэлемента на выходе анализатора А при возбуждении раствора красителя и без этого возбуждения при различных ориентациях векторов поляризации зондирующей $\underline{e}_1$ и сильной $\underline{e}_0$ волн. При линейной поляризации обеих волн вектор $\underline{e}_0$ обычно фиксировался ортогонально плоскости волновых векторов, а изменялась ориентация $\underline{e}_1$. При этом максимальное увеличение сигнала (с коррекцией на усиление) в пять — шесть раз наблюдалось при взаимной ориентации $\underline{e}_0$ и $\underline{e}_1$ под углом 45° и полностью исчезало при параллельной и ортогональной ориентациях. Для этих двух начальных ориентаций $\underline{e}_1$ увеличение сигнала отсутствует и при изменении состояния поляризации сильной волны вплоть до круговой, которое осуществлялось с помощью фазовых пластинок. Характерным являлось также отсутствие увеличения сигнала любой ориентации $\underline{e}_1$ в том случае, когда при линейной поляризации сильного поля вектор $\underline{e}_0$ совпадал с $\underline{n}_1$. Это вполне понятно, поскольку в соответствии с (5) получаем распространение зондирующей волны вдоль оптической оси.

Таким образом, эксперимент подтверждает вывод теории о том, что нормальные волны для ортогональной геометрии будут иметь линейную поляризацию независимо от поляризации сильного поля.

Список литературы

1. Курасбедиани А. И., Мумладзе В. В. // Оптоэлектроника, квантовая электроника и прикладная оптика.— Тбилиси.—1980.— С. 122.
2. Бонч-Бруевич А. М., Разумова Т. К., Старобогатов И. О. // Опт. и спектроскопия.—1978.— Т. 44.— Вып. 5.— С. 957.
3. Арутюнян В. М., Агаджанян С. А., Мурадян А. Ж., Оганян А. А., Папазян Т. А. // Опт. и спектроскопия.—1985.— Т. 58.— Вып. 2.— С. 459.
4. Буров Л. И., Ганчеренок И. И. // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.—1984.— № 1.— С. 61.
5. Лазеры на красителях // Под ред. Ф. П. Шефера.— М., 1976.
6. Федоров Ф. И. Теория гиротропии.— Минск, 1976.
7. Ярошенко О. И., Рудик К. И. // Письма в ЖТФ.— 1977.— Т. 3.— № 9.— С. 416.

Поступила в редакцию 29.04.85.

УДК 541.65

А. П. ЗАЖОГИН, А. И. СЕРАФИМОВИЧ, С. Н. ШАШКОВ

СПЕКТРОСКОПИЧЕСКИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ КООРДИНАЦИИ НИТРАТНЫХ ГРУПП В СОЕДИНЕНИЯХ УРАНИЛА

Исключительно важную роль в химии урана играют соли уранила, особенно нитраты уранила, благодаря своей способности избирательно извлекаться из воднокислотных растворов рядом дешевых органических экстрагентов. Так, многие схемы технологических процессов, применяемых для извлечения урана из его природных соединений и при разделении продуктов деления урана, включают в себя на той или иной стадии перевод урана в нитрат уранила.

Многочисленные сведения о поведении нитратов уранила в различных чистых и смешанных растворителях свидетельствуют о сложности реальных физико-химических процессов и часто разноречивы [1—3], что до сих пор не позволяет построить количественную теорию растворимости и экстракции этих соединений. Для правильного понимания процессов, происходящих при растворении и экстракции, и для построения теории прежде всего необходимо знать строение комплексов, возникающих в растворах. Например, часто приходится выяснять, входит или не входит нитратная группа в первую координационную сферу иона уранила, а если входит, то каким образом она координирована к нему: уни- или бидентатно; затем, какое количество нитратных групп входит в эту сферу и ряд других вопросов. В связи с этим возникает необходимость разработки корректных спектральных критериев и методик экспериментального исследования процессов комплексообразования нитратных солей уранила.

В настоящей работе на основании анализа спектров КР и ИК поглощения кристаллических солей нитрата уранила, для которых имеются достаточно надежные рентгено- и нейтронографические данные о координации нитратных групп [4, 5], нами сделана попытка выработать некоторые спектральные критерии, необходимые для использования их при изучении комплексообразования уранила в растворах.

Ион NO_3^- в свободном состоянии имеет симметрию D_{3h}, для которой разрешены четыре типа колебаний A_1' (КР) + A_2'' (ИК) + $2E'$(КР, ИК). При координации нитрат-иона к центральному атому металла одним или двумя атомами кислорода (уни- и бидентатная координация соответственно) симметрия его понижается до C_{2v} или иногда до C_s, как следует из работ [4—6], где приведены фрагменты координации нитратных групп в кристаллических структурах некоторых солей уранила. При понижении симметрии нитратной группы в спектрах КР и ИК должны проявляться шесть типов колебаний, активных в обоих спектрах: $3A_1+2B_1+B_2$ при симметрии C_{2v} и $3A' + 3A''$ при симметрии C_s. Проявление шести колебаний в спектрах ИК и КР может произойти не только при непосредственной координации нитратных групп к металлу, но и под влиянием поляризующего влияния катиона, действующего на ион нитрата [7]. Поэтому, как показали расчеты и экспериментальные данные [8], более корректно судить о наличии координированных нитратных групп по величине расщепления колебаний ν_3 (1390 см$^{-1}$) и ν_4 (720 см$^{-1}$) иона NO_3^- симметрии D_{3h}. При этом для унидентатной координации группы NO_3^- низкочастотная компонента расщепления колебания ν_3 имеет тип симметрии A_1. Соответствующая полоса в спектре КР должна быть поляризована, в то время как для бидентатной координации, наоборот,— поляризована высокочастотная компонента.

С учетом изложенного рассмотрим спектральное проявление различия типа координации нитратных групп в нитратных солях уранила.

На рис. 1, 2 изображены спектры КР и длинноволнового ИК поглощения $RbUO_2(NO_3)_3$ и $Rb_2UO_2(NO_3)_4$, а в табл. 1 приведены основные

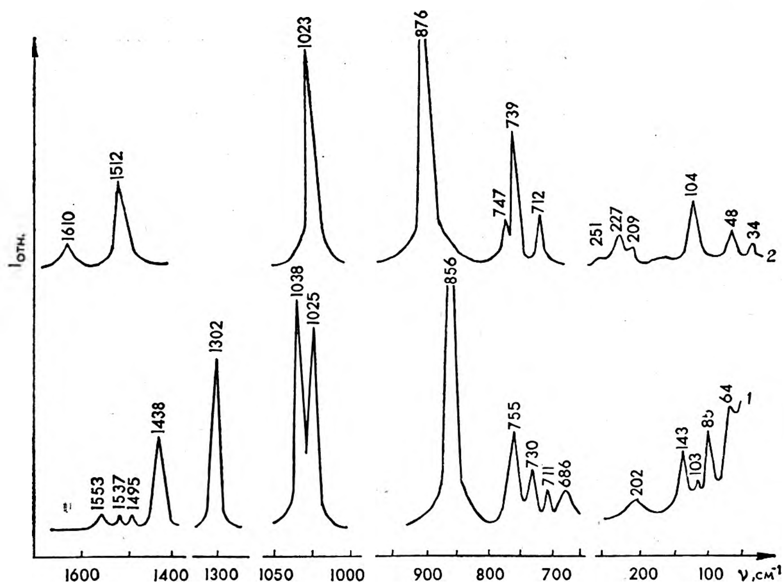


Рис. 1. Спектры КР $Rb_2UO_2(NO_3)_4$ (*1*) и $RbUO_2(NO_3)_3$ (*2*)

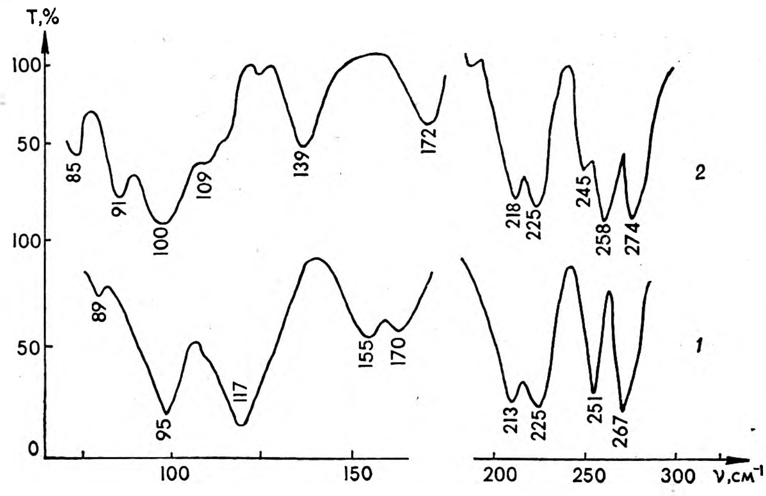
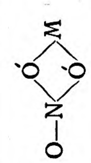


Рис. 2. Спектры длинноволнового ИК поглощения $RbUO_2(NO_3)_3$ (*1*) и $Rb_2UO_2(NO_3)_4$ (*2*)

частоты нитратных групп и их отнесение. Спектры в средней ИК области для уни- и бидентатной координации нитратной группы проанализированы в [2, 3]. Как видно из приведенных данных, для бидентатной координации величина расщепления колебания ν_3 находится в пределах 200—290 см$^{-1}$ (1550—1260 см$^{-1}$), в то время как для унидентатной координации она несколько меньше: 150—180 см$^{-1}$ (1480—1300 см$^{-1}$). Причем величина расщепления для бидентатной координации, как это видно из сравнения табл. 1 и 2, существенно зависит от типа металла-комплексообразователя. Различие двух координаций нитратных групп в соединениях уранила отчетливо прослеживается по спектрам КР (см. рис. 1). Спектр *2* соответствует соединению, в котором нитратные группы координированы ионом уранила бидентатно, а спектр 1 принадлежит смешанной координации нитратных групп (уни- и бидентатной) в соединении $Rb_2UO_2(NO_3)_4$.

Таблица 1

Зависимость фундаментальных частот (см$^{-1}$) нитратных групп от способов их координации к урану

Способ координации	Свободный ион NO_3^- (D_{3h}): $\nu_1 A_1'$ (КР) 1050 (р)	$\nu_2 A_2''$ (ИК) 830	$\nu_3 E'$ (ИК, КР) 1390		$\nu_4 E'$ (ИК, КР) 720		Составная частота: $\nu_1+\nu_4$ (1800—1750)	
Интервал частот для ONO_2^- (C_{2v})	$\nu_2 A_1$	$\nu_6 B_1$	$\nu_1 A_1$	$\nu_4 B_2$	$\nu_3 A_1$	$\nu_5 B_2$	$\nu_2+\nu_3$	$\nu_2+\nu_5$
	1045—1025 (*p*)	830—815 (*d*)	1370—1300 (*p*)	1500—1460 (*d*)	700—675 (*p*)	735—725 (*d*)	1745—1700	1765—1740
	1030—1000 (*p*)	810—795 (*d*)	1565—1510 (*p*)	1290—1240 (*d*)	755—730 (*p*)	720—705 (*d*)	1785—1750	1745—1715

Следует отметить, что колебание ν_4 группы NO_3^- также расщепляется на два при координации нитратной группы, причем для бидентатной координации сдвиг расщепленных компонент происходит в коротковолновую сторону (740—760 см$^{-1}$), а для унидентатной координации — в длинноволновую (680—690 см$^{-1}$). При этом характерно, что для нитратных солей уранила эти колебания регистрируются значительно лучше, чем комбинированные колебания $\nu_2+\nu_3$ и $\nu_2+\nu_5$ нитратной группы симметрии C_{2v}, по которым в некоторых работах [7, 8] предлагают оценивать тип координации.

Кроме указанных, можно было бы использовать еще один критерий для определения типа координации нитратной группы, если проанализировать колебания уран — лиганд. К сожалению, в соединениях уранила в области 250 см$^{-1}$, где должны проявляться эти колебания, могут присутствовать деформационные колебания иона UO_2^{2+}, поэтому в чистом виде для соединений уранила, по-видимому, нельзя выделить колебание связи уран — кислород нитратной группы. На это колебание будет влиять деформация иона уранила, однако анализ спектров ИК поглощения и КР нитратных солей уранила в области 200—300 см$^{-1}$ позволил выделить ряд характерных частот, соответствующих уни- и бидентатной координации нитратных групп. Для бидентатной координации частоты колебаний уран — лиганд в ИК спектре расщепляются на две компоненты 213 и 225 см$^{-1}$. Смешанная координация нитратных групп характеризуется наличием трех полос в указанной области (см. рис. 2). Однако удивительно, что в спектре КР слабо проявляются полосы, характерные для полносимметричных колебаний уран — лиганд, по-видимому,

Таблица 2

Значения $\Delta\lambda_3$ ($см^{-1}$) для различных типов элементов, к которым происходит координация NO_3-групп

Способ координации NO_3-групп	Тип химического элемента			
	s	p	d	f
Унидентатная	102	—	225	180
Бидентатная	185	375	415	250

за счет незначительного изменения поляризуемости связи уран — кислород лиганда.

Таким образом, для установления типа координации группы NO_3^- в уранилнитратных соединениях методами колебательной спектроскопии необходимо учитывать наличие следующих особенностей в спектрах: появление шести колебаний, активных в обоих спектрах; положение полос в спектрах в указанных в табл. 1 интервалах частот; поляризацию полос в спектре КР, величину расщепления полос, ответственных за колебания группы NO_3^-, специфичную для каждой координации, учет полос в спектрах ИК поглощения в области 210—250 $см^{-1}$.

Было рассмотрено влияние природы центрального атома комплексообразователя и второго катиона на величину расщепления вырожденных частот группы NO_3^-. Анализ приведенных данных и ряда других работ позволил составить табл. 2, в которой представлены значения $\Delta\nu_3$ для различных типов элементов, образующих нитратные соли. Из данных табл. 2 можно заключить, что *d*-элементы образуют с нитратными группами наиболее сильную ковалентную связь, если о силе связи судить по величине расщепления дважды вырожденного колебания ν_3 NO_3^--группы, хотя, как это указано в [9], такой вывод может быть преждевременным, если не учитывать других взаимодействий.

Так, в нашем случае на величину расщепления дважды вырожденного колебания ν_3 NO_3^--группы существенное влияние оказывает и наличие катионов в слоях уранила (см. [4, 5]).

Анализ структурных данных [4, 5] показывает, что в тринитратных соединениях уранила $M[UO_2(NO_3)_3]$, где M = Cs, Rb, K, NH_4^+, каждая нитратная группа связана как с ураном, так и с двумя катионами. В соединениях типа $M_2[UO_2(NO_3)_4]$, где M=Cs, Rb, NH_4^+, комплексный анион $[UO_2(NO_3)_4]^{2-}$ контактирует с двенадцатью ионами M, что будет оказывать влияние на частоты нитратных групп. На основании сравнительного анализа колебательных спектров соединений $M[UO_2(NO_3)_3]$ и $M_2[UO_2(NO_3)_4]$ можно сделать следующее заключение. Для бидентатно координированных нитратных групп расщепление ν_3 меньше в соединениях второго типа (см. табл. 1). Указанные результаты можно объяснить тем фактом, что ионное взаимодействие между ионом NO_3^- и M ослабляет связь уран — лиганд, а также частично повышает локальную симметрию группы NO_3^- за счет более симметричного расположения катионов относительно NO_3^--групп.

Таким образом, указанные критерии типа координации нитратных групп в ураниловых соединениях могут быть использованы для установления продукта при изучении природы комплексообразования солей уранила в различных агрегатных состояниях.

Список литературы

1. Рабинович Е., Белфорд Р. Спектроскопия и фотохимия соединений уранила.— М., 1968.
2. Володько Л. В., Комяк А. И., Умрейко Д. С. Ураниловые соединения.— Минск, 1981.— Т. 1.
3. Новицкий Г. Г., Комяк А. И., Умрейко Д. С. Ураниловые соединения.— Минск, 1981.— Т. 2.
4. Barclay G. A., Sabine T. M., Taylor J. C. // Acta Cryst.— 1965.— V. 19.— P. 205.
5. Taylor J. C., Mueller M. H. // Acta Cryst.— 1965.— V. 19.— P. 536.
6. Капшуков И. И., Волков Ю. Ф., Яковлев Г. Н., Москвичев Е. П., Лебедев А. Н.— ЖСХ.—1971.— Т. 12.— С. 94.
7. Беленькая Е. Н., Кириллов С. А., Агулянский А. И.— Теоретич. и эксперимент. химия.—1977.— Т. 13.— № 4.— С. 512.
8. Волков С. В., Яцимирский К. Б. Спектроскопия расплавленных солей.— Киев, 1977.
9. Волков С. В., Грищенко В. Ф., Делимирский Ю. К. Координационная химия солевых расплавов.— Киев, 1977.— С. 257.

Поступила в редакцию 14.05.85.

УДК 621.372.853

А. П. ХАПАЛЮК, Ю. А. ЛОГВИН

ОТКРЫТЫЙ РЕЗОНАТОР С ГАУССОВОЙ ДИАФРАГМОЙ

В простейших оптических резонаторах отражающими элементами служат сферические зеркала, которые корректируют только фазу падающего на них пучка [1]. Дифракция на краях зеркал небольших размеров приводит к корректировке пучка и по амплитуде, что можно учесть, если считать радиус кривизны зеркала комплексной величиной. В этом случае появляется возможность с помощью параболического уравнения изучать резонаторы как с фазовой, так и с амплитудной корректировкой луча [2—5].

В настоящей работе рассчитывается резонатор, первое зеркало которого имеет комплексный радиус кривизны $\rho = \rho_1 + i\rho_2$ (содержит гауссову диафрагму [1]). В параксиальном приближении коэффициент отражения зеркала определяется формулой

$$R_1(x) = R_{01} \exp(ikNx^2/\rho_1 + i\rho_2), \quad (1)$$

где ρ_1 учитывает фазовую, а ρ_2 — амплитудную корректировку пучка; R_{01} — постоянная часть коэффициента отражения; k — волновое число; $N = n + i\varkappa$ — комплексный показатель преломления среды, заполняющей резонатор. Второе зеркало предполагается плоским с постоянным коэффициентом отражения R_2. Первое зеркало расположено при $z = 0$, второе — при $z = L$ (L — длина резонатора). Для выяснения принципиальной роли мнимой части радиуса кривизны ρ_2 достаточно ограничиться двумерным (z — продольная, x — поперечная декартовые координаты) случаем и рассмотреть основную (гауссову) моду.

Как обычно [1], поперечную компоненту электрического поля моды будем искать в виде суммы двух простых гауссовых пучков с противоположными направлениями распространения:

$$\begin{aligned} E^a(x, z) &= \frac{A \exp(-ikNz)}{\sqrt{knw_a^2 - i(z-a)}} e^{-\frac{kN}{2} \frac{x^2}{knw_a^2 - i(z-a)}}, \\ E^b(x, z) &= \frac{B \exp(ikNz)}{\sqrt{knw_b^2 + i(z-b)}} e^{-\frac{kN}{2} \frac{x^2}{knw_b^2 + i(z-b)}}, \end{aligned} \quad (2)$$

где амплитуды A и B, радиусы пучков в локусах (шейках) w_a и w_b, положение локусов a и b определяются из условий согласования пучков (граничных условий) на зеркалах.

$$E^a(x, 0) = R_1(x) E^b(x, 0), \; R_2 E^a(x, L) = E^b(x, L). \tag{3}$$

Эти равенства должны выполняться тождественно относительно x. Поэтому, подставляя (1) и (2) в (3), необходимо в каждом из двух равенств по отдельности приравнять в экспонентах коэффициенты при x^2:

$$\frac{1}{knw_b^2 - ib} - \frac{1}{knw_a^2 + ia} = \frac{2i}{\rho_1 + i\rho_2},$$

$$\frac{1}{knw_b^2 + i(L-b)} - \frac{1}{knw_a^2 - i(L-b)} = 0. \tag{4}$$

С учетом (4) в выражении (3) можно провести сокращение на общие множители, а оставшуюся часть записать в виде

$$A = BR_{01}\sqrt{\frac{knw_a^2 + ia}{knw_b^2 - ib}}, \qquad AR_2\sqrt{\frac{knw_b^2 + i(L-b)}{knw_a^2 - i(L-a)}} = Be^{2ikNL}. \tag{5}$$

Уравнения (4) не содержат искомых амплитуд, и их можно решать независимо от системы (5). Относительно искомых величин это несложные уравнения, и их решения можно записать в виде:

$$knw_a^2 + ia - iL = knw_b^2 - ib + iL = \sqrt{L[(\rho_1 - L) + i\rho_2]}, \tag{6}$$

при этом выбирается та ветвь корня, у которой действительная часть положительна, а знак мнимой совпадат со знаком мнимой части подкоренного выражения. Разделяя в (6) действительные и мнимые части, окончательно получаем формулы для определения параметров пучков через параметры резонатора:

$$\begin{aligned} knw_a^2 &= knw_b^2 = \sqrt{\frac{L}{2}}\sqrt{\sqrt{(\rho_1 - L)^2 + \rho_2^2} + (\rho_1 - L)}, \\ a - L &= -(b - L) = \operatorname{sgn}\rho_2 \sqrt{\frac{L}{2}}\sqrt{\sqrt{(\rho_1 - L)^2 + \rho_2^2} - (\rho_1 - L)}. \end{aligned} \tag{7}$$

Математическое условие разрешимости системы (5) относительно амплитуд A и B будет условием генерации

$$R_{01}R_2 \exp(-2ikNL) = \sqrt{\frac{\sqrt{\rho_1 - L + i\rho_2} - i\sqrt{L}}{\sqrt{\rho_1 - L + i\rho_2} + i\sqrt{L}}} = de^{i\delta}. \tag{8}$$

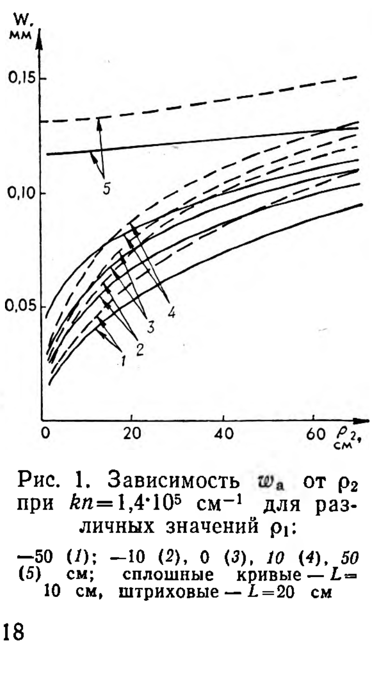


Рис. 1. Зависимость w_a от ρ_2 при $kn = 1{,}4 \cdot 10^5$ см$^{-1}$ для различных значений ρ_1:

—50 (*1*); —10 (*2*), 0 (*3*), *10* (*4*), *50* (*5*) см; сплошные кривые — L= 10 см, штриховые — L=20 см

Исследуем и физически интерпретируем полученные результаты.

В соответствии с физическим смыслом радиус пучка должен быть положительным числом. Это требование следует считать условием устойчивости резонатора [1]. В этом смысле при наличии амплитудной корректировки ($\rho_2 \neq 0$) резонатор всегда будет устойчивым даже при рассеивающей линзе ($\rho_1 < 0$). Неустойчивым резонатор оказывается при выполнении условий: $\rho_2 = 0$ и $\rho_1 < L$.

Из первой формулы в (7) видно, что радиус пучка не зависит от знака параметра ρ_2. На рис. 1 показана зависимость радиуса пучка в локусе от параметра $|\rho_2|$ для различных значений ρ_1 и L. При малых значениях $|\rho_2|$ эта зависимость для фазово-устойчивых и фазово-неустойчивых резонаторов качественно различна. Для устойчивых резонаторов, у которых $\rho_1 > L$, (кривые *5*) при $|\rho_2| \to 0$ радиус пучка принимает некоторое значение, медленно и монотонно возрастающее при увеличении $|\rho_2|$. Для неустойчивых резонаторов, у которых $\rho_1 < L$, (остальные кривые) при $|\rho_2| \to 0$ радиусы пучков стремятся к нулю и, следовательно, резонаторы теряют устойчивость. При увеличении $|\rho_2|$ радиусы пучков для таких резонаторов вначале быстро возрастают, затем их рост замедляется.

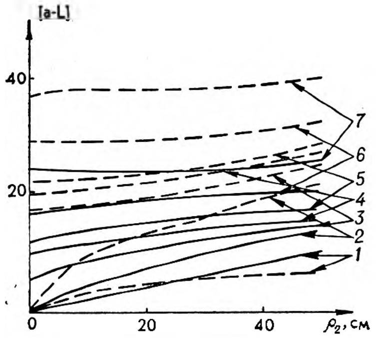
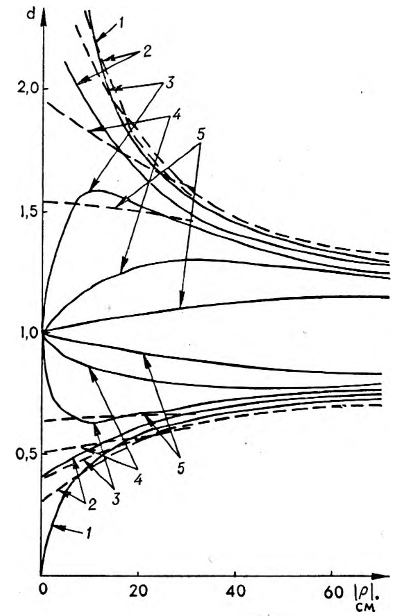


Рис. 2. Зависимость $|a-L|$ от ρ_2 для различных значений ρ_1:

—50 (*1*), —20 (*2*), —5 (*3*), 0 (*4*), 5 (*5*), 20 (*6*), 50 (*7*) см; сплошные кривые — $L=10$, штриховые — $L=20$ см

Рис. 3. Зависимость параметра d от $|\rho_2|$ для различных значений $|\rho_1|$:

0 (*1*); 5 (*2*), 10 (*3*), 20 (*4*), 50 (*5*) см. Сплошные кривые соответствуют положительным, штриховые — отрицательным значениям ρ_1, для положительных ρ_2 кривые располагаются ниже прямой $d=1$, для отрицательных ρ_2 — выше



Положение локуса пучка определяется второй формулой в (7), и зависимость его от параметра ρ_2 можно проследить по рис. 2. При $\rho_2 > 0$ локус пучка, распространяющегося от гауссовой диафрагмы к плоскому зеркалу, всегда находится за пределами резонатора ($a > L$). При не слишком малом радиусе пучка в локусе выходящий из резонатора со стороны плоского зеркала пучок реально может иметь предельно малую расходимость. Другой пучок, распространяющийся по направлению к гауссовой диафрагме, имеет локус внутри резонатора при $4L\rho_1 < \rho_2^2$ и вне резонатора при $4L\rho_1 > \rho_2^2$. В последнем случае выходящий со стороны диафрагмы пучок также может иметь малую расходимость. При $\rho_2 < 0$ положения локусов в пучках меняются местами, предельно минимальная расходимость будет у пучка, выходящего из резонатора со стороны диафрагмы.

Изменение порога генерации определяется модулем правой части равенства (8), т. е. параметром d, зависимость которого от ρ_2 представлена на рис. 3. Для фазово-устойчивых резонаторов ($\rho_2 = 0$) $d = 1$, и, следовательно, порог их генерации не зависит от радиуса кривизны сферического зеркала. На рис. 3 все кривые для таких резонаторов начинаются с единицы, и их изменение с ростом $|\rho_2|$ немонотонно; они имеют экстремальные точки. Кривые, которые начинаются не с единицы, соответствуют неустойчивым резонаторам, у которых $\rho_1 < L$ [2—4]. Для них слишком малое значение $|\rho_2|$ следует считать нереальным (неустойчивым) случаем, и формально d в этой области может принимать произвольное значение. С увеличением $|\rho_2|$ параметр довольно быстро принимает значение, сравнимое с единицей. Причем для $\rho_2 > 0$ оно всегда меньше, при $\rho_2 < 0$ — всегда больше единицы. В первом случае порог генерации уменьшается, во втором — увеличивается. В типичных ситуациях, когда параметр d сравним с единицей, дифракционные потери энергии моды невелики и практически легко могут быть скомпенсированы за счет усиления активной среды, а также и за счет постоянных множителей коэффициентов отражения зеркал.

Собственный спектр резонатора с диафрагмой существенно не изменяется; он в целом сдвигается по шкале частот. Величина сдвига зависит от всех параметров резонатора и детально изучать его не будем.

Список литературы

1. Бельский А. М., Корнейчик Т. М., Хапалюк А. П. Пространственная структура лазерного излучения.— Минск, 1982.
2. Ананьев Ю. А. Оптические резонаторы и проблема расходимости лазерного излучения.— М., 1979.
3. Siegman A. E. // IEEE.— 1965.— V. 53.— P. 277.
4. Звелто О. Принципы лазеров.— М., 1984.
5. Zucker H. // J. Bell. Syst. Tech.— 1970.— V. 49.— P. 2349.

Поступила в редакцию 03.06.85.

УДК 681.327.22

А. С. ЛОБКО, О. В. МИСЕВИЧ

ГРАФИЧЕСКАЯ ПРИСТАВКА К АЛФАВИТНО-ЦИФРОВОМУ ДИСПЛЕЮ

При решении задач автоматизации физического эксперимента часто возникает необходимость в оперативном визуальном контроле графической информации: графиков функций, спектров, статистических распределений и т. п. Отображение такой информации на экране алфавитно-цифрового дисплея, являющегося терминалом управляющей э. в. м., позволяет отказаться от применения графических дисплеев и других специализированных видео-контрольных устройств. Чтобы снизить нагрузку э. в. м., целесообразно для регенерации графического изображения применять буферное запоминающее устройство (БЗУ). Однако при кодировании графической информации по известной системе «бит — точка» емкость БЗУ должна быть достаточно большой, что приводит к увеличению времени его заполнения и объема вспомогательной логики (см., например, В. Д. Бахмацкий и др. Графическая приставка к растровому знаковому дисплею // ПТЭ.— 1984.— № 2.— С. 53). В большинстве физических приложений достаточно отображать некоторые зависимости, представляющие собой однозначные функции аргумента, в виде графиков или гистограмм. Для их кодирования можно записывать в БЗУ только ординаты точек графика.

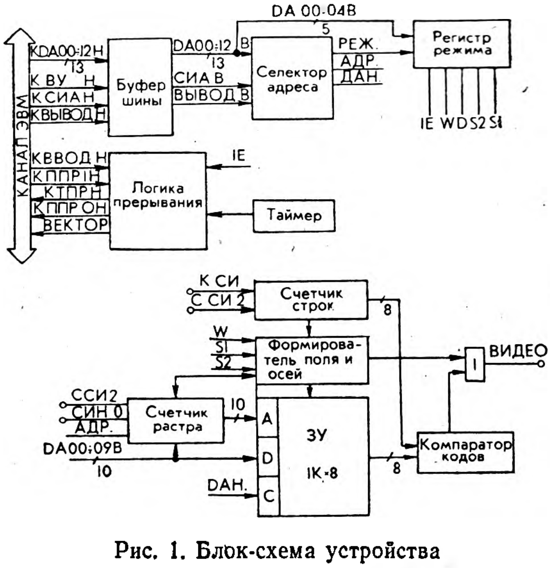


Рис. 1. Блок-схема устройства

Нами разработана графическая приставка к алфавитно-цифровому дисплею 15ИЭ00-013, в которой минимизированы аппаратные и программные затраты. Устройство позволяет выводить на экран два графика однозначных функций в поле форматом 512×256 точек, ограниченное коорди-

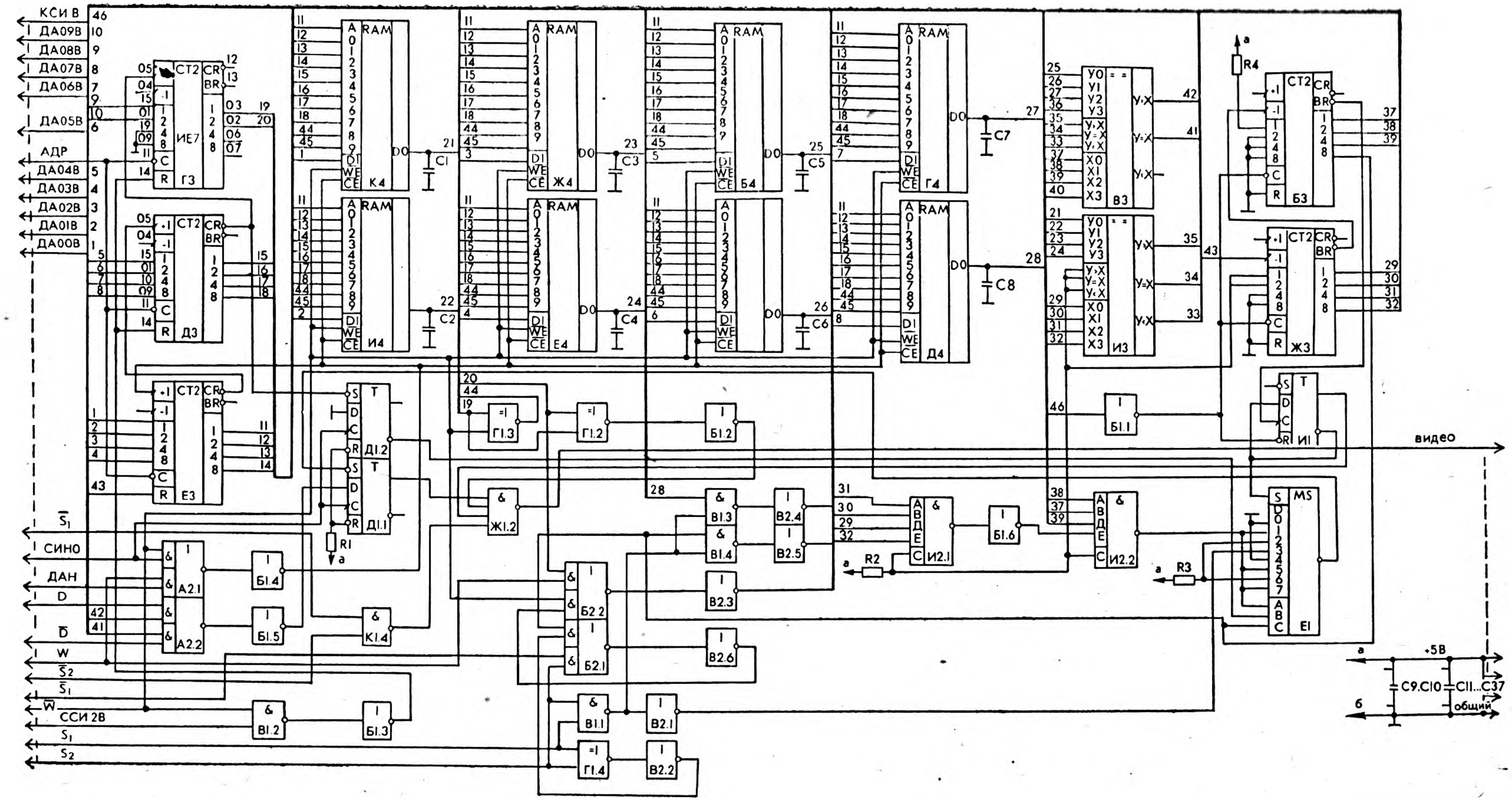


Рис. 2. Схема принципиальная электрическая. А2, Б2-К531ЛР11; Б3, Г3, Д3, Ж3, Е3-К155ИЕ7; Б4, В4, Г4, Д4, Е4, Ж4, И4, К4-КР 132РУ4; И3, В3-К531СП1; И1-К155ТМ2; И2-К155 ЛЕ3; Е1-К155КП7; К1, В1-К531ЛА3; Б1, В2-К531ЛН1; Г1-К531ЛП5; Д1-К531ТМ2; Ж1-К531ЛА16; С1...С8-120п; С9, С10-68. 0×6В; С11...С37-0.15. (В связи с высокой опорной частотой наличие емкостей развязки по питанию необходимо.)

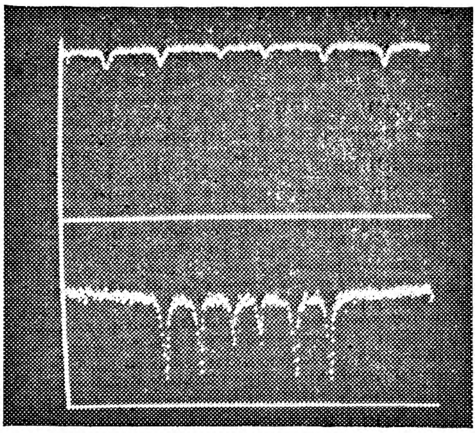


Рис. 3. Пример работы графической приставки в составе двухканального мессбауэровского спектрометра

натными осями, представлять информацию в виде гистограмм и осуществлять прерывание программы по сигналу встроенного таймера каждые 5—15 с для обновления информации в БЗУ. Программа обслуживания для э. в. м. «Электроника НЦ-80/20-1», осуществляющая вывод информации, масштабировку по оси Y и краткий диалог с пользователем, имеет объем менее 100 машинных команд.

Структурная схема устройства изображена на рис. 1. Приставку можно разделить на две основные функциональные части: собственно устройство графического отображения и стандартный интерфейс Q — *bus*., конкретная схема которого определяется типом используемой э. в. м. и нами не рассматривается. Устройство содержит три программно-доступных регистра: пятиразрядный регистр режима, десятиразрядный регистр адреса ячейки БЗУ (счетчик растра) и восьмиразрядный регистр данных. Разряды регистра режима имеют следующее назначение: $S1$ и $S2$ управляют гашением выводимых графиков; $D = 1$— режим гистограммы (подсветки площади, ограниченной графиком сверху и осью X снизу); $W = 0$ — режим автоматического отображения содержимого БЗУ; $W = 1$ — режим записи информации в буфер; $IE = 1$ — разрешение прерывания от встроенного таймера. Период работы таймера устанавливается в соответствии с типовым временем существенного изменения подлежащих отображению данных.

Устройство отображения состоит из следующих основных функциональных блоков: БЗУ емкостью $1K \times 8$ бит для хранения двух графиков по 512 точек каждый, счетчика строк, счетчика растра и компаратора кодов. Приставка принимает от дисплея кадровые синхроимпульсы КСИ, строчные синхроимпульсы ССИ2, тактовую частоту растра СИНО и выдает видеосигнал ВИДЕО, который логически суммируется с алфавитно-цифровым видеосигналом непосредственно на выходном вентиле Д11 платы ГС (генератор символов) дисплея, что позволяет знаковой информации накладываться на графическую. Отображение информации осуществляется таким образом. По сигналу тактовой частоты СИНО переключается счетчик растра, адресующий БЗУ, и происходит последовательная выборка кодов ординат из памяти. Коды ординат сравниваются компаратором с содержимым счетчика строк, переключаемого строчными синхроимпульсами ССИ2 и следящего за положением луча по вертикали. При совпадении кодов формируется импульс подсвета точки графика. В режиме отображения гистограммы ($D=1$) подсвет включается при превышении ординатой текущего значения счетчика строк.

Полная принципиальная схема графической приставки (без интерфейса) показана на рис. 2. В режиме записи информации в БЗУ ($W = 1$) в счетчик растра (Г3, Д3, Е3) программно заносится начальный адрес записываемого участка графика ($0 \div 1777_8$). Выходы счетчика растра подключены к адресным входам схем памяти (Б4, Г4, Д4, Е4, Ж4, И4, К4). Далее в регистр данных последовательно заносятся информационные байты. По сигналу ДАН они записываются в последовательные ячейки БЗУ, так как счетчик растра в этом режиме автоматически инкрементируется. Количество передаваемых байтов должно подсчитываться программой вывода. После заполнения БЗУ устройство может быть переведено в режим отображения ($W = 0$).

В этом случае на счетчик растра и входы выборки CE микросхем памяти подается сигнал СИНО. Таким образом, в каждой точке растра осуществляется выборка содержимого памяти. Очевидно, схемы памяти должны иметь время считывания не более периода сигнала СИНО (55 нс). Содержимое каждой ячейки БЗУ сравнивается с помощью компаратора кодов (В3, И3) с содержимым счетчика строк (Б3, Ж3). В случае совпадения кодов содержимого ячейки БЗУ и состояния счетчика на выходе «$Y = X$» компаратора возникает импульс, который, проходя через вентиль формирования гистограммы А2.2, триггер видеосигнала Д1.1 и вентиль Ж1.2, преобразуется в видеоимпульс. Цепь Г1.2, Г1.3, Б1.2 представляет собой формирователь сигнала границ поля по оси X, триггер И1 — формирователь сигнала границ поля по оси Y, цепь И2.1, И2.2, Е1, Д1.1, Д1.2 — формирователи осей X и Y. Нерассмотренные вентили составляют дешифратор режимов работы устройства.

Таким образом, применение синхроимпульсов дисплея и непосредственной выборки из БЗУ каждой точки растра позволило значительно упростить схемную реализацию и программную поддержку рассмотренного устройства. Графическая часть содержит 27 микросхем, а полностью приставка размещается на одинарной плате э. в. м. «Электроника-60». В настоящее время устройство используется в двухканальном мессбауэровском спектрометре (рис. 3). Опыт показал ее высокую надежность и хорошие эксплуатационные качества.

Авторы благодарят Т. В. Воложину за помощь в подготовке материалов статьи.

Поступила в редакцию 17.09.85.

УДК [539.143+681.12]:662.6/8

А. Е. ПРЯХИН, И. О. ОРОБЕЙ,
РОМАН ПАДИЛЬЯ АЛЬВАРЕС, А. Е. ФАЙБЫШЕВ

ЯДЕРНО-МАГНИТНЫЙ РАСХОДОМЕР ТОПЛИВА

Растущие требования к экономии энергетических ресурсов обусловливают необходимость совершенствования методов и аппаратуры для измерения расхода жидкостей, в частности топлива. Расходомеры, используемые в настоящее время, малоэффективны при измерении небольших расходов вследствие значительного влияния аппаратуры на измеряемый поток, что ведет к возрастанию погрешности. Поэтому общей тенденцией является переход к бесконтактным методам измерения расхода, наиболее перспективны из которых методы, основанные на эффекте ядерного магнитного резонанса (ЯМР) [1, 2].

Существуют различные модификации ЯМР-расходомеров (например, амплитудные, нутационные, меточные и т. д.) [1—4]. Для решения поставленной задачи (измерение расхода топлива автомобильными двигателями) выбран меточный измеритель расхода как наиболее точный, информативный и простой в реализации. Принцип действия такого расходомера состоит в магнитной отметке жидкости и регистрации с помощью ЯМР времени прохождения отметкой измерительного участка.

Измеряемая жидкость поляризуется в магнитном поле $B_п$ поляризатора (рис. 1), т. е. приобретает макроскопическую ядерную намагниченность, затем по транспортному участку $L_т$ трубопровода поступает в магнитное поле $B_н$, где происходит отметка части объема измеряемой жидкости путем динамической переориентации (нутации) вектора ядерной намагниченности [3, 5]. Регистрация отметки производится в анализаторе, расположенном на расстоянии $L_и$ от места отметки. Анализатором служит автодинный спиновый детектор. Для повышения отношения сигнал / шум используется модуляционный метод регистрации сигнала ЯМР с последующим синхронным детектированием.

Поведение вектора ядерной намагниченности при поляризации, а также условия регистрации существенно зависят от расхода жидкости вследствие особенностей ЯМР в проточной жидкости: протяженности во времени процесса поляризации и уменьшения влияния насыщения в движущейся жидкости вследствие постоянного притока ненасыщенной жидкости в анализатор [3]. Ход процесса поляризации обусловлен временем релаксации ядер и топографией магнитных полей. Измеряемая жидкость последовательно намагничивается в поле поляризатора, затем размагничивается на транспортном и домагничивается на измерительном участках в поле анализатора. Результирующий ход зависимости намагниченности жидкости на входе в анализатор от расхода описывается выражением:

$$M_{а} = \pm \chi B_{п}\left(1 - e^{-\frac{V_{п}}{QT_1}}\right) e^{-\frac{V_{т}}{QT_1}} e^{-\frac{V_{и}}{QT_1}} + \chi\left[B_{а} \pm B_{п}\left(1 - e^{-\frac{V_{п}}{QT_1}}\right) \times e^{-\frac{V_{т}}{QT_1}} e^{-\frac{V_{и}}{QT_1}}\right]\left(1 - e^{-\frac{V_{а}}{QT_1}}\right),$$

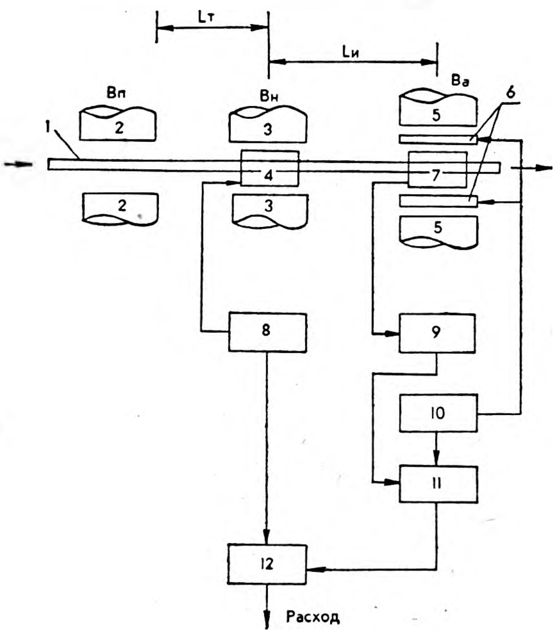


Рис. 1. Структурная схема ЯМР-расходомера топлива:

1 — трубопровод; *2* — магниты поляризатора; *3* — магниты нутации; *4* — катушка нутации (отметки); *5* — магниты анализатора; *6* — катушки модуляции; *7* — катушка регистрации; *8* — генератор нутации (отметки); *9* — автодинный спиновый детектор; *10* — генератор модуляции; *11* — синхронный детектор; *12* — преобразователь длительности импульса в расход

где χ — статическая магнитная восприимчивость; Q — расход жидкости; T_1 — время продольной релаксации ядер; $V_{п}$, $V_{т}$, $V_{и}$, $V_{а}$ — объем поляризатора, транспортного участка, измерительного участка вне магнитного поля, измерительного участка в поле анализатора соответственно. Знаки «+», «—» в формуле соответствуют объему жидкости с неинвертированной и инвертированной намагниченностью.

На рис. 2 показана зависимость намагниченности жидкости от расхода в случаях без отметки (поле нутации отсутствует) и при отметке (в поле нутации осуществляется динамическая переориентация на 180° вектора ядерной намагниченности). Так как сигнал на выходе анализатора пропорционален намагниченности, отметка представляет собой разность напряжений на выходе синхронного детектора, соответствующих намагниченности без нутации и при инверсии вектора ядерной намагниченности. Видно, что сигнал отметки меняется с расходом и содержит постоянную составляющую (см. рис. 2, кривая *3*).

Явление уменьшения насыщения в движущейся жидкости описывается введением эффективного времени продольной релаксации $T_{эф}$, характеризующего как естественные релаксационные процессы, так и коэффициент сменяемости ядер в зоне резонанса:

$$\frac{1}{T_{эф}} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_{11}},$$

где T_{11} — время, за которое в зоне резонанса $(1 - 1/e)$ часть насыщенных ядер сменяется ненасыщенными. Таким образом, эффективная ширина линии зависит от расхода. Для получения максимального отношения сигнал / шум амплитуда модуляции должна быть примерно равна ширине линии, а коэффициент насыщения должен быть близок к единице. В нашем случае выполнение этих условий требует введения сложной следящей системы, обеспечивающей оптимальные условия регистрации сигнала ЯМР для всех возможных расходов или выбора близких к оптимальным в нужном диапазоне расходов условий регистрации сигнала ЯМР. С целью оптимизации параметров расходомера сняты зависимости интенсивности сигнала ЯМР от расхода при различных амплитудах генерации резонансного осциллирующего поля спинового детектора, а также формы первой производной линии поглощения при разных расходах и выбраны условия регистрации (амплитуда генерации резонансного осциллирующего поля 0,08 В, амплитуда модуляции $1{,}2 \cdot 10^{-4}$ Тл).

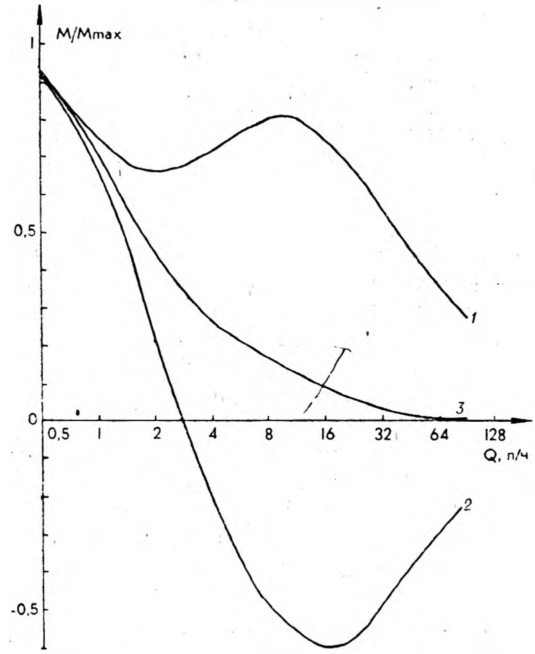


Рис. 2. Зависимость намагниченности жидкости в катушке анализатора от расхода в относительных единицах для воды ($T_1 = 2$ с):

1 — без отметки и *2* — при отметке жидкости (в поле нутации осуществляется инверсия вектора ядерной намагниченности); *3* — постоянная составляющая сигнала отметки

Разработанный расходомер топлива имеет следующие параметры: диапазон измеряемых расходов 1,5—60 л/ч, погрешность измерения $\pm$ 1 %, вносимое гидравлическое сопротивление, оцененное по величине потерянного напора, 70 Па на л/ч.

Эксплуатационные испытания расходомера в автохозяйстве доказали правильность выбранных принципов построения и подтвердили эффективность использования предлагаемого расходомера для регулировки двигателей на топливную экономичность.

Список литературы

1. Кремлевский П. П. Расходомеры и счетчики количества.— Л., 1975.
2. Расчет и конструирование расходомеров / Под ред. П. П. Кремлевского.— Л., 1978.
3. Жерновой А. И., Латышев Г. Д. Ядерный магнитный резонанс в проточной жидкости.— М., 1964.
4. Жерновой А. И. Применение ядерного магнитного резонанса в измерительной технике.— Л., 1980.
5. Жерновой А. И. Измерение магнитных полей методом нутации.— Л., 1979.

Поступила в редакцию 17.09.85.

УДК 621.315.590

В. П. ДОБРЕГО, О. П. ЕРМОЛАЕВ,
С. КАБА, М. И. ТАРАСИК

ВЛИЯНИЕ ОДНООСНОГО СЖАТИЯ НА ПРЫЖКОВУЮ ПРОВОДИМОСТЬ ПО МЕЛКИМ УРОВНЯМ РАДИАЦИОННЫХ ДЕФЕКТОВ В ГЕРМАНИИ

Прыжковая проводимость по мелким уровням радиационных дефектов $E_v + 0{,}016$ эВ, возникающих при облучении германия быстрыми реакторными нейтронами, исследовалась ранее [1—3]. Из анализа экспериментальных данных в соответствии с теорией прыжковой проводимости [4] определена величина эффективного боровского радиуса дефекта с уровнем $E_v+0{,}016$ эВ. Эта величина, равная 40 Å, приблизительно в два раза меньше боровского радиуса галлия. Представляет интерес исследовать влияние деформации на германий с дефектами акцепторного типа, отличающимися своими свойствами от химических водородоподобных центров.

Цель настоящей работы изучить влияние одноосной упругой деформации на прыжковую проводимость по мелким уровням радиационных дефектов в германии. Исследовались образцы германия, легированного мышьяком ($N_D \approx 2 \cdot 10^{15}$ см$^{-3}$), которые в результате облучения быстрыми реакторными нейтронами превратились в образцы p-типа (см. таблицу). Для ослабления потока тепловых нейтронов при облучении образцы помещали в кадмиевые пеналы с толщиной стенок приблизительно 1 мм. Концентрация дефектов с мелкими энергетическими уровнями $E_v + 0{,}016$ эВ определена из анализа температурных зависимостей коэффициента Холла и изменялась от $\sim 8 \cdot 10^{15}$ до $2 \cdot 10^{17}$ см$^{-3}$. Измерения коэффициента Холла и удельного сопротивления проводились в области температур 1,8—300 К. Механическое напряжение одноосного сжатия прикладывалось вдоль направления [III] и изменялось до $\sim 3 \cdot 10^8$ Па.

Основные характеристики исследуемых образцов

Номер п.п.	Примесь	N_D, см$^{-3}$	Ф, см$^{-2}$	$p^{300}_{обл}$, см$^{-3}$	$N_{0,016}$, см$^{-3}$	К
1	As	$2{,}5 \cdot 10^{15}$	$5 \cdot 10^{16}$	$2 \cdot 10^{16}$	$8 \cdot 10^{15}$	0,17
2	As	»	$1{,}6 \cdot 10^{17}$	$7 \cdot 10^{16}$	$2{,}2 \cdot 10^{16}$	0,20
3	As	»	$1 \cdot 10^{19}$	$4 \cdot 10^{17}$	$2 \cdot 10^{17}$	—
4	As	»	$8 \cdot 10^{16}$	$3{,}6 \cdot 10^{16}$	$1{,}4 \cdot 10^{16}$	0,25
5	Sb	$6 \cdot 10^{13}$	$4{,}5 \cdot 10^{16}$	$1{,}2 \cdot 10^{16}$	$6{,}5 \cdot 10^{15}$	0,20

Примечания: N_D — концентрация примеси в исходных образцах; Ф — интегральный поток быстрых нейтронов; $p^{300}_{обл}$ — концентрация дырок в облученных образцах при 300 К; $N_{0,016}$ — концентрация дефектов с уровнями $E_v+0{,}016$ эВ; K — степень компенсации.

Прыжковое сопротивление полупроводников можно характеризовать двумя основными параметрами — энергией активации E_3 и коэффициентом ρ_3 [4]:

$$\rho = \rho_3 \exp(E_3/kT), \quad \rho_3 = \rho_{30} \exp[1{,}74/(N^{1/3} \cdot a^*)], \qquad (1)$$

где a^* — боровский радиус; ρ_{30} степенным образом зависит от концентрации примесей N.

Экспериментально E_3 определяется по наклону прямой на графике $\lg \rho = f(1/T)$ в низкотемпературной области, а величина ρ_3 — по точке пересечения продолжения этой прямой с осью ординат.

Для всех образцов с увеличением приложенного давления удельное сопротивление растет, достигая некоторого максимального значения, затем начинает уменьшаться. Отметим, что для образцов с концентрацией дефектов $8 \cdot 10^{15}$ см$^{-3}$ (рис. 1, кривые *1*) энергия активации прыжковой проводимости практически не изменялась с увеличением приложенного давления. Для образцов с концентрацией дефектов $2{,}2 \cdot 10^{16}$ см$^{-3}$ (см. рис. 1, кривые *2*) энергия активации изменялась от 1,2 мэВ (при $P = 0$) до 1,08 мэВ (при $P = 2 \cdot 10^8$ Па). Таким образом, наибольший вклад в изменение удельного сопротивления исследуемых образцов вносило изменение коэффициента ρ_3 при приложении давления. Отметим, что зависимости ρ_3 и ρ от величины приложенного давления аналогичны.

На рис. 2 показана зависимость отношения удельного сопротивления при приложении давления к удельному сопротивлению недеформированного образца от величины приложенного давления в направлении [III] при температуре 4,2 и 2 К. С повышением давления отношение ρ/ρ_0 вначале растет, достигая максимального значения, а затем начинает падать. Такой ход кривых наблюдался для всех исследуемых образцов, но значения $(\rho/\rho_0)_{\max}$ и давления, при котором максимум имеет место, различны. С увеличением концентрации дефектов величина давления, соответствующего $(\rho/\rho_0)_{\max}$, растет. Значение отношения $(\rho/\rho_0)_{\max}$ уменьшается с повышением концентрации дефектов. При уменьшении температуры в большинстве исследуемых образцов величина отношения $(\rho/\rho_0)_{\max}$ несколько увеличивалась и сам максимум смещался в сторону меньших давлений. Поведение прыжкового пьезосопротивления германия, легированного примесями III группы, объяснено в [4—6] расщеплением валентной зоны и смещением компонентов основного состояния акцепторов, вызванными одноосной упругой деформацией. При больших давлениях, когда расщепление намного превышает энергию связи акцептора, зависимость энергии дырок от волнового вектора $E(\vec{k})$ имеет простой эллипсоидный вид, и поведение волновой функции акцептора на больших расстояниях от центра описывается зависимостью [4—6]:

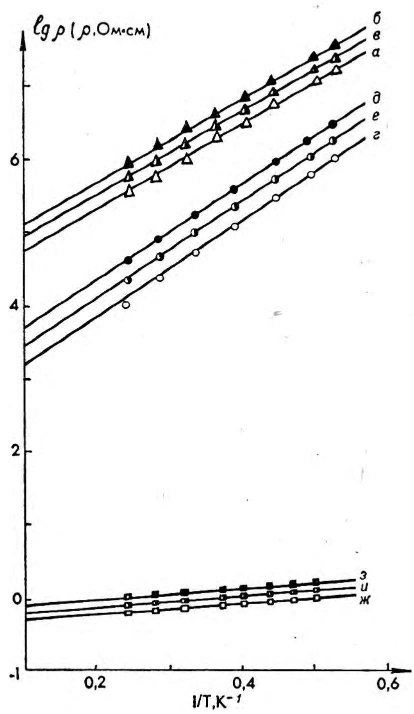


Рис. 1. Температурная зависимость удельного сопротивления при различных значениях приложенного давления:

а, г, ж — $P=0$; *б, д, з* — $P=2 \cdot 10^8$ Па; *в, е, и* — $P=3 \cdot 10^8$ Па. Номера кривых соответствуют номерам образцов в таблице

$$\psi \sim \exp\left[-\left(\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}\right)\right], \qquad (2)$$

где

$$a = \frac{\hbar^2}{\sqrt{2m_\perp E}}, \qquad b = \frac{\hbar^2}{\sqrt{2m_{||} E}}, \qquad a^* = (a^2 b)^{1/3}.$$

В [5] получена величина эффективного боровского радиуса при предельно больших давлениях, равная 98 Å, т. е. больше, чем равный 90 Å радиус акцепторного состояния галлия в недеформированном кристалле. Одноосное сжатие *p*-Ge по оси [100] приводит поэтому к уменьшению сопротивления. Сходная картина наблюдалась в [5] и для одноосного сжатия по оси [III]. Следует отметить качественное сходство поведения прыжкового пьезосопротивления в образцах германия, исследуемых

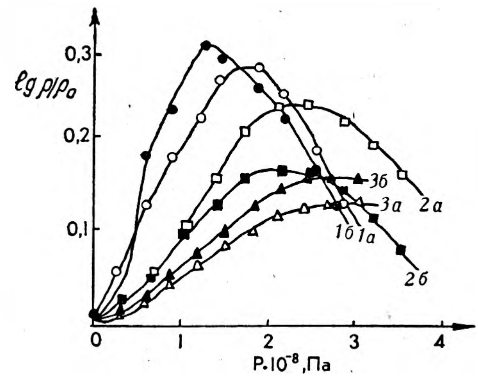


Рис. 2. Зависимость отношения $\rho(P)/\rho(0)$ от величины давления. Номера кривых соответствуют номерам образцов в таблице; *а* — 4,2, *б* — 2 К

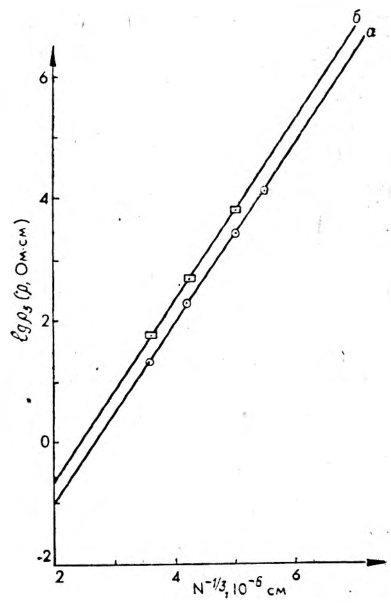


Рис. 3. Зависимость коэффициента ρ_3 от концентрации дефектов:

_а_ — недеформированные образцы; _б_ — 2,5·10⁸ Па

в настоящей работе, и в германии, легированном химическими примесями III группы. Необходимо, однако, при этом обратить внимание на существенные количественные различия. Так, величина давления, при котором имеет место максимум отношения ρ/ρ_0 в наших экспериментах, была примерно в два раза больше, чем для германия, легированного Ga [4]. Давление, при котором отношение становится равным единице, для германия с радиационными дефектами также приблизительно вдвое больше, чем для германия с галлием. Значение отношения ρ/ρ_0 в максимуме в наших экспериментах было значительно меньше, чем для германия с галлием, что может быть, по крайней мере, частично связано с большей степенью компенсации наших образцов. Отмеченные особенности обусловлены различием структуры химических акцепторов III группы и радиационных дефектов акцепторого типа, которые по своей природе и свойствам отличаются от точечных водородоподобных центров [2].

Из наклона экспериментальных прямых к оси концентраций (рис. 3) определена величина эффективного боровского радиуса волновой функции дырки на дефекте с уровнем $E_v + 0{,}016$ эВ. Для недеформированных кристаллов она оказалась равной 43 Å (см. рис. 3, кривая *а*). С приложением давления экспериментальная кривая *б* пошла выше кривой *а*, хотя наклон ее остался практически неизменным и, следовательно, боровский радиус также практически остался прежним. Следовательно, согласно (1), увеличение ρ_3 под действием деформации может быть связано с ростом ρ_{30}. Практически неизменная величина боровского радиуса и то, что кривая *б* для деформированных кристаллов расположена выше кривой *а* недеформированных свидетельствуют о том, что использованные нами деформации далеки от «максимальных» и условие больших давлений еще не выполняется. То же видно из рис. 2, где отношение ρ/ρ_0 даже при наибольших использованных давлениях было больше единицы. Для выполнения условий больших давлений в случае германия с радиационными дефектами данного вида необходимо, вероятно, прилагать давления больше $\sim 4 \cdot 10^8$ Па.

Таким образом, влияние одноосной упругой деформации на прыжковую проводимость по мелким уровням радиационных дефектов качественно сходно с поведением германия, легированного химическими акцепторами III группы. Количественные особенности связаны с различием в структуре между химическими акцепторами III группы и радиационными дефектами акцепторного типа с энергией активации 16 мэВ.

Список литературы

1. Добрего В. П., Ермолаев О. П. // ФТП.—1976.— Т. 10.— Вып. 5.— С. 999.
2. Dobrego V. P., Ermolaev O. P. and Tkachev V. D. // Phys. Status Sol (a).— 1977.— V. 44.— № 2.— P. 435.
3. Кожух М. Л., Липкина И. С., Шлимак И. С. // ФТП.—1985.— Т. 19.— Вып. 2.— С. 331.
4. Шкловский Б. И., Эфрос А. Л. Электронные свойства легированных полупроводников.— М., 1979.— С. 416.
5. Pollak F. H. // Phys. Rev.— 1965.— V. 138A.— № 2.— P. 618.
6. Chroboczek J. A., Fritzsche H., Jiang C. L., Pollak M. and Wild R. L. // Phil. Mag. B.— 1981.— V. 44.— № 6.— P. 685.

Поступила в редакцию 17.09.85.

УДК 535.37

АЛЬ-МУТАВАЛЛИ МААД САБРИ, С. К. ГОРБАЦЕВИЧ

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МОЛЕКУЛ ПО ЧАСТОТАМ 0-0-ПЕРЕХОДА В ТРЕХКОМПОНЕНТНЫХ РАСТВОРАХ

В последние годы возрос интерес к исследованию спектроскопических характеристик трехкомпонентных растворов (системы из сложной органической молекулы, помещенной в смесь полярного и неполярного растворителя), которые нашли широкое применение в качестве активных сред в лазерах на красителях.

Одной из количественных характеристик электронного спектра таких растворов является функция распределения молекул по частотам чисто электронного перехода. Вследствие того, что уширение электронных спектров трехкомпонентных растворов, обусловленное в основном флуктуациями числа молекул полярного растворителя в координационной сфере активатора, как правило, значительно больше уширения спектра в чисто полярном растворителе, представляется возможным определить функцию распределения молекул по частотам 0-0-перехода непосредственно из эксперимента.

Пусть $I^0(\nu)$ — неуширенный спектр некоторого вещества; $\rho(\xi)$ — функция распределения молекул по частотам чисто электронного перехода. Тогда для уширенного спектра можно записать:

$$I(\nu) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} I^0(\nu - \xi)\,\rho(\xi)\,d\xi. \qquad (1)$$

Выражение (1) является интегральным уравнением для нахождения функции распределения молекул по частотам чисто электронного перехода в трехкомпонентном растворе $\rho(\xi)$, если известны уширенный $I(\nu)$ и элементарный $I^0(\nu)$ спектры. В качестве элементарного (неуширенного) можно взять спектр активатора в неполярном растворителе [1].

Интегральные уравнения относятся к классу некорректных задач, поэтому для решения уравнения (1) воспользуемся методами регуляризации [2], т. е. при решении интегрального уравнения заложим информацию о гладкости искомой функции. С этой целью решение интегрального уравнения (1) сведем к минимизации функционала Ф:

$$\Phi = \int\limits_c^d [I(\nu) - \int\limits_a^b I^0(\nu,\ \xi)\cdot\rho(\xi)d\xi]\,d\nu + \alpha\int\limits_a^b [P(\xi)\cdot(\rho'(\xi)^2 + P^{(1)}(\xi)\,\rho^2(\xi)]. \qquad (2)$$

Здесь α — параметр регуляризации, который определяет гладкость и ошибку решения; $P(\xi)$, $P^{(1)}(\xi)$ — весовые коэффициенты; $[c, d]$ и $[a, b]$ — интервалы изменения величин ν и ξ соответственно.

Используя квадратурные формулы, выражение (2) можем переписать в виде:

$$\Phi = \sum_{k=1}^{m} [I(\nu_k) - \sum_{i=1}^{k} I^0(\nu_k, \ \xi_i \cdot \rho(\xi_i) h_\xi]^2 h_\nu +$$

$$+ \alpha \sum_{i=1}^{n} [P_i (\rho_{i+1} - \rho_{i-1})^2 \cdot \frac{1}{h_\xi^2} + P^{(1)} \rho_i^2] h_\xi . \qquad (3)$$

Здесь $h_\nu = \nu_i - \nu_{i-1}$; $\rho_i = \rho(\xi_i)$; $h_\xi = \xi_i - \xi_{i-1}$.

Для минимизации функционала (3) необходимо приравнять к нулю частные производные по ρ_j ($j = 1, 2, \ldots, n$):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \rho_j} = 2 \sum_{k=1}^{m} \left\{ \sum_{i=1}^{n} [I^0(\nu_k, \ \xi_i) \rho(\xi_i) h_\xi - I(\nu_k) \right\} \cdot I(\nu_k, \ \xi_i) h_\nu h_\xi + \alpha G_j = 0; \qquad (4)$$

$$\frac{1}{2} G_1 = - [P_1 (\rho_2 - \rho_1) + P_2 (\rho_3 - \rho_1)] \cdot \frac{1}{h_\xi} + P_1^1 P_1 h_\xi;$$

$$\frac{1}{2} G_2 = [P_1 (\rho_2 - \rho_1) - P_3 (\rho_4 - \rho_2)] \cdot \frac{1}{h_\xi} \rho_2 h_\xi;$$

. . . .

$$\frac{1}{2} G_j = [P_{j-1} (\rho_j - \rho_{j-2}) - P_{j+1} (\rho_{j+2} - \rho_j)] \cdot \frac{1}{h_\xi} + P_j^1 \rho_j h_\xi;$$

. . . .

$$\frac{1}{2} G_{n-1} = [P_{n-2} (\rho_{n-1} - \rho_{n-3}) - P_n (\rho_n - \rho_{n-1})] \frac{1}{h_\xi} + P_{n-1}^1 \rho_{n-1} h_\xi;$$

$$\frac{1}{2} G_n = [P_{n-1} (\rho_n - \rho_{n-2}) + P_n (\rho_n - \rho_{n-1})] \frac{1}{h_\xi} + P_n^1 \rho_n h_\xi .$$

Таким образом, для нахождения функции $\rho(\xi)$ необходимо решить систему линейных уравнений вида:

$$A \cdot \rho = B. \qquad (5)$$

Здесь $A(1, \ 1) = \sum_{k=1}^{m} [I^0(\nu_k - \xi_1) \cdot I^0(\nu_k - \xi_1)] h_\nu h_\xi^2 + \frac{\alpha}{h_\xi} \cdot (P_1 + P_2);$

$$A(1, \ 2) = \sum_{k=1}^{m} [I^0(\nu_k - \xi_2) \cdot I^0(\nu_k - \xi_1)] h_\nu h_\xi^2 - \frac{\alpha}{h_\xi} P_1;$$

$$A(1, \ 3) = \sum_{k=1}^{m} [I^0(\nu_k - \xi_3) \cdot I^0(\nu_k - \xi_1)] h_\nu h_\xi^2 - \frac{\alpha}{h_\xi} P_2;$$

$$A(2, \ 2) = \sum_{k=1}^{m} [I^0(\nu_k - \xi_2) \cdot I^0(\nu_k - \xi_2)] h_\nu h_\xi^2 + \frac{\alpha}{h_\xi} (P_1 + P_2);$$

$$A(2, \ 1) = \sum_{k=1}^{m} [I^0(\nu_k - \xi_1) \cdot I^0(\nu_k - \xi_2)] h_\nu h_\xi^2 - \frac{\alpha}{h_\xi} P_1;$$

$$A(2, \ 3) = \sum_{k=1}^{m} [I^0(\nu_k - \xi_2) \cdot I^0(\nu_k - \xi_2)] h_\nu h_\xi^2 - \frac{\alpha}{h_\xi} \cdot P_3;$$

. . . .

$$A(j, j) = \sum_{k=1}^{m} [I^0(\nu_k - \xi_j) \cdot I^0(\nu_k - \xi_j)] \cdot h_\nu \cdot h_\xi^2;$$

. . . .

$$A(j, \ j-2) = \sum_{k=1}^{m} [I^0(\nu_k - \xi_{j-2}) \, I^0(\nu_k - \xi_j)] \cdot h_\nu \cdot h_\xi^2 - \alpha P_{j-1} \cdot \frac{1}{h_\xi};$$

$$A(j,\ j-1)=\sum_{k=1}^{m}[I^0(\nu_k-\xi_{j-1})\,I^0(\nu_k-\xi_j)\cdot h_\nu\cdot h_\xi^2;$$

$$A(j,\ j)=\sum_{k=1}^{m}[I^0(\nu_k-\xi_j)\cdot I^0(\nu_k-\xi_j)\cdot h_\nu\cdot h_\xi^2+\alpha\left[P_j^1 h_\xi+\frac{P_{j-1}+P_{j+1}}{h_\xi}\right];$$

$$A(j,\ j+1)=\sum_{k=1}^{m}[I^0(\nu_k-\xi_{j+1})\cdot I^0(\nu_k-\xi_j)]\,h_\nu h_\xi^2;$$

$$A(j,\ j+2)=\sum_{k=1}^{m}[I^0(\nu_k-\xi_{j+2})\cdot I^0(\nu_k-\xi_j)]\,h_\nu h_\xi^2-\alpha P_{j+1}\cdot\frac{1}{h_\xi};$$

. . . .

$$A(n-1,\ n-3)=\sum_{k=1}^{m}[I^0(\nu_k-\xi_{n-3})\,I^0(\nu_k-\xi_{n-1})]\,h_\nu h_\xi^2-\frac{\alpha}{h_\xi}P_{n-2};$$

$$A(n-1,\ n-1)=\sum_{k=1}^{m}[I^0(\nu_k-\xi_{n-1})\cdot I^0(\nu_k-\xi_{n-1})]\,h_\nu\cdot h_\xi^2+$$

$$+\frac{\alpha}{h_\xi}(P_{n-2}+P_n);$$

$$A(n-1,\ n)=\sum_{k=1}^{m}[I^0(\nu_k-\xi_n)\cdot I^0(\nu_k-\xi_{n-1})]\,h_\nu\cdot h_\xi^2-\frac{\alpha}{h_\xi}P_n;$$

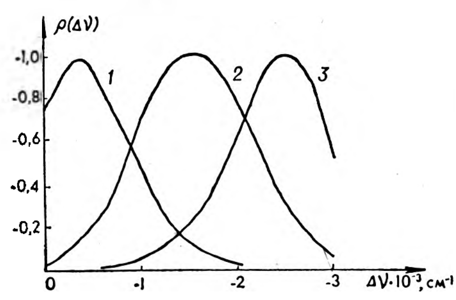
$$A(n,\ n-2)=\sum_{k=1}^{m}[I^0(\nu_k-\xi_{n-2})\cdot I^0(\nu_k-\xi_n)]\cdot h_\nu\cdot h_\xi^2-\frac{\alpha}{h_\xi}P_{n-1};$$

$$A(n,\ n-1)=\sum_{k=1}^{m}[I^0(\nu_k-\xi_{n-1})\cdot I^0(\nu_k-\xi_n)]\,h_\nu\cdot h_\xi^2-\frac{\alpha}{h_\xi}P_n;$$

$$A(n,\ n)=\sum_{k=1}^{m}[I^0(\nu_k-\xi_n)\cdot I^0(\nu_k-\xi_n)]\,h_\nu\cdot h_\xi^2+\frac{\alpha}{h_\xi}(P_{n-1}+P_n);$$

Из уравнения (5) находим функцию $\rho(\xi)$ для некоторого значения параметра регуляризации α, затем вычисляем ошибку решения:

$$\delta=\sum_{k=1}^{m}\Big\{I(\nu_k)-\sum_{i=1}^{n}[I^0(\nu_k-\xi_i\cdot\rho(\xi_i)\,h_\xi]\Big\}^2 h_\nu. \tag{6}$$



Функция распределения молекул по частотам 0—0-перехода для спектров флуоресценции раствора 3-амино-N-метилфталимида в смеси декалин — пропанол. Концентрация пропанола 0,1 (*1*), 1 (*2*), 6 % (*3*). $T=300$ К

Если δ оказывалась меньше ошибки эксперимента, параметр регуляризации α увеличивался (гладкость решения увеличивалась), а если больше, то уменьшался. Уравнение (5) решали еще раз с новым параметром α, и так до тех пор, пока не достигали точности решения, соответствующей точности эксперимента.

Из рисунка видно, что в области низких (0,1 %) концентраций полярного растворителя (кривая *1*) и в области относительно больших концентраций (6 %) полярного растворителя (кривая *3*) функция $\rho(\xi)$ достаточно асимметрична, а в области промежуточных концентраций (1 %) — подобна гауссову контуру (кривая *2*).

Список литературы

1. Горбацевич С. К., Гулис И. М., Комяк А. И. Эффекты насыщения реактивного поля в спектроскопии межмолекулярных взаимодействий / Ред. ж. «Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.» — Минск, 1983.— Деп. в БелНИИНТИ 25.04.83.
2. Арсенин В. А., Иванов В. В. // Ж. выч. мат. и мат. физ.—1968.— Т. 8.— № 2.— С. 310.

Поступила в редакцию 18.11.85.

Математика и механика

УДК 681.325

А. А. КОЛЯДА, М. Ю. СЕЛЯНИНОВ

УМНОЖЕНИЕ ДРОБЕЙ В МОДУЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ СЧИСЛЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНТЕРВАЛЬНОГО ИНДЕКСА

Важнейшей операцией модулярной арифметики является умножение дробей типа Свободы [1]. Ее выполнение обычно осуществляется путем расширения модулярного кода на основания дополнительного диапазона [2]; при этом используются сложноформируемые интегральные характеристики кода: ранг, ядро, коэффициенты полиадического представления чисел. Такой подход сопряжен с существенными аппаратурными затратами. В этой связи большой интерес представляют собой алгоритмы умножения чисел, не требующие введения дополнительных модулей [3—5].

В настоящей работе рассматривается один из методов умножения указанного класса, базирующийся на использовании интервального индекса числа, вычисление которого значительно проще, чем традиционно применяемых интегральных характеристик. Предлагается алгоритм, имеющий конвейерную структуру и обладающий высоким уровнем параллелизма.

Излагаемый нами метод базируется на следующей теореме, вытекающей из работы [6].

Теорема. В модулярной системе счисления (МСС) с попарно простыми модулями $m_1, m_2, \ldots, m_k$ для интервального номера $N_k(X) = \left[\frac{X}{M_k}\right]$ произвольного целого числа X справедливо соотношение

$$N_k(X) = J_k(X) + \Theta_k(X), \quad k = 2, 3, \ldots, n, \tag{1}$$

где $J_k(X)$ — главный интервальный индекс числа X; $\Theta_k(X)$ — поправка Амербаева, соответствующая числу X [6—8], через $[y]$ обозначается целая часть действительного числа y.

Пусть требуется перемножить две дроби $\frac{A}{M_k^2}$ и $\frac{B}{M_k^2}$, где $A, B \in D = \{-p\cdot M_{n-1}, \ -p\cdot M_{n-1}+1, \ldots, \ p\cdot M_{n-1}-1\}$, а $M_k^2 > 2\cdot p\cdot M_{n-1}$, где $M_k = \prod_{i=1}^{k} m_i$.

Используя лемму Евклида из теории делимости [9], представим числители исходных дробей в виде

$$A = |A|_{M_k} + N_k(A)\cdot M_k, \quad B = |B|_{M_k} + N_k(B)\cdot M_k, \tag{2}$$

через $|Y|_p$ обозначается наименьший неотрицательный вычет, сравнимый с величиной Y по модулю p.

Тогда искомое произведение дробей формируется в соответствии с формулой

2 Зак. 989

$$\frac{A}{M_k^2}\cdot\frac{B}{M_k^2}=\frac{1}{M_k^2}\left(\frac{|A|_{M_k}\cdot|B|_{M_k}}{M_k^2}+N_k(A)\cdot N_k(B)+\frac{N_k(A)\cdot|B|_{M_k}+N_k(B)\cdot|A|_{M_k}}{M_k}\right).\quad(3)$$

Первый член выражения в скобках $\frac{|A|_{M_k}\cdot|B|_{M_k}}{M_k^2}<1$ отбрасывается и в алгоритме не используется, а третий член заменяется на антье. В результате окончательно получаем следующее расчетное соотношение для произведения дробей:

$$\frac{A}{M_k^2}\cdot\frac{B}{M_k^2}\approx\frac{1}{M_k^2}\cdot(N_k(A)\cdot N_k(B)+N_k(C)),\quad(4)$$

где $C=N_k(A)\cdot|B|_{M_k}+N_k(B)\cdot|A|_{M_k}$.
Из соотношения (4) следует, что базовой операцией при умножении дробей является операция округления чисел, состоящая в получении величин вида $N_k(X)$, $X\in D$.

Обозначим через $(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{k-1}, I_k(X))$ интервально-модулярный код числа X в системе с модулями $m_1, m_2, \ldots, m_{k-1}$ [6], где $\chi_i=|X|_{m_i}$, $I_k(X)$ — интервальный индекс числа X. Используя интервально-модулярное представление чисел [6], найдем модулярный код интервального индекса $I_k(X)$ $(\xi_k, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n)$ по модулям $m_k, m_{k+1}, \ldots, m_n$ в виде

$$\xi_j=\left|\sum_{i=1}^{k-1}\left|-\frac{|\chi_i\cdot M_{i,k-1}^{-1}|_{m_j}}{m_i}\right|_{m_j}+\frac{\chi_j}{M_{k-1}}\right|_{m_j},\quad(5)$$

где $M_{i,k-1}=M_{k-1}/m_i$, $i=1, 2, \ldots, k-1$, $j=k, k+1, \ldots, n$.

Тогда j-ая цифра g_j модулярного кода главного интервального индекса $J_k(X)$ запишется в виде

$$g_j=\left|\frac{\xi_j-\xi_k}{m_k}\right|_{m_j},\quad j=k+1,\ldots, n.\quad(6)$$

Для получения остальных цифр модулярного кода числа $J_k(X)$ осуществим его расширение на модули $m_1, m_2, \ldots, m_k$. С этой целью предварительно вычисляется интервальный индекс H числа $J_k(X)$ в системе с модулями $m_k, m_{k+1}, \ldots, m_n$ и затем применяется формула

$$g_i=\left|\sum_{j=1}^{n-k-1}C_j\cdot g_{k+j}+H\cdot\frac{M_n}{M_k}\right|_{m_j},\quad i=1, 2,\ldots, k,\quad(7)$$

где $C_j=\frac{M_n}{M_k\cdot m_j}$, $j=1, 2,\ldots, n-k-1$.

Для получения окончательного результата производится формирование поправки Амербаева $\Theta_k(X)$ [8] и добавление ее к цифрам модулярного кода числа $\dot{J}_k(X)$. В результате находим модулярный код $(\hat{\chi}_1, \hat{\chi}_2, \ldots, \hat{\chi}_n)$ числа $N_k(X)$ в заданной МСС.

Изложенное позволяет сформулировать следующий алгоритм умножения дробей $\frac{A}{M_k^2}$ и $\frac{B}{M_k^2}$ в МСС с модулями $m_1, m_2, \ldots, m_n$ $(A, B\in D)$.

1. По модулярным кодам $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ соответственно чисел A и B, согласно выражениям (5)—(7), (1), определяются модулярные коды интервальных номеров $N_k(A)$ и $N_k(B)$ в исходной МСС.

2. Находятся модулярные коды остатков

$$|A|_{M_k}=A-N_k(A)\cdot M_k,\quad |B|_{M_k}=B-N_k(B)\cdot M_k.$$

3. Формируются модулярные коды величин $N_k(A)\cdot N_k(B)$, $C=N_k(A)\times\times|B|_{M_k}+N_k(B)\cdot|A|_{M_k}$.

4. В соответствии с соотношениями (5)—(7), (1) определяется модулярный код интервального номера $N_k(C)$ числа C в заданной МСС.

5. Формируется модулярный код числителя $N_k(A) \cdot N_k(B) + N_k(C)$ искомой дроби.

Нетрудно проверить, что абсолютная погрешность сформулированного алгоритма не превышает величины $\frac{3}{2 \cdot M_k^2}$.

Если формирование поправки Амербаева осуществляется с помощью конвейерных устройств типа [8], то при соответствующей структуре умножителя, реализующего приведенный алгоритм, произведение двух дробей может быть получено за $T_{\text{ум.}} = 8 + 4 \cdot]\log_2 k[$ модульных тактов при пропускной способности: одна операция умножения за $4 + 2 \cdot]\log_2 k[$ тактов ($]\log_2 k[$ — наименьшее целое число, не меньшее $\log_2 k$).

Наиболее быстродействующий из известных алгоритмов умножения дробей в МСС позволяет выполнить рассматриваемую операцию за $T_{\text{ум.}} = 16 + 4 \cdot]\log_2 k[$ модульных тактов [4]. При $n = 8$, что соответствует мощности диапазона МСС порядка 2^{32}, $T_{\text{ум.}} = 16$ тактам, а $T'_{\text{ум}} =$ $= 24$ тактам. Следует при этом подчеркнуть, что для реализации известного алгоритма [4] необходимо использовать два формирователя ранга, каждый из которых сложнее формирователя поправки Амербаева. Так как указанные блоки составляют главную часть оборудования соответствующих умножителей, можно заключить, что предлагаемый метод позволяет уменьшить объем аппаратурных затрат для выполнения операции умножения дробей примерно в два раза.

Список литературы

1. Свобода А. // Кибернетический сборник.—1964.— № 8.— С. 115.
2. Торгашев В. А. Система остаточных классов и надежность ЦВМ.— 1973.— С. 24.
3. Евстигнеев В. Г., Горская В. В., Филиппова Н. В. // Науч. труды по проблемам микроэлектроники.—1972.— Вып. 9.— С. 200.
4. Акушский И. Я., Бурцев В. М., Дуйсенов Б. Е., Пак И. Т. Устройство для умножения: А. с. 579617 СССР // БИ.—1977.— № 41.
5. Белова Р. С., Евстигнеев В. Г., Новожилов А. С., Сведе-Швец В. Н. Устройство для умножения в системе остаточных классов: А. с. 962942 СССР // БИ.—1982.— № 36.
6. Коляда А. А. // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.—1986.— № 1.— С. 46.
7. Коляда А. А. // Кибернетика.—1982.— № 3.— С. 124.
8. Коляда А. А. Устройство для формирования позиционных характеристик непозиционного кода: А. с. 968802 СССР // БИ.— 1982.— № 39.
9. Виноградов И. М. Основы теории чисел.—1972.— С. 8.

Поступила в редакцию 26.10.84.

УДК 519.1

А. Г. ЛЕВИН

NP-ПОЛНОТА ЗАДАЧИ РЕАЛИЗАЦИИ ГИПЕРГРАФОВ ГРАФАМИ С ЗАДАННОЙ ЧЕТНОСТЬЮ СТЕПЕНЕЙ ВЕРШИН

В последние годы внимание исследователей привлекают вопросы реализации гиперграфов графами с заданными свойствами [1—10]; тем самым естественно возникает вопрос об NP-полноте этих задач. В данной работе покажем, что задача выяснения существования реализации графом с заданной четностью степеней вершин является NP-полной.

Определение [5]. Граф $R = (V, E)$ называется реализацией гиперграфа $G = (V, W)$, если

1) для каждого $[u, v] \in E$ существует $H \in W$ такое, что $\{u, v\} \subseteq H$;

2) для каждого $H \in W$ порожденный множеством вершин H подграф $R(H)$ графа R связен. Пусть $\Gamma(G, \delta)$ — множество всех реализаций

гиперграфа G графами, у которых степень каждой вершины $v \in V$ сравнима по модулю 2 с $\delta(v)$. Здесь и далее $\delta(v)$ — число из $\{0, 1\}$, сопоставленное вершине $v \in V$, а δ — вектор из $\Delta(|V|)$ с компонентами $\delta(v)$, где $\Delta(n)$ — множество n-мерных булевых векторов с четным числом ненулевых компонент.

Доказательство NP-полноты задачи проверки непустоты множества $\Gamma(G, \delta)$ в общем случае будет проведено по «классической» схеме путем сведения к данной задаче известной NP-полной задачи о существовании в ориентированном графе пути с запрещенными парами дуг (ПЗП) [11]. Это сведение будет осуществлено в несколько этапов.

Пусть $U = (X, A)$ — неориентированный конечный граф, $C = \{(x_i, y_i): i = \overline{1, p}\} \subset A \times A$, s, t — пара различных вершин из X. Задачу проверки существования цепи, соединяющей s и t и содержащей не более одного ребра каждой пары из C, обозначим ПЗПН.

Лемма 1. Задача ПЗПН является NP-полной.

Доказательство. Принадлежность задачи ПЗПН классу NP очевидна. Покажем, что к данной задаче сводится задача ПЗП. Пусть $U' = (X, A')$ — ориентированный граф, $C' \subset A' \times A'$ и вершины $s, t \in X$ определяют индивидуальную задачу из ПЗП. Без ограничения общности можно считать, что граф U' не содержит контуров длины 2. Рассмотрим неориентированный граф $U = (X, A)$, где $A = \{[u, v]: (u, v) \in A', v \neq s, u \neq t\}$. Положим $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, где $C_1 = \{([u, v], [w, p]): ((u, v), (w, p)) \in C'\}$; $C_2 = \{([u, v], [w, v]): (u, v), (w, v) \in A'\}$, $C_3 = \{([u, v], [w, v]): (v, u), (v, w) \in A'\}$.

Каждому бесконтурному пути из s в t в графе U' взаимно однозначно соответствует цепь графа U, содержащая не более одного ребра каждой пары из $C_2 \cup C_3$. Тем самым каждому пути из s в t в графе U', содержащему не более одной дуги каждой пары из C', взаимно однозначно соответствует цепь из s в t в графе U, содержащая не более одного ребра каждой пары из C. Тем самым исходная задача ПЗП полиномиально сводится к задаче ПЗПН. Лемма доказана.

В дальнейшем нас будет интересовать специальный класс задач из ПЗПН, в котором набор $C = \{(x_i, y_i): i = \overline{1, p}\}$ запрещенных пар ребер удовлетворяет следующим условиям:

а) x_i и y_i смежны для любого $i = \overline{1, p}$;

б) ребра всех пар из C вида $(x, y_1), \ldots, (x, y_r)$ имеют одну общую вершину;

в) ни для какой пары $([u, v], [w, p]) \in C$ не существует ребра $[u, w] \in A$, где $w \notin \{u, v\}$.

Обозначим эту задачу через ПЗПНС.

Лемма 2. Задача ПЗПНС является NP-полной.

Доказательство. Пусть граф $U = (X, A)$, набор C пар ребер из A и вершины $s, t \in X$ определяют индивидуальную задачу из ПЗПН. Покажем, что эта задача полиномиально сводится к задаче из ПЗПН, набор C' запрещенных пар ребер которой обладает следующими свойствами:

1) каждое ребро входит не более, чем в одну пару из C';

2) не существует ребра в графе, смежного одновременно обоим ребрам некоторой пары из C'.

Действительно, для этого достаточно разбить каждое ребро $x \in A$, входящее в k пар из C, на $3k + 2$ ребер $x_0, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, \ldots, x_{k3}, x_{3k+1}$. Обозначим полученный граф через U'. Пусть пара (x, y) является i-ой парой из C, содержащей ребро x, и j-ой парой, содержащей ребро y. Тогда набор C' получаем из C заменой каждой такой пары (x, y) парой (x_{i2}, y_{j2}), тем самым исходная задача ПЗПН полиноминально сводится к задаче, удовлетворяющей условиям 1 и 2.

Построим новый граф $U'' = (X'', A'')$, стягивая в графе U' у каждой пары $(x = [u_1, u_2], y = [v_1, v_2]) \in C'$ вершины u_1 и v_1 в новую вершину $a(x, y) \in X''$. В набор C'' включим те и только те пары ребер графа U'', которые инцидентны новым вершинам a и образованы несмежными ребрами графа U'.

Очевидно, что путь из s в t в графе U, содержащий не более одного ребра из каждой пары набора C, существует тогда и только тогда, когда существует путь из s в t в графе U'', содержащий не более одного ребра из каждой пары набора C''. Граф U'', набор C'' и вершины s, t определяют задачу из ПЗПНС. Лемма доказана.

Пусть $Q(G, \delta)$ — множество вершин v гиперграфа $G=(V, W)$, четность степеней которых в графе $K=(V, A(G))$ не совпадает с заданным $\delta(v)$, где $A(G)=\{[u, v]: u \neq v, \{u, v\} \subseteq H, H \in W\}$.

Лемма 3. Множество $\Gamma(G, \delta) \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда в графе K существует такое множество реберно-непересекающихся цепей, соединяющих вершины из $Q(G, \delta)$, что каждая вершина из $Q(G, \delta)$ принадлежит ровно одной цепи и удаление всех ребер этих цепей из графа K не нарушает связности графа $K(H)$ ни для одного $H \in W$.

Доказательство. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Пусть $\Gamma(G, \delta) \neq \varnothing$ и $R=(V, E) \in \Gamma(G, \delta)$. Рассмотрим граф $L=(V, A(G) \setminus E)$. Множество вершин графа L нечетной степени совпадает с $Q(G, \delta)$, причем каждая компонента связности графа L содержит четное число вершин из $Q(G, \delta)$. Выделим в $Q(G, \delta)$ две вершины u и v, принадлежащие одной компоненте связности графа L, и цепь, соединяющую эти вершины. Удалим ребра этой цепи из графа L. В полученном графе L' множество вершин нечетной степени совпадает с множеством $Q(G, \delta) \setminus \{u, v\}$. Поступая аналогичным образом, получим искомые цепи. Лемма доказана.

Обозначим через B набор $[U, C, s, t]$, где $U=(X, A)$ — граф, $C \subset A \times A$, $s, t \in X$. Пусть набор B определяет некоторую индивидуальную задачу из ПЗПНС, а $\delta \in \Delta(|X|+1)$. Построим гиперграф $G(B, \delta)=(V, W)$ следующим образом. Полагаем $V=X \cup \{a\}$, где a — дополнительная вершина, не принадлежащая X. Множество W полагаем равным $W^{(1)} \cup W^{(2)} \cup W^{(3)} \cup \{X\}$, где $W^{(1)}=\{\{u, v\}:[u, v] \notin A, u, v \in X\}$, $W^{(2)}=\{\{u, v, w\}:([u, v], [v, w]) \in C\}$, $W^{(3)}$ — множество ребер вида $\{u, a\}$, которые необходимо ввести в граф $(V, \{[u, v]: u, v \in X, u \neq v\})$ с тем, чтобы в получаемом в результате графе K четность степеней вершин $v \in V \setminus \{s, t\}$ совпадала с $\delta(v)$, а вершин s и t не совпадала. Нетрудно показать, что это возможно, поскольку $|\{v \in V: \delta(v)=1\}|$ четно.

Лемма 4. В графе $U=(X, E)$ существует путь из s в t, содержащий не более одного ребра из каждой пары набора C тогда и только тогда, когда для любого $\delta \in \Delta(|X|+1)$ $\Gamma(G, \delta) \neq \varnothing$, где $G=G(B, \delta)$.

Доказательство. Если $\Gamma(G, \delta) \neq \varnothing$, то по лемме 3 существует цепь в графе $K=(V, A(G))$, соединяющая s и t, удаление ребер которой из этого графа не нарушает связности графов $K(H)$ ни для одного $H \in W$. По построению гиперграфа эта цепь содержит ребра лишь из A (иначе удаление ее ребер нарушает связность графов $K(H)$ для некоторых $H \in W^{(1)} \cup W^{(3)}$), причем включает не более одного ребра из каждой пары набора C (в противном случае при удалении ребер этой цепи нарушается связность графов $K(H)$ для некоторых $H \in W^{(2)}$). Таким образом, из непустоты множества $\Gamma(G, \delta)$ следует существование в графе U цепи, соединяющей s и t и содержащей не более одного ребра из каждой пары набора C. С другой стороны, пусть P — простая цепь графа U, соединяющая s и t и содержащая не более одного ребра из каждой пары набора C. Удаление ребер этой цепи из графа K не нарушает, очевидно, связности графов $K(H)$ ни для одного $H \in W^{(1)} \cup W^{(3)} \cup \{X\}$. Пусть $H=\{u, v, w\} \in W^{(2)}$. Тогда по построению гиперграфа G $([u, v], [v, w]) \in C$, по свойству набора C $[u, w] \notin A$ и, следовательно, $\{u, w\} \in W^{(2)}$. Тем самым цепь P содержит не более одного ребра $K(H)$ и, следовательно, его удаление не нарушает связности $K(H)$. Отсюда по лемме 3 $\Gamma(G, \delta) \neq \varnothing$. Лемма доказана.

Таким образом, задача ПЗПНС полиномиально сводится к задаче проверки непустоты множества $\Gamma(G, \delta)$. Отсюда непосредственно следует

Теорема. Задача проверки непустоты множества $\Gamma(G, \delta)$ для любого $\delta \in \Delta(|V|)$ является NP-полной.

Для практических целей представляет интерес выделение классов гиперграфов, для которых существует полиномиальный алгоритм построения искомой реализации. Достаточно представительный класс таких гиперграфов приведен в работе [5].

Автор выражает искреннюю благодарность О. И. Мельникову за помощь и поддержку.

Список литературы

1. Мелихов А. Н., Берштейн Л. С., Семянкин В. В. // Методы расчета и автоматизации проектирования устройств микроэлектронных ЦВМ.— Киев.—1973.
2. Амбарян С. Л., Мовсесян А. А., Пилипосян Т. Э. // Вопросы радиоэлектроники. Сер. ЭВТ.—1981.— Вып. 16.— С. 37.
3. Пилипосян Т. Э. Юбилейная науч. конференция молодых ученых, посвященная 60-летию образования СССР: Тез. докл.— Ереван.— 1982.— С. 62.
4. Волошина А. А., Фейнберг В. З. // Докл. АН БССР.—1984.— Т. 28.— № 4.— С. 309.
5. Левин А. Г. Реализация гиперграфов графами с заданной четностью степеней вершин / Ред. ж. «Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.» — Минск, 1984.— Деп. в ВИНИТИ 11.09.84, № 6171-84.
6. Berge C. Graphes et Hypergraphes.— Paris, 1970.
7. Gavril F. // I. Combinatorial Theory.— 1974.— V. B-16.— P. 47.
8. Flament C. // Discrete Math.—1978.— V. 21.— № 3.— P. 223.
9. Buneman P. // Discrete Math.—1974.— V. 9.— № 3.
10. Slater P. // Canad. Math. Bull.—1978.— V. 21.— № 3.— P. 335.
11. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи.— М., 1982.

Поступила в редакцию 21.12.84.

УДК 519.95

НГУЕН ВАН ХОА

О ГРУППОВОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ В P_k

В [1] для P_2 введены понятия G-, $\tilde{G}$-решеток. Аналогично определяются понятия G- и $\tilde{G}$-решеток в P_k. В P_2 $\tilde{G}$-решетка конечна, а G-решетка бесконечно-счетна [1]. В настоящей работе покажем, что в P_k $\tilde{G}$- и G-решетки континуальны.

Основные обозначения и определения даны в [2, 3].

Теорема. В $P_k (k \geqslant 3)$ существует континуальное семейство $\{\mathfrak{m}^\tau\}$ замкнутых классов (з. к.) для любых двух з. к. $\mathfrak{m}^{\tau_1}$ и $\mathfrak{m}^{\tau_2}$, из которого в $\mathfrak{m}^{\tau_1}$ всегда существует функция $f(x_1, \ldots, x_p)$ такая, что для любой функции g $(x_1, \ldots, x_m)$ из $\mathfrak{m}^{\tau_2}$ $\tilde{G}(g) \neq \tilde{G}(f)$.

Получим вначале некоторые вспомогательные результаты. Пусть A — бóльшая, B — мéньшая окружность с общим неподвижным центром; A неподвижна, B подвижна. Разделим эти окружности на p равных частей, отделенных штрихами. Под штрихами B стоят либо 1, либо 2, под штрихами A — $1, 2, \ldots, p$ по направлению часовой стрелки. В любом положении B каждый ее штрих должен находиться со штрихом окружности A на общем радиусе от центра. Пусть v_1 есть число 1 в B. В дальнейшем рассмотрим лишь случай, когда p — простое число и $p - 2 \geqslant v_1 \geqslant 2$.

Лемма 1. Для любых $1 \leqslant i, j \leqslant p$ существует положение B, при котором под штрихами i, j окружности A в B стоят либо только единицы, либо только двойки.

Лемма 2. Для любых вершин $i, j (i < j,\ 1 \leqslant i, j \leqslant p)$ многоугольника M (в случае $v_1 = 2$ M-отрезок), вершины которого соответствуют единицам на B, можно повернуть B так, чтобы M в новом положении имел j общей вершиной и i не общей вершиной с исходным многоугольником.

Лемма 1 и лемма 2 легко доказываются.

Лемма 3. Пусть $l > p/v_1$. Тогда при любом расположении единиц на B всегда существует положение B такое, что, по крайней мере, две единицы соответствуют двум номерам из фиксированного набора $\{i_1, i_2, \ldots, i_l\}$, $1 \leqslant i_j \leqslant p$, $1 \leqslant j \leqslant l$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда заметим, что p — простое число, поэтому каждому номеру из $\{i_1, \ldots, i_l\}$ соответствует семейство v_1 различных положений M по следующему правилу: в каждом положении M имеет вершину, обозначенную этим номером. Для двух номеров из $\{i_1, \ldots, i_l\}$ соответствующие семейства положений M не пересекаются, поэтому $\{i_1, \ldots, i_l\}$ соответствует $l \times v_1$ различных положений M. По отношению к A в B существует только p различных положений M: $l > p/v_1$. Имеет место противоречие. Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть набор $\{i_1i_2, i_2i_3, \ldots, i_li_1\}$ удовлетворяет следующему условию. При любом положении M одна и лишь одна сторона M определяется некоторым элементом из $\{i_1i_2, \ldots, i_li_1\}$. Тогда существует положение B такое, что трем номерам из A соответствуют единицы.

Доказательство. Предположим противное. Тогда заметим, что относительно каждой вершины i_t имеются v_1 различных положений M таких, что одна вершина M соответствует i_t, а одна из его сторон определяется одним элементом из $\{i_{t-1}i_t, i_ti_{t+1}\}$. Несложно считать, что число различных положений M есть $\frac{l\times v_1}{2}$. Таким образом, имеет место противоречие, так как должно быть $p = \frac{l\times v_1}{2}$. Лемма доказана.

Теперь докажем теорему. Две переменные в упорядоченном наборе $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\}$ считаются соседними, если они стоят рядом или одна занимает первое, другая — последнее место в наборе.

Рассмотрим последовательность функций ($p > 4$, p простое):

$$f_p(x_1, \ldots, x_p) = \begin{cases} 1, & \text{если две соседние переменные равны 1, а другие — 2,} \\ 0 & \text{— в остальных случаях.} \end{cases}$$

Покажем, что $\{f_5, f_7, \ldots\}$ независима, т. е. невозможно представление: $f_p(x_1, \ldots, x_p) = f_r(\mathrm{H}_1[f_5, \ldots, f_{p-1}, f_{p+1}, \ldots], \ldots, \mathrm{H}_r[f_5, \ldots, f_{p-1}, f_{p+1}, \ldots])$.

Предположим противное. Тогда возможны лишь следующие случаи.

1) Среди $\mathrm{H}_1, \ldots, \mathrm{H}_r (r > 4)$, по крайней мере, три формулы отличны от символов переменных. Легко получим противоречие.

2) Среди $\mathrm{H}_1, \ldots, \mathrm{H}_r (r > 4)$ только две формулы отличны от символов переменных. Тогда, по крайней мере, одна формула H_q сводится к символу переменной x_q. Пусть x_q и одна ее соседняя переменная равны 1, а остальные переменные равны 2. Получим неравенство.

3) Среди $\mathrm{H}_1, \ldots, \mathrm{H}_r (r > 4)$ лишь одна формула H_s отлична от символа переменной. Тогда найдется такая переменная x_q, не являющаяся соседней H_s в f_r. Пусть x_q и одна ее соседняя переменная равны 1, а остальные равны 2. Получим неравенство.

4) Все $\mathrm{H}_1, \ldots, \mathrm{H}_r$ — символы переменных. Тогда $r > p$, следовательно, в формуле встретятся, по крайней мере, два вхождения некоторой переменной x_q. Пусть x_q и одна ее соседняя переменная равны 1, а остальные равны 2. Получим неравенство.

Образуя для каждой последовательности $\{p_1, p_2, \ldots\}$ из $\{5, 7, \ldots\}$ $(5 \leqslant p_1 < p_2 < \ldots)$ класс $\mathfrak{m}^\tau(p_1, p_2, \ldots)$ как класс, порожденный системой функций $\{f_{p_1}, f_{p_2}, \ldots\}$, получаем описанное в формулировке теоремы семейство $\{\mathfrak{m}^\tau\}$.

По построению функций $f_pG(f_p) \neq S_p$, $G(f_p) \ni \delta = (1, 2 \ldots p)$.

Пусть $\mathfrak{m}^{\tau_1}$, $\mathfrak{m}^{\tau_2}$ — два любых различных з. к. из $\{\mathfrak{m}^\tau\}$. Тогда в $\mathfrak{m}^{\tau_1}$ существует $f(x_1, \ldots, x_p)$ так, что в $\mathfrak{m}^{\tau_2}$ ее нет. Докажем, что для любой

$g(x_1, \ldots, x_m)$ из $\mathfrak{m}^{\tau_2}$ $\widetilde{G}(f) \neq \widetilde{G}(g)$. Предположим противное. Пусть существует $g(x_1, \ldots, x_m)$ такая, что $\widetilde{G}(f) = \widetilde{G}(g)$. Тогда $G(g)$ имеет нетривиальный блок транзитивности на $\{1, 2 \ldots p\}$ и $G(g) \ni \delta$; g построена из функций базиса з. к. $\mathfrak{m}^{\tau_2}$ и имеет вид: $g = f_h[\Psi_1(f_{n_{i_1}}, f_{n_{i_2}}, \ldots), \ldots, \Psi_h(f_{n_{i_1}}, f_{n_{i_2}}, \ldots)]$.

Рассмотрим любую подформулу Ψ, отличную от функционального символа, формулы Φ. Ψ имеет вид: $\Psi = f_h[\Psi_1(f_{n_1}, f_{n_2}, \ldots), \ldots, \Psi_h(f_{n_{i_1}}, f_{n_{i_2}}, \ldots)]$.

По условию $G(f)$ образует нетривиальное разбиение на некоторой клетке $E_k^{m, v_1, \ldots, v_{k-1}}$, где v_t — число t в $E_k^{m, v_1, \ldots v_{k-1}}$. Очевидно, что $E_k^{m, v_1, \ldots, v_{k-1}}$ содержит лишь 1 и 2. По условию $G(g)$ должна образовать нетривиальное разбиение на некоторой подклетке $E_k^{p, v'_1, \ldots, v'_{k-1}}\{\alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_m\}$. Тогда g должна быть равной 1 на некотором $\widetilde{\alpha}$, следовательно, на орбите $\{\delta\}(\widetilde{\alpha})$ этой подклетки ($\{\delta\}(\widetilde{\alpha})$ — множество всех элементов, полученных из $\widetilde{\alpha}$ действием δ) δ действует лишь на первые p компонент. Эти компоненты можно изобразить на B. На A нумеруются переменные $x_1, \ldots, x_p$. Каждое положение B соответствует некоторому элементу из $\{\delta\}(\widetilde{\alpha})$. Соответствие объективно.

Из равенства $g = 1$ на $\{\delta\}(\widetilde{\alpha})$ следует равенство $\Psi = 1$.

Возможны следующие случаи.

1) Среди формул $\Psi_1, \ldots, \Psi_n$, по крайней мере, три формулы отличны от символов переменных. Получим противоречие.

2) Среди формул $\Psi_1, \ldots, \Psi_n$ лишь одна формула Ψ_s отлична от символа переменной; $h \geqslant 5$, поэтому Ψ_s имеет две соседние переменные x_a, x_b. Из леммы 1 можно считать, что либо $x_a = x_b = 1$, либо $x_a = x_b = 2$. Отсюда получим противоречие.

3) Только две формулы отличны от символов переменных. Тогда они должны быть соседними. Индукцией, не ограничивая общности, можно получить следующее представление функции $g(x_1, \ldots, x_m)$:

$$g(x_1, \ldots, x_m) = f_n(f_{n_1}(\ldots(f_{n_i}, f_{n_j}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_t})\ldots), f_{n_2}(\ldots), x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}).$$

В формуле выделим систему Σ функций, содержащих лишь символы переменных. Очевидно, переменные $x_1, \ldots, x_p$ могут входить только в функции из Σ. Систему функций, содержащих переменные из $\{x_1, \ldots, x_p\}$ в Σ, обозначим Σ^p.

Возможны следующие случаи.

а) При любом $\widetilde{\alpha}^* \in \{\delta\}(\widetilde{\alpha})$ в каждой функции из Σ^p лишь одна переменная из $\{x_1, \ldots, x_p\}$ принимает 1. Тогда эта переменная имеет два вхождения в данной функции и найдется, по крайней мере, v_1 функций, принадлежащих Σ^p. Пусть $\widetilde{\alpha}^*$ пробегает $\{\delta\}(\widetilde{\alpha})$ и, учитывая, что p — простое число, можно убедиться в том, что все $x_1, \ldots, x_p$ должны входить в v_1 этих функций. Тогда, по крайней мере, одна функция f_d имеет более p/v_1 различных переменных из $\{x_1, \ldots, x_p\}$. Из леммы 3 можно считать, что две различные переменные из $\{x_1, \ldots, x_p\}$ в f_d равны 1. Отсюда получим противоречие.

б) По крайней мере, одна функция f_d из Σ^p имеет две различные переменные: x_a, x_b из $\{x_1, \ldots, x_p\}$, которые одновременно принимают 1 на некотором $\widetilde{\alpha}^*$ из $\{\delta\}(\widetilde{\alpha})$. Тогда x_a, x_b должны быть соседними в f_d. По лемме 2 можно считать, что $x_a = 1$, $x_b = 2$. Тогда x_a должна иметь $x_c \in \{x_1, \ldots, x_p\}$ своей соседней переменной и $x_c \neq x_b$. Продолжая рассуждение, получаем, что f_d содержит лишь переменные $x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}$ из $\{x_1, \ldots, x_p\}$. По лемме 4 можно считать, что три переменные из $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}\}$ равны 1. Получим противоречие. Теорема доказана.

Следствие 1. $\tilde{G}$-решетка в P_k континуальна.

Следствие 2. G-решетка в P_k континуальна.

Автор выражает искреннюю благодарность доценту В. В. Горлову за постановку задачи и помощь при выполнении работы.

Список литературы

1. Нгуен Ван Хоа // Тез. докл. VII Всесоюзной конференции по математической логике.— Новосибирск.—1984.— С. 119.
2. Янов Ю. И., Мучник А. А. // Докл. АН СССР.— 1959.— Т. 127.— № 1.—С. 44.
3. Яблонский С. В. // Труды МИ АН СССР.—1958.— Т. 51.— С. 5.

Поступила в редакцию 21.12.84.

УДК 517.925

А. И. ЯБЛОНСКИЙ, А. Ф. КОРЗЮК

СВОЙСТВА ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ ТРЕХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x}=Ax, \tag{1}$$

где $x = \operatorname{colon}(x_1, x_2, x_3)$, матрица

$$A=\begin{pmatrix} -b & a & 0 \\ -2c & 0 & 2a \\ 0 & -c & b \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$a \neq 0$, b, c — аналитические в некоторой области D_1 комплексной плоскости функции. Вместе с системой (1)—(2) рассмотрим нелинейную систему трех дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = a\varphi^2 - 2a\varphi\psi + b\varphi + 2a\omega + 2c, \\ \dot{\psi} = 2a\psi^2 + b\psi - a\omega + c, \\ \dot{\omega} = 2a\psi\omega + 2b\omega + 2c\psi. \end{cases} \tag{3}$$

Теорема 1. Если известно хотя бы одно решение системы (3), то общее решение системы (1)—(2) находится в квадратурах.

Действительно, сделаем в системе (1)—(2) преобразование $y=Sx$:

$$S=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \varphi & 1 & 0 \\ \omega & \psi & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Тогда система (1)—(2) примет вид $\dot{y} = By$, где [1] $B = \dot{S}S^{-1} + SAS^{-1}$, $\dot{S}$ — производная от матрицы S, S^{-1} — обратная к S. Проделав соответствующие вычисления, получим

$$B=\begin{pmatrix} -(b+a\varphi) & a & 0 \\ 0 & a(\varphi-2\psi) & 2a \\ 0 & 0 & b+2a\psi \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Завершение доказательства теоремы очевидно.

В дальнейшем с системой (1)—(2) будем связывать уравнение Риккати [2]

$$y' = ay^2 + by + c. \tag{6}$$

Пусть y_1 — частное решение уравнения (6). Легко убедиться, что $\varphi = 2y_1$, $\psi = y_1$, $\omega = y_1^2$ является решением системы (3).

Следствие 1. Если известно хотя бы одно решение уравнения (6), то общее решение системы (1)—(2) находится в квадратурах.

Имеет место и обратное утверждение.

Теорема 2. Если известно одно решение системы (1)—(2), то уравнение (6) решается в квадратурах, если известны два линейно независимые решения системы (1)—(2), то общий интеграл (6), а значит, и решение находится без квадратур.

Для доказательства запишем (6) в дифференциалах

$$(ay^2 + by + c)\,dx - dy = 0 \tag{7}$$

и будем искать интегрирующий множитель уравнения (7) в виде

$$\mu = \frac{1}{\alpha y^2 + \beta y + \gamma}. \tag{8}$$

Использовав уравнение интегрирующего множителя, найдем, что α, β, γ удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} \dot\alpha &= -b\alpha + a\beta, \\ \dot\beta &= -2c\alpha + 2a\gamma, \\ \dot\gamma &= -c\beta + b\gamma, \end{aligned} \tag{9}$$

т. е. (α, β, γ) удовлетворяют системе (1)—(2). Обратное тоже верно, если (α, β, γ) удовлетворяют системе (1)—(2), т. е. имеет место (9), то (8) является интегрирующим множителем уравнения (6).

Предположим, что $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ и $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ — два линейно независимые решения системы (1)—(2). Тогда они порождают два интегрирующих множителя μ_1 и μ_2 уравнения (6). Чтобы закончить доказательство теоремы 2, достаточно доказать, что $\frac{\mu_1}{\mu_2} \neq \mathrm{const}$. Пусть $\frac{\mu_1}{\mu_2} \equiv \equiv \frac{\alpha_2 y^2 + \beta_2 y + \gamma_2}{\alpha_1 y^2 + \beta_1 y + \gamma_1} \equiv k$ — постоянное число. Тогда $y^2(\alpha_2 - k\alpha_1) + y(\beta_2 - k\beta_1) + \gamma_2 - k\gamma_1 \equiv 0$. Но отсюда, в силу переменности y, получим линейную зависимость между $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ и $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, что противоречит предположению.

Следствие 2. Если известно одно решение системы (1)—(2), то общее решение этой системы находится в квадратурах.

Доказательство этого утверждения дают теорема 2 и следствие 1. Дальше будем исследовать свойства решений системы (3). Эта система имеет однопараметрическое семейство решений без подвижных критических точек — решение, выражающееся через общее решение уравнения Риккати (6).

Докажем, что система (3) без подвижных критических особых точек. Система (1)—(2) через интегрирующий множитель вида (8) порождается уравнением (6). Для простоты рассуждений уравнение (6) преобразуем к каноническому виду (не меняя обозначений)

$$y' = y^2 + R(z). \tag{10}$$

Тогда матрица (2) системы (1) примет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2R & 0 & 2 \\ 0 & -R & 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Очевидно, что $R(z)$ в качестве особых точек содержит, вообще говоря, особые точки a, b, c и нули a. В дальнейшем $R(z)$ будем рассматривать в области D, где нет ее особых точек и $z = \infty$. Система (3) в этом случае примет вид

$$\begin{cases} \dot\varphi = \varphi^2 - 2\varphi\psi + 2\omega + 2R, & (*) \\ \dot\psi = 2\psi^2 - \omega + R, & (**) \\ \dot\omega = 2\psi\omega + 2R\psi. & (***) \end{cases} \tag{12}$$

Заметим, что к такому виду можно свести систему (3), не преобразуя (6) к (10). Матрица (5) в этом случае запишется

$$B = \begin{pmatrix} -\varphi & 1 & 0 \\ 0 & \varphi - 2\psi & 2 \\ 0 & 0 & 2\psi \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Фундаментальная система решений системы $\dot y = By$

$$y = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & \beta_{12} & \beta_{13} \\ 0 & 0 & \gamma_{13} \end{pmatrix}, \tag{14}$$

где $z_0 \in D$ и не совпадает с особыми точками подынтегральных функций, а путь интегрирования не проходит через особые точки.

$$\alpha_{11} = \exp\left(-\int_{z_0}^{z} \varphi dx\right), \quad \beta_{11} = \gamma_{11} = 0,$$

$$\alpha_{12} = \exp\left(-\int_{z_0}^{z} \varphi dz\right) \int_{z_0}^{z} \left(\exp 2\int_{z_0}^{z} (\varphi - \psi)\, dz\right) dz,$$

$$\beta_{12} = \exp\int_{z_0}^{z} (\varphi - 2\psi)\, dz, \quad \gamma_{12} = 0,$$

$$\alpha_{13} = 2\exp\left(-\int_{z_0}^{z} \varphi dz\right) \int_{z_0}^{z} \left(\exp 2\int_{z_0}^{z} (\varphi - \psi)\, dz \int_{z_0}^{z} \exp\int_{z_0}^{z} (4\psi - \varphi)\, dz\right) dz,$$

$$\beta_{13} = 2\exp\int_{z_0}^{z} (\varphi - 2\psi) dz \int_{z_0}^{z} \left(\exp\int_{z_0}^{z} (4\psi - \varphi)\, dz\right) dz;$$

$$\gamma_{13} = \exp 2\int_{z_0}^{z} \psi dz. \tag{15}$$

Известно, что решение системы (1) с матрицей (11) в D особых точек иметь не может. Найдем интегральную подстановку этой системы по формуле $x = S^{-1}y$, где S^{-1} — обратная матрица к (4), y — (14)—(15). Тогда

$$x = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ -\varphi\alpha_{11} & -\varphi\alpha_{12} + \beta_{12} & -\varphi\alpha_{13} + \beta_{13} \\ (\varphi\psi - \omega)\alpha_{11} & (\varphi\psi - \omega)\alpha_{12} - \psi\beta_{12} & (\varphi\psi - \omega)\alpha_{13} - \psi\beta_{13} + \gamma_{13} \end{pmatrix}.$$

Из голоморфности в D α_{11} видно, что φ может иметь в D лишь простые полюсы с целыми отрицательными вычетами. В этих точках α_{11} имеет нуль. Аналогично можно установить, что ψ в D может иметь лишь простые полюсы, ω может допускать полюсы второго порядка, но других особенностей φ, ψ, ω иметь не могут. Следовательно, система (12) — система, которая имеет подвижными особыми точками только полюсы.

Действительно, систему (**) — (***) из (12) можно привести (исключая ω) к уравнению второго порядка

$$\ddot{\psi} = 6\dot{\psi}\psi - 4\psi^3 - 4R\psi + \dot{R}, \tag{16}$$

которое преобразованием $\psi = -u/2$ сводится к одному из 50 канонических уравнений Пенлеве, а преобразованием $u = \dot{v}/v$ — к линейному уравнению

$$\dddot{v} + 4R\dot{v} + 2\dot{R}v = 0. \tag{17}$$

Пусть $z_0 \in D$ — произвольная точка, тогда существует однопараметрическое решение (17) с простым нулем в z_0 и одно решение с двукратным нулем. Семейству v с простым нулем соответствует полярное решение (16) с главной частью $G_\psi = -\frac{1}{2(z-z_0)}$ и параметром ψ_0(ψ_0 — коэффициент при $(z-z_0\backslash^0)$, а решению v с двукратным нулем соответствует полярное решение ψ с главной частью $\widetilde{G}_\psi = -\frac{1}{z-z_0}$. Других видов подвижных особых точек, т. е. точек $z_0 \in D$, $\psi(z)$ иметь не может. Из ((12), (*), (**)) следует, что семейству полярных решений (16) с главной частью $G_\psi = -\frac{1}{2(z-z_0)}$ соответствуют полярные решения ω и φ с главными частями $G_\omega = \frac{-2\psi_0}{z-z_0}$, $G_\varphi = -\frac{2}{z-z_0}$ (параметр $\varphi_0 = -4\psi_0$). Но в этом случае $\varphi(z)$ может быть голоморфным, причем $\varphi_0 = \varphi(z_0) = 4\psi_0$. Полярному решению $\psi(z)$ с главной частью $\widetilde{G}_\psi = -\frac{1}{z-z_0}$ соответствуют полярные решения ω и φ с главными частями $\widetilde{G}_\omega = \frac{1}{z-z_0}$, $\widetilde{G}_{1\varphi} = -\frac{1}{z-z_0}$ или $G_{2\varphi} = -\frac{2}{z-z_0}$.

Здесь мы не касаемся неподвижных особых точек, так как структура решений в окрестности этих точек зависит от характера особенностей $R(z)$. Заметим лишь только, что в случае рациональности $R(z)$, решение (16) не может иметь решений с конечным числом полюсов, отличных от рациональных. Это же относится и к ω, и к φ.

Список литературы

1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.— М., 1966.— С. 423.
2. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений.— М., 1958.— С. 47.

Поступила в редакцию 28.12.84.

УДК 519.1

М. М. КОВАЛЕВ, В. М. КОТОВ

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ СЕРИЙ ПРИБЛИЖЕННЫХ АЛГОРИТМОВ

В теории схем, распознавании образов идея синтеза из «ненадежных алгоритмов» алгоритмов с требуемой точностью получила широкое распространение. Пути использования этой идеи в дискретной оптимизации (ДО) указали Ю. И. Журавлев и В. К. Леонтьев. В настоящей статье предлагается схема построения серии приближенных решений и указывается метод получения оценки погрешности лучшего из построенных решений, иллюстрируемый на модельной задаче ДО — задаче коммивояжера на максимум, для которой, в частности, построен полиномиальный алгоритм, гарантирующий получение гамильтонова цикла длиной не менее 5/6 длины оптимального.

Схема, называемая методом релаксаций и разбиений, позволяет строить серии приближенных решений для задачи линейной комбинаторной оптимизации (ЛКО): $f^* = \max\{f(X) \mid X \in F\}$, $f(X) = \sum_{i \in X} f_i$, $f_i \geqslant 0$, F — независимая система; это означает следующее: если $X \in F$, $Y \subset X$, то $Y \in F$.

Этап 1 (релаксация). Решается серия из m релаксационных задач $\max\{f(X) \mid X \in F_i\}$, $i = 1, \ldots, m$, где семейство F_i таково, что для любого $X \in F$ найдутся множества $W_i^1, \ldots, W_i^{\alpha_i} \in F_i$, обладающие свойством $X \subset W_i^1 \cup \ldots \cup W_i^{\alpha_i}$. Ясно, что для оптимального решения W_i^* релаксационной задачи справедлива оценка: $f(W_i^*) \geqslant f^*/\alpha_i$.

Этап 2 (разбиение). Строится семейство $W = k_1 W_1^* \cup \ldots \cup k_m W_m^*$ (k_i — целое число), где символ $k_i W_i^*$ означает, что все элементы из W_i^* в $k_i W_i^*$ повторяются k_i раз. Далее, семейство W разбивается на s непересекающихся подмножеств $X_1, \ldots, X_s$, каждое из которых принадлежит семейству F и все множества достраиваются, например, градиентным алгоритмом [1] до максимальных по включению множеств $U_1, \ldots, U_s$ семейства (приближенных решений задачи ЛКО). Лучшее из этих решений по значению целевой функции принимается за результат X^0 работы метода релаксаций и разбиений.

Будем говорить, что метод обладает оценкой точности ξ, если для любой задачи ЛКО справедливо $f(X^0) \geqslant \xi f^*$.

Предложение 1 [2]. Оценка точности метода релаксаций и разбиений определяется формулой:

$$\xi = \sum_{i=1}^{m} \frac{k_i}{s\alpha_i}.$$

Понятно, что, применяя метод релаксаций и разбиений для приближенного решения задач ЛКО, надо эффективно выбрать серию релаксационных задач, а главное — удачно задать коэффициенты, чтобы оценка точности $\sum_{i=1}^{m} (k_i/s\alpha_i)$ достигла требуемой величины. Покажем, как это можно сделать, на примере модельной задачи ЛКО — задачи коммивояжера.

Пусть $K_n (\bar{K}_n)$ — полный n-вершинный неориентированный (ориентированный) граф с неотрицательными весами ребер. Необходимо найти гамильтонов цикл (орцикл) X^* с максимальным суммарным весом ребер (орребер). Задача коммивояжера на максимум (ЗКМ) имеет многочисленные приложения и исследовалась рядом авторов [2—8]. Напомним, что ЗКМ на орграфе (несимметричная матрица весов) называется асимметричной, а на графе (симметричная матрица весов) — симметричной. Если веса удовлетворяют неравенству треугольника: $c_{ij} \leqslant c_{ik} + c_{kj}$ для любых i, j, k, то симметричная ЗКМ называется метрической; если ранг матрицы весов равен 1, т. е. $c_{ij} = a_i b_j$ для всех i, j, то асимметричная ЗКМ называется одноранговой.

Заметим, что ЗКМ есть случай задачи ЛКО, когда семейство F состоит из подмножеств ребер графа K_n, не содержащих циклов (орциклов), с числом ребер, меньшим n.

Асимметричная ЗКМ. Стандартный градиентный алгоритм имеет точность 1/3 [4]. Построим серию из трех туров *. Релаксационными

* Гамильтонов цикл, или орцикл, называется туром, а его фрагмент — частичным туром.

будут задача о назначении и задача о паросочетании на специальном графе.

Пусть $\bar{N}$ — множество орребер орграфа $\bar{K}_n$, соответствующих решению задачи о назначении с матрицей весов $[c_{ij}]_{n\times n}$. Построим неориентированный граф, заменив в K_n каждую пару вершин i, j со свойством $(i, j)\in\bar{N}$, $(j, i)\in\bar{N}$ конструкцией U_{ij}, изображенной на рис. 1. Веса ребер, не входящих в конструкцию U_{ij}, инцидентных вершинам i', j'' (i'', j'), полагаем равными половинам весов орребер, входящим в вершины i, j (выходящим из вершин i, j), веса ребер, не инцидентных вершинам i', i'', j', j'', полагаем равными 0.

Пусть P — паросочетание максимального веса, покрывающее все новые вершины. Множество P преобразуем в множество орребер $\bar{P}$ по правилу: каждое ребро (s, i') или (s, j'') заменяем орребром (s, i) или (s, j); каждое ребро (s, i''), (s, j') заменяем орребром (i, s) или (j, s).

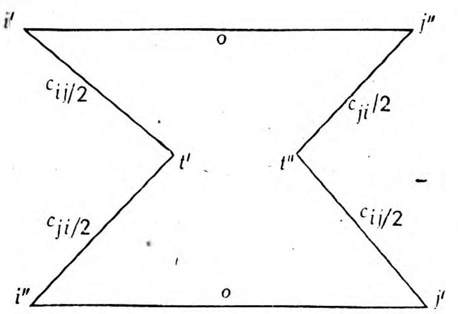


Рис. 1

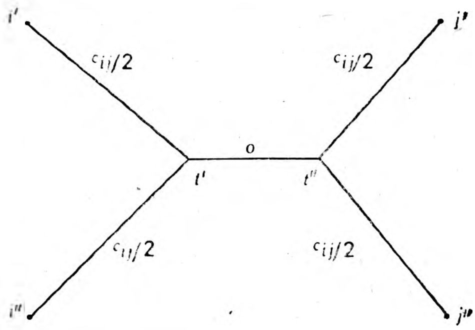


Рис. 2

Пусть $\bar{N}_1$ — подмножество орребер из $\bar{N}$, оставшихся после удаления из каждого орцикла орребер минимального веса. Пусть $\bar{N}_2$ — множество орребер из $\bar{N}$, оставшихся после удаления из каждого орцикла вида i, j, i одного из орребер, причем сохранено то, которое имеет тот же вес, что ребро в P, инцидентное вершине t' или t''.

Строим три частичных тура: $T_1 = \bar{N}_1$, T_2 и T_3 есть разбиение множества $\bar{N}\cup\bar{P}$.

Теорема 1. Для лучшего из частичных туров T_1, T_2, T_3 справедливо неравенство $c(T)\geqslant 4f^*/7$.

Из теоремы 1 очевидным образом вытекает алгоритм приближенного решения ЗКМ с оценкой точности 4/7 и трудоемкости $O(n^3)$.

Симметричная ЗКМ. Следующий алгоритм построил Сердюков [7]. Решается серия из двух релаксационных задач: о максимальном взвешенном паросочетании M^* и о максимальном взвешенном 2-сочетании C^*. Семейство $W = M^*\cup C^*$ разбивается на два частичных тура. Так как $f(W^*)\geqslant f^*/2$, а $f(c^*)\geqslant f^*$, в результате будет найден тур X^0, для веса которого справедливо неравенство $f(X^0)\geqslant 3f^*/4$.

Можно построить алгоритм A той же точности 3/4, но с меньшей на порядок трудоемкостью. В алгоритме A также две релаксационные задачи, обе о максимальном взвешенном паросочетании: одна, как и ранее, на исходном графе, а вторая на модифицированном. Модифицированный граф строится путем преобразования каждого ребра $(i, j)\in M^*$ в конструкцию, изображенную на рис. 2.

Пусть P' — паросочетание максимального веса в модифицированном графе, покрывающее все новые вершины. Отождествляя вершины i' и i'', j' и j'', t' и t'', строим семейство ребер графа K_n (если в P' отсутствует ребро (t', t''), то ребро (i, j) войдет в P), ребра между конструкциями, совпадающие при слиянии, в P дублируются.

Несложно проверить, что множество ребер $W = M^* \cup P$ можно разбить на два частичных тура T_1, T_2. Пусть X_1, X_2 — туры, достроенные градиентным алгоритмом соответственно из T_1, T_2.

Теорема 2. Оценка точности алгоритма A равна 3/4.

Доказательство вытекает из следующей цепочки неравенств:

$$\max\{f(X_1), f(X_2)\} \geqslant \frac{1}{2} f(X_1 \cup X_2) \geqslant \frac{1}{2} f(M^* \cup P) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} f^* + f^*\right) \geqslant \frac{3}{4} f^*.$$

Метрическая ЗКМ. Множество простых циклов, покрывающих все вершины графа K_n и не имеющих общих ребер, назовем Ω семейством циклов. Если наименьшее число ребер в циклах Ω семейства равно t, то называем его Ω_t-семейством. Очевидно, что $3 \leqslant t \leqslant n$. Пусть W^t — оптимальное решение в релаксационной задаче максимизации $f(I)$ на Ω_t-семействе циклов.

Циклы $C_1, \ldots, C_r$ множества W^t занумеруем так, что для первых p из них и только для них справедливо $f(e_i) > \xi f(C_i)$, где $e_i = (u_i^1, v_i^2)$ — ребро с минимальным весом в C_i. Пусть $e_i^1 = (v_i^1, v_i^2)$ — ребро максимального веса в C_i и пусть $e_i^2 = (v_i^1, v_i^3)$, $e_i^3 = (v_i^2, v_i^4)$ — два смежных ему ребра (если C_i — треугольник, то $v_i^3 = v_i^4$).

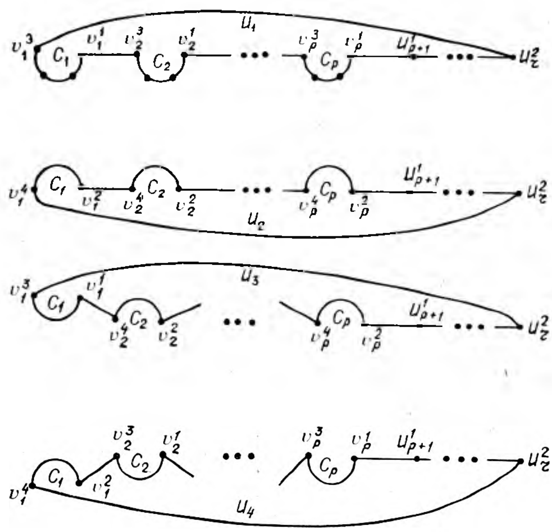


Рис. 3

Рассмотрим четыре тура:

$$\overline{U}_1 = \{v_1^3, \ldots, v_1^1, v_2^3, \ldots, v_2^1, v_3^3, \ldots, v_p^3, \ldots, v_p^1, u_{p+1}^1, \ldots, u_{p+1}^2, \ldots, u_r^2, v_1^3\},$$
$$\overline{U}_2 = \{v_1^4, \ldots, v_1^2, v_2^4, \ldots, v_2^2, v_3^4, \ldots, v_p^4, u_{p+1}^1, \ldots, u_{p+1}^2, \ldots, u_r^2, v_1^4\},$$
$$\overline{U}_3 = \{v_1^3, \ldots, v_1^1, v_2^4, \ldots, v_2^2, v_3^3, \ldots, v_p^{2\ (\text{или } 1)}, u_{p+1}^1, \ldots, u_{p+1}^2, \ldots, u_r^2, v_1^3\},$$
$$\overline{U}_4 = \{v_1^4, \ldots, v_1^2, v_2^2, \ldots, v_2^1, v_3^4, \ldots, v_p^{1\ (\text{или } 2)}, u_{p+1}^1, \ldots, u_{p+1}^2, \ldots, u_r^2, v_1^4\},$$

заданных порядком обхода вершин (рис. 3).

Предложение 2. Ребра из $C_i \setminus \{e_i^2, e_i^3\}$, $i = 1, \ldots, p$ принадлежат каждому из туров $\overline{U}_1, \ldots, \overline{U}_4$. Ребро e_i^2 (e_i^3) содержится в двух турах $\overline{U}_1$, $\overline{U}_3$ $(\overline{U}_2, \overline{U}_4)$. Каждое из ребер (v_i^1, v_{i+1}^3), (v_i^1, v_{i+1}^4) (v_i^2, v_{i+1}^3), (v_i^2, v_{i+1}^4) принадлежит только одному из туров $\overline{U}_1, \ldots, \overline{U}_4$.

Предложение 3 [6]. Пусть W — семейство, составленное из ребер туров $\overline{U}_1, \ldots, \overline{U}_4$. Тогда $f(W) \geqslant 4(1-\xi) f(W^t)$, где $\xi \geqslant 1/(t+3)$.

Из предложений 1, 2, 3 имеем $f(X^0) \geqslant 4(1-\xi) f^*$, где X^0 — лучший из туров $\overline{U}_1, \ldots, \overline{U}_4$, поэтому справедлива

Теорема 3. $f(X^0) \geqslant \dfrac{t+2}{t+3} f^* \geqslant \dfrac{5}{6} f^*$.

Исходное Ω_t — семейство циклов можно получить с помощью полиномиального алгоритма $(O(n^4))$ решения задачи о максимальном взвешенном 2-сочетании. В этом случае t может равняться трем.

Серию из четырех туров с оценкой точности $(t+2)/(t+3)$ можно построить и другими способами. Например, для лучшего из следующих четырех туров:

$$U'_1 = \{U_1^1, \dots, U_1^2, U_2^1, \dots, U_2^2, \dots, U_r^2, U_1^1\},$$
$$U'_2 = \{U_1^2, \dots, U_1^1, U_2^2, \dots, U_2^1, \dots, U_r^1, U_1^2\},$$
$$U'_3 = \{U_1^1, \dots, U_1^2, U_2^2, \dots, U_2^1, \dots, U_r^{1(2)}, U_1^1\},$$
$$U'_4 = \{U_1^2, \dots, U_1^1, U_2^1, \dots, U_2^2, \dots, U_r^{2\,(1)}, U_1^2\}$$

справедливы неравенства:

$$\frac{f(X^{00})}{f^*} \geqslant \frac{f(U'_1) + f(U'_2) + f(U'_3) + f(U'_4)}{4f^*} \geqslant \frac{4\left(\sum_{i=1}^{r} f(C_i) - 2f(e_i)\right)}{4f^*} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{4\sum_{i=1}^{r}(f(C_i) - 2f(e_i))}{4\sum_{i=1}^{r} f(C_i)} \geqslant \frac{4tf(e_i) - 2f(e_i)}{4tf(e_i)} \geqslant 1 - \frac{1}{2t} \geqslant \frac{5}{6}.$$

Тип задачи	Трудоемкость алгоритма		
	$O(n^2)$	$O(n^3)$	$O(n^4)$
Асимметричная		1/3 [4]; 1/2 [фольклор]; 4/7*	
Симметричная	1/2 [3]	1/2 + 1/(2n) [4]; 5/8 [5]; 2/3 [5]; 3/4*	13/18 [5]; 3/4 [7]
Метрическая		3/4 [5]	$\frac{t+2}{t+3} \geqslant \frac{5}{6}$ [2]
Одноранговая		1/2 [5]	

* **Результаты данной работы.**

Сводка известных нам оценок точности полиномиальных алгоритмов для ЗКМ приведена в таблице.

Список литературы

1. Ковалев М. М. // Кибернетика.—1985.— № 6.— С. 77.
2. Ковалев М. М., Котов В. М. // 30 Intern. Wiss. Koll. TH Ilmenau.— 1985.— S. 53.
3. Fisker M., Nemhauser G., Wolsey L. // Oper. Res.—1979.— V. 27.— № 4.— P. 799.
4. Ковалев М. М., Котов В. М. // Ж. выч. мат. и мат. физ.—1981.— № 4.— С. 1035.
5. Ковалев М. М., Котов В. М. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук.—1984.— № 4.— С. 45.
6. Гляков П. В., Ковалев М. М., Котов В. М. // Сб. ИТК АН БССР.— 1985.— С. 86.
7. Сердюков А. И. // Управляемые системы.— 1985.— Вып. 25.— С. 80.
8. Косточка А. В., Сердюков А. И. // Управляемые системы.—1985.— Вып. 26.— С. 55.

Поступила в редакцию 16.01.85.

УДК 517.937

Л. Г. ТРЕТЬЯКОВА

К ЗАДАЧЕ О 2π-ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СТРУНЫ

Рассмотрим задачу о 2π-периодических решениях квазилинейного гиперболического уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varepsilon f\left(t,\ x,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial t},\ \frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{1}$$

удовлетворяющих условиям

$$u(t,\ 0) = u(t,\ \pi) = 0, \tag{2}$$

где функция $f(t,\ x,\ u,\ \zeta,\ \eta)$ является 2π-периодической по t и непрерывной по всем аргументам $x \in [0,\ 2\pi]$, t, u, ζ, $\eta \in R$ и удовлетворяет условию

$$f(t,\ 0,\ 0,\ 0,\ \eta) = f(t,\ \pi,\ 0,\ 0,\ \eta) = 0. \tag{3}$$

В [1, 2] эта задача изучалась в пространстве $L_2(0,\ \pi)$. При помощи замены Ван дер Поля $u = B^{-1}\cos Bt\varphi + B^{-1}\sin Bt\psi$, $\dot{u} = -\sin Bt\varphi + \cos Bt\psi$ (здесь B — положительный квадратный корень из оператора $Au = -u_{xx}$ с областью определения $D = \{u \in W_2^2(0,\ \pi),\ u(0) = u(\pi) = 0\}$) она сводилась к обыкновенному дифференциальному уравнению с непрерывным оператором, которое затем изучалось при помощи обобщенной теремы Н. Н. Боголюбова. В результате установлено при достаточно малом ε существование и единственность малого в некоторой форме 2π-периодического по t решения $u(t,\ x)$ задачи (1)—(2), при этом предполагалось, что правая часть уравнения $f(t,\ x,\ u,\ \zeta,\ \eta)$ является линейной функцией по переменным ζ и η. От этого предположения можно отказаться, если вместо замены Ван дер Поля использовать замену Я. Курцвейля:

$$u(t,\ x) = \int\limits_{-x+t}^{x+t} v(t,\ s)\,ds, \tag{4}$$

которая преобразует задачу (1)—(2) к обыкновенному дифференциальному уравнению в банаховом пространстве непрерывных на всей оси 2π-периодических функций, имеющих нулевое среднее. Настоящая работа и посвящена этому обобщению.

1. Обозначим X_0 банахово пространство непрерывных на всей оси 2π-периодических функций, имеющих нулевое среднее с нормой

$$\|v\| = \sup_{z \in R} |v(z)|.$$

Введем в рассмотрение определенную на $R + X_0$ и принимающую значения в X_0 функцию

$$G(t,\ w) = \frac{1}{2}\tilde{f}\left(t,\ z - t,\ \int\limits_{2t-z}^{z} w(s)\,ds,\ w(s) - w(2t - s),\ w(s) + w(2t - s)\right);$$

здесь $\tilde{f}(t,\ x,\ u,\ \zeta,\ \eta)$ — непрерывное, 2π-периодическое и нечетное продолжение по x в R функции $f(t,\ x,\ u,\ \zeta,\ \eta)$, обладающее свойством $\tilde{f}$, $(t,\ -x,\ -u,\ -\zeta,\ \eta) = -\tilde{f}(t,\ x,\ u,\ \zeta,\ \eta)$.

Рассмотрим в X_0 дифференциальное уравнение

$$\frac{dv}{dt} = \varepsilon G(t,\ v). \tag{5}$$

(Основные теоремы об уравнениях в банаховых пространствах см., например, в [3]).

Теорема 1. Если $v(t, z)$ — 2π-периодическое по t решение уравнения (5), то $u(t, x) = \int\limits_{-x+t}^{x+t} v(t, s)\,ds$ — 2π-периодическое по t решение задачи (1) — (2). Обратно, если $u(t, x)$ — 2π-периодическое по t решение задачи (1)—(2), то $v(t, x) = \frac{1}{2}(\tilde{u}_t(t, x-t) + \tilde{u}_x(t, x-t))$ является 2π-периодическим по t решением уравнения (5) в пространстве X_0, где $\tilde{u}(t, x)$ — нечетное, непрерывное, 2π-периодическое продолжение по x в R функции $u(t, x)$.

2. Допустим, что функция $\tilde{f}(t, x, u, \zeta, \eta)$ имеет вид

$$\tilde{f}(t, x, u, \zeta, \eta) = f_{0H}(t, x) + a_r(t, x)u + b_r(t, x)\zeta + c_H(t, x)\eta + \tilde{\omega}(t, x, u, \zeta, \eta), \quad (6)$$

причем $\omega(t, x, 0, 0, 0) = 0$, функции $f_{0H}(t, x)$, $a_r(t, x)$, $b_r(t, x)$, $c_{\text{н}}(t, x)$, $\tilde{\omega}(t, x, u, \zeta, \eta)$ являются непрерывными по всем своим аргументам и 2π-периодическими по t и, кроме того, $|\tilde{\omega}(t, x, u_1, \zeta_1, \eta_1) - \tilde{\omega}(t, x, u_2, \zeta_2, \eta_2)| \leqslant \tilde{\omega}_0(\rho)(|u_1 - u_2| + |\zeta_1 - \zeta_2| + |\eta_1 - \eta_2|)$ $(|u_1|, |u_2|, |\zeta_1|, |\zeta_2|, |\eta_1|, |\eta_2| \leqslant \rho)$, где $\tilde{\omega}_0(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$. В этом случае функция $G(t, w)$ имеет вид:

$$G(t, w) = \frac{1}{2}\Big[f_{0H}(t, z-t) + a_r(t, z-t)\int\limits_{2t-z}^{z} w(s)\,ds + b_r(t, z-t)(w(z) - $$
$$- w(2t-z)) + c_H(t, z-t)(w(z) + w(2t-z)) + \tilde{\omega}\Big(t, z-t, \int\limits_{2t-z}^{z} w(s)ds, w(t) -$$
$$- w(2t-z), w(t) + w(2t-z)\Big)\Big]$$

и допускает представление $G(t, w) = g_0(t) + A(t)w + \Omega(t, w)$, где $g_0(t) = \frac{1}{2} f_{0H}(t, z-t)$; $A(t)w = \frac{1}{2}\Big[a_r(t, z-t)\int\limits_{2t-z}^{z} w(s)\,ds + b_r(t, z-t)(w(z) - w(2t-z)) + c_H(t, z-t)(w(z) + w(2t-z)\Big]$; $\Omega(t, w) = \frac{1}{2}\tilde{\omega}\Big(t, z; t, \int\limits_{2t-z}^{z} w(s)\,ds, w(z) - w(2t-z), w(z) + w(2t-z)\Big)$, причем функция $\Omega(t, w)$ по переменной w удовлетворяет условию Липшица $\|\Omega(t, w_1) - \Omega(t, w_2)\| \leqslant \Omega_0(\rho)\|w_1 - w_2\|$ $(\|w_1\|, \|w_2\| \leqslant \rho)$, где $\Omega_0(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$. Кроме того, функция $G(t, w)$ является 2π-периодической по t.

Таким образом, уравнение (5) в пространстве X_0 запишется следующим образом:

$$\frac{dv}{dt} = \varepsilon\,[g_0(t) + A(t)v + \Omega(t, v)]. \quad (7)$$

По теореме 4 из [4] дифференциальное уравнение (7) в X_0 имеет малое единственное в норме $C(X_0)$ 2π-периодическое по t решение при достаточно малом ε, если функция $g_0(t)$ имеет нулевое среднее, т. е.

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g_0(t)\,dt = 0 \quad (8)$$

и если спектр оператора

$$B = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} A(t)\,dt \quad (9)$$

не пересекается с мнимой осью.

Лемма 1. Функция $g_0(t)$ имеет нулевое среднее тогда и только тогда, когда

$$\int_0^{\pi}[f_{0H}(z+t,\ t)-f_{0H}(z-t,\ t)]dt=0. \tag{10}$$

Лемма 2. Оператор (9) может быть представлен в виде

$$Bv(z)=[b_+(z)-c_-(z)]\,v(z)+\int_{-\pi}^{\pi}k(z,\ s)\,v(s)\,ds, \tag{11}$$

где $b_+(z)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}b_r(z+t,\ t)+b_r(z-t,\ t)]\,dt;$ $c_-(z)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}[c_H(z+t,$ $t)-c_H(z-t,\ t)]\,dt;$ $k(z,\ s)=\frac{1}{8\pi}\left[b_\alpha\left(\frac{z+s}{2},\ \frac{z-s}{2}\right)+c_\alpha\left(\frac{z+s}{2},\ \frac{z-s}{2}\right)\right]+$ $+\frac{1}{4\pi}[E(z,\ s)+E(z,\ s+2\pi)]+a_+(z)\,k_0(z,\ s);$ $a_+(z)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}[a_r(z+t,$ $t)+a_r(z-t,\ t)]\,dt;$ $b_\alpha\left(\frac{z+s}{2},\ \frac{z-s}{2}\right)=b_r\left(\frac{z+s}{2},\ \frac{z-s}{2}\right)+b_r\left(\frac{z+s}{2}+\right.$ $\left.+2\pi\frac{z-s}{2}+2\pi\right);$ $c_\alpha\left(\frac{z+s}{2},\ \frac{z-s}{2}\right)=c_H\left(\frac{z+s}{2},\ \frac{z-s}{2}\right)+c_H\left(\frac{z+s}{2}+\right.$ $\left.+2\pi,\ \frac{z-s}{2}+2\pi\right);$

$$k_0(z,\ s)=\begin{cases}1, & -\pi\leqslant s\leqslant z\\ 0, & z<s\leqslant\pi;\end{cases}\qquad E(z,\ s)=\int_0^{\frac{s+z}{2}}a_r(t,\ z-t)\,dt.$$

Обозначим W банахово пространство непрерывно-дифференцируемых по обеим аргументам функций $u(t,\ x)$, допускающих при всех t нечетное, непрерывное, 2π-периодическое продолжение по x в R с нормой

$$\|u\|_W=\sup_{t,\ z\in R}(|u_t(t,\ x)|+|u_x(t,\ x)|).$$

Теорема 2. Пусть выполнено условие (10) и спектр оператора B не пересекается с мнимой осью. Тогда задача (1)—(2) с правой частью (6) имеет при достаточно малом ε в шаре $\|u\|_W<r$ достаточно малого радиуса r единственное 2π-периодическое по t решение $u_\varepsilon(t,\ x)$, стремящееся к нулю в W вместе с ε.

В заключение автор выражает благодарность профессору П. П. Забрейко за постановку и обсуждение задачи.

Список литературы

1. Забрейко П. П., Фетисов Ю. И. // Вестн. Ярославского ун-та.—1974.— С. 7, 150.
2. Фетисов Ю. И. // Вестн. Ярославского ун-та.—1975.— № 12.— С. 131.
3. Далецкий Ю. А., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах.— М., 1970.
4. Забрейко П. П., Колесов Ю. С., Красносельский М. А. // Докл. АН СССР.—1969.— Т. 184.— № 3.— С. 526.

Поступила в редакцию 14.03.85.

УДК 539.3

И. А. ПРУСОВ, В. А. САВЕНКОВ

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ОРТОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ВНУТРЕННИМ ПРЯМОЛИНЕЙНЫМ РАЗРЕЗОМ

Пусть упругое ортотропное тело занимает в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ область $S^-(y < 0)$, ограниченную прямой $L_0(y = 0)$. При этом будем предполагать, что компоненты напряжений и проекции смещений на оси x и y в области S^- определяются по формулам [1]:

$$\sigma_y = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{2}[s_j\Phi(z_j) + n_j\Phi(\bar{z}_j)],\quad z_j = x + \mu_j y,$$

$$\sigma_x = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{2}[s_j\mu_j^2\Phi(z_j) + n_j\bar{\mu}_j^2\Phi(\bar{z}_j)],$$

$$\tau_{xy} = -2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{2}[s_j\mu_j\Phi(z_j) + n_j\bar{\mu}_j\Phi(\bar{z}_j)],\quad \mu_j = i\gamma_j, \tag{1}$$

$$u = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{2}[s_j p_j\varphi(z_j) + n_j\bar{p}_j\varphi(\bar{z}_j)],\quad p_j = c_{11}\mu_j^2 + c_{12},$$

$$v = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{2}[s_j q_j\varphi(z_j) + n_j\bar{q}_j\varphi(\bar{z}_j)],\quad \mu_j q_j = c_{12}\mu_j^2 + c_{22},$$

где $\Phi(z_j)$ — произвольная аналитическая функция; μ_j — характеристические числа; $\varphi'(z_j) = \Phi(z_j)$; s_j, n_j — произвольные постоянные; c_{ik} — коэффициенты закона Гука.

Вначале рассмотрим смешанную краевую задачу, полагая, что на отрезке $L'(|x| < a)$ силой p_0, направленной по оси y вертикально вниз, вдавливается плоский штамп, касательные напряжения $\tau_{xy} = 0$ на L'; внешняя нагрузка на участках $L'' = L_0 \setminus L'$ контура L_0 и компоненты напряжений на бесконечности отсутствуют. Кроме того, предположим, что в некоторой точке $N_0(x_0, y_0)$ внутри области S^- приложена сосредоточенная сила с проекциями (X_0, Y_0). Требуется найти функцию $\Phi(z_j)$, удовлетворяющую краевым условиям на L_0 и условиям однозначности перемещений в области S^-.

При построении решения этой задачи искомые функции напряжений будем искать в виде:

$$\begin{aligned}\Phi(z_j) &= \frac{a_0}{z_j - \tau_j} + \sum_{k=1}^{2}\frac{\alpha_k\bar{a}_0 + \beta_k b_0}{z_j - \bar{\tau}_k} + \Phi_0(z_j),\quad z_j \to \tau_j,\\ \Phi(\bar{z}_j) &= \frac{b_0}{\bar{z}_j - \bar{\tau}_j} + \sum_{k=1}^{2}\frac{\lambda_k a_0 + \nu_k\bar{b}_0}{\bar{z}_j - \tau_k} + \Phi_0(\bar{z}_j),\quad \bar{z}_j \to \bar{\tau}_j.\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $\Phi_0(z_j)$ — функция, голоморфная в окрестности точек $\tau_j = x_0 + \mu_j y$ и $\bar{\tau}_j$; α_k, β_k, λ_k, ν_k — произвольные коэффициенты. Постоянные a_0 и b_0 определяются по формулам [1]:

$$a_0 = -\frac{Y_0 + \eta X_0}{2\pi i(1 + \varkappa)},\quad b_0 = -\frac{\varkappa(Y_0 + \eta X_0)}{2\pi i(1 + \varkappa)}, \tag{3}$$

где $\eta = -\frac{i}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}$, $\varkappa = \frac{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}(\gamma_1 + \gamma_2 + \sqrt{\gamma_1\gamma_2})c_{11} + c_{12}}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}(\gamma_1 + \gamma_2 - \sqrt{\gamma_1\gamma_2})c_{11} - c_{12}}$.

Распоряжаясь значениями коэффициентов s_j, n_j, α_k, β_k, λ_k, ν_k, согласно формулам (1), получим граничные условия на L_0 в виде:

$$\Phi_0^-(x)-\Phi_0^+(x)=0,\ x\in L'', \tag{4}$$

$$\operatorname{Im}[\Phi_0^-(x)-\Phi_0^+(x)]=0,\ \operatorname{Im}[\varkappa\Phi_0^-(x)+\Phi_0^+(x)]=g(x),\ x\in L', \tag{5}$$

где $g(x)=-\operatorname{Im}\sum\limits_{k=1}^{2}\dfrac{G_k a_0+B_k\bar b_0}{x-\tau_k}$, $G_k=\mu_0 s_k q_k(\bar\eta-\eta)+\lambda_k-\varkappa\alpha_k$, $B_k=$ $=\mu_0 n_k q_k(\bar\eta-\eta)+\nu_k-\varkappa\beta_k$, $\alpha_k=-s_k(1-\eta\bar\mu_k)$, $\beta_k=-n_k(1-\eta\bar\mu_k)$, $\lambda_k=s_k(1-\eta\mu_k)$, $\nu_k=n_k(1-\eta\mu_k)$, $\mu_0=[\sqrt{\gamma_1\gamma_2}(\gamma_1+\gamma_2-\sqrt{\gamma_1\gamma_2})c_{11}-$ $-c_{12}]^{-1}$, $s_1=-\dfrac{\sqrt{\gamma_2}}{2(\sqrt{\gamma_1}-\sqrt{\gamma_2})}$, $s_2=\dfrac{\sqrt{\gamma_1}}{2(\sqrt{\gamma_1}-\sqrt{\gamma_2})}$, $n_1=-\dfrac{\sqrt{\gamma_2}}{2(\sqrt{\gamma_1}+\sqrt{\gamma_2})}$, $n_2=-\dfrac{\sqrt{\gamma_1}}{2(\sqrt{\gamma_1}+\sqrt{\gamma_2})}$. Ограниченное на бесконечности решение краевой задачи (4) определяется известным способом [2].

Пусть теперь в полуплоскости S^- имеется прямолинейный разрез L, расположенный вдоль отрезка оси y. На берегах разреза зададим самоуравновешенную, непрерывную по Гельдеру нагрузку $\sigma_x^\pm-\eta\tau_{xy}^\pm$ (верхний знак относится к левому берегу разреза L).

Следуя методу работы [3], предположим, что вдоль L действуют непрерывно распределенные усилия. Тогда функцию $\Phi(z_j)$, описывающую поле напряжений в данной полуплоскости с разрезом, можно представить как результат суперпозиций (dy — элемент отрезка L):

$$\Phi(z_j)=\Phi_0(z_j)+\sum_{k=1}^{2}\int_L\left[\frac{a_0(t)}{z_j-t_j}+\frac{\alpha_k\overline{a_0(t)}}{z_j-\bar t_k}+\frac{\beta_k b_0(\bar t)}{z_j-\bar t_k}\right]dy, \tag{6}$$

$$\Phi(\bar z_j)=\Phi_0(\bar z_j)+\sum_{k=1}^{2}\int_L\left[\frac{b_0(\bar t)}{\bar z_j-\bar t_j}+\frac{\lambda_k a_0(t)}{\bar z_j-t_k}+\frac{\nu_k b_0(t)}{\bar z_j-t_k}\right]dy,$$

$$\Phi_0(z_j)=\frac{X(z_j)}{\pi(\varkappa+1)}\int_{-a}^{a}\frac{g_1(x)\,dx}{X^+(x)(x-z_j)}+\frac{ip_0X(z_j)}{2\pi}, \tag{7}$$

где

$$X(z_j)=\frac{1}{\sqrt{z_j^2-a^2}},\quad g_1(x)=\operatorname{Im}\sum_{k=1}^{2}\int_L\frac{G_k a_0(t)+B_k\bar b_0(t)}{x-t_k}\,dy. \tag{8}$$

Подставляя значение $g_1(x)$ из (8) в формулу (7), меняя порядок интегрирования и вычисляя внутренний интеграл, получим

$$\Phi_0(z_j)=-\frac{1}{2(\varkappa+1)}\sum_{k=1}^{2}\Big\{\int_L[G_k a_0(t)+B_k\bar b_0(t)]\Lambda(z_j,t_k)\,dy-$$
$$-\int_L[\bar G_k\overline{a_0(t)}+\bar B_k b_0(\bar t)]\Lambda(z_j,\bar t_k)\,dy\Big\}+\frac{ip_0}{2\pi\sqrt{z_j^2-a^2}},$$

где $\Lambda(z_j,t_k)=\dfrac{\sqrt{z_j^2-a^2}-\sqrt{t_k^2-a^2}}{\sqrt{z_j^2-a^2}\,(z_j-t_k)}$.

Учитывая формулу $dt_j=\mu_j dy$ и вводя функции $f(t)=-\dfrac{2\pi i\,a_0(t)}{\mu_j}$, $q(t)=$ $=-\dfrac{2\pi i\,b_0(t)}{\mu_j}$, приведем (6) к виду:

$$\Phi(z_j)=\Phi_0(z_j)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(t)\,dt_j}{t_j-z_j}+\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{2}\int_L\frac{\beta_k\,q(\bar t)-\alpha_k\overline{f(t)}}{\bar t_k-z_j}\,d\bar t_k,$$

$$\Phi(\bar z_j)=\Phi_0(\bar z_j)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\bar q(\bar t)\,d\bar t_j}{\bar t_j-\bar z_j}+\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{2}\int_L\frac{\lambda_k f(t)-\nu_k\bar q(t)}{\bar t_k-\bar z_j}\,dt_k, \quad (9)$$

$$\Phi_0(z_j)=-\frac{1}{4\pi i(\varkappa+1)}\sum_{k=1}^{2}\Big\{\int_L[B_k\bar q(t)-G_k f(t)]\,\Lambda(z_j,\ t_k)\,dt_k-$$

$$-\int_L[\overline{G_k}\overline{f(t)}-\overline{B_k}\,q(\bar t)]\,\Lambda(z_j,\ \bar t_k)\,d\bar t_k\Big\}+\frac{ip_0}{2\pi\sqrt{z_j^2-a^2}}.$$

Функции, определенные равенствами (9), обеспечивают выполнение граничных условий на границе полуплоскости.

Функции $f(t)$ и $q(t)$ определим, удовлетворяя условиям на берегах разреза:

$$2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{2}[s_j\mu_j^2\,\Phi^{\pm}(t_j)+n_j\bar\mu_j^2\,\Phi^{\pm}(\bar t_j)]+2\eta\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{2}[s_j\mu_j\,\Phi^{\pm}(t_j)+n_j\bar\mu_j\Phi^{\pm}(\bar t_j)]=$$

$$=\sigma_x^{\pm}-\eta\tau_{xy}^{\pm}=F^{\pm}(t),\ (t\in L). \quad (10)$$

Подставляя предельные значения функций (9) в краевое условие (10) и вычитая из первого равенства второе, находим

$$\bar q(t)=w(t)+A\overline{f(t)}+Df(t),\ (t\in L), \quad (11)$$

где $w(t)=\frac{1}{\Delta}[\rho_4\overline{F_1(t)}-\rho_2F_1(t)]$, $A=\frac{1}{\Delta}(\rho_2\rho_3-\rho_1\rho_4)$, $D=\frac{1}{\Delta}(\rho_1\rho_2-$ $-\rho_3\rho_4)$, $F_1(t)=F^+(t)-F^-(t)$, $\rho_1=\sum_{j=1}^{2}\mu_js_j(\mu_j+\eta)$, $\rho_2=\sum_{j=1}^{2}\mu_jn_j(\mu_j+$ $+\eta)$, $\rho_3=\sum_{j=1}^{2}\bar\mu_js_j(\bar\mu_j+\eta)$, $\rho_4=\sum_{j=1}^{2}\bar\mu_jn_j(\bar\mu_j+\eta)$, $\Delta=\rho_4^2-\rho_2^2$. Складывая предельные равенства и учитывая (11), после преобразований придем к сингулярному интегральному уравнению относительно неизвестной функции $f(t)$:

$$\sum_{j=1}^{2}\Big\{\frac{\gamma_j^2-i\eta\gamma_j}{\pi i}\int_L\frac{k_j\overline{f(t)}-\bar m_jf(t)}{\bar t_j-\bar t_{j0}}\,d\bar t_j-\frac{\gamma_j^2+i\eta\gamma_j}{\pi i}\int_L\frac{k_jf(t)-m_j\overline{f(t)}}{t_j-t_{j0}}\,dt_j+$$

$$+(i\eta-\gamma_j)K(t_{j0})+(i\eta+\gamma_j)\overline{K}(\bar t_{j0})\Big\}=F_0(t),\ t\in L. \quad (12)$$

Здесь

$$K(t_{j0})=\sum_{k=1}^{2}\Big\{\frac{\gamma_j}{\pi_i}\int_L\frac{\beta_{jk}f(t)-\alpha_{jk}f(\bar t)}{\bar t_k-t_{j0}}\,d\bar t_k-\frac{\gamma_j(s_j-n_j)}{2\pi i(\varkappa+1)}\Big[\int_L(d_kf(t)+$$

$$+c_k\overline{f(t)})\,\Lambda(t_{j0},\ t_k)\,dt_k+\int_L(d_k\overline{f(t)}+c_kf(t))\,\Lambda(t_{j0},\ \bar t_k)\,d\bar t_k\Big]\Big\},$$

$k_j=s_j-n_jD$, $m_j=n_jA$, $c_k=B_kA$, $d_k=B_kD-G_k$, $\beta_{jk}=(s_j\beta_k+n_j\nu_k)A$, $\alpha_{jk}=s_j(\beta_kD-\alpha_k)-n_j(\lambda_k-\nu_kD)$,

$$F_0(t)=\sum_{j=1}^{2}\Big\{\frac{\gamma_j^2-i\eta\gamma_j}{\pi i}\int_L\frac{n_jw(\bar t)\,d\bar t_j}{\bar t_j-\bar t_{j0}}-\frac{\gamma_j^2+i\eta\gamma_j}{\pi i}\int_L\frac{k_jw(t)\,dt_j}{t_j-t_{j0}}+$$

$$+(i\eta-\gamma_j)K_1(t_{j0})+(i\eta+\gamma_j)\overline{K}_1(\bar t_{j0})\Big\}+F^+(t)+F^-(t),$$

$$K_1(t_{j0})=\sum_{k=1}^{2}\left\{\frac{\gamma_j}{\pi_i}\int_L \frac{n_j\nu_k w(t)\,dt_k}{t_k-\bar{t}_{j0}}-\frac{\gamma_j}{\pi_i}\int_L \frac{s_j\beta_k\overline{w(t)}\,d\bar{t}_k}{\bar{t}_k-t_{j0}}+\frac{p_0\gamma_j(s_j-n_j)}{\pi i\sqrt{t_{j0}^2-a^2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\gamma_j^2(s_j-n_j)}{2\pi i(\varkappa+1)}\left[\int_L B_k w(t)\Lambda(t_{j0},\ t_k)\,dt_k+\int_L B_k\overline{w(t)}\Lambda(t_{j0},\ \bar{t}_k)\,d\bar{t}_k\right]\right\}.$$

Интегральное уравнение (12) обычным образом [4] сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно значений плотности $f(t)$ в узлах интерполяции.

Уравнение (12) необходимо решать совместно с условием однозначности смещений, которое в рассматриваемом случае имеет вид:

$$\sum_{j,k=1}^{2}\left\{\int_L\left[r_j'\overline{f(t)}+l_j'(Af(t)+\overline{w(t)})\right]d\bar{t}_j-\int_L[r_j f(t)+l_j(A\overline{f(t)}+w(t))]\,dt_j-\right.$$

$$-\varkappa\int_L[\beta_k Af(t)+(\beta_k D-\alpha_k)\overline{f(t)}+\beta_k\overline{w(t)}]\,d\bar{t}_k+\int_L[(\lambda_k-\nu_k D)f(t)-$$

$$\left.-\nu_k A\overline{f(t)}-\nu_k w(t)]\,dt_k+\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}\mathrm{Re}\int_L[B_k w(t)+c_k\overline{f(t)}+d_k f(t)]\,dt_k\right\}-$$

$$-p_0(\varkappa-1)=0,$$

где $r_j=\mu_0(p_j-\eta q_j)(s_j+n_jD)$, $r_j'=\mu_0(p_j-\eta\bar{q}_j)(s_j+n_jD)$, $l_j=\mu_0 n_j\times$ $\times(p_j-\eta q_j)$, $l_j'=\mu_0 n_j(p_j-\eta q_j)$.

Список литературы

1. Прусов И. А. Термоупругие анизотропные пластинки.— Минск, 1978.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М., 1966.
3. Фильштинский Л. А. // Изв. АН СССР. Сер. механика твердого тела.— 1980.— № 6.— С. 72.
4. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости.— М., 1973.

Поступила в редакцию 23.03.85.

УДК 517.925

А. В. КОЗУЛИН

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

1. **Необходимые условия.** Рассмотрим дифференциальное уравнение вида:

$$w'''=\frac{P_n(z,\ w')}{Q_m(z,\ w')},\tag{1}$$

где многочлены $P_n(z,\ w')=\sum_{k=0}^{n}p_k(z)w'^{\,n-k}$, $Q_m(z,\ w')=\sum_{k=0}^{m}q_k(z)w'^{\,m-k}$

предлагаются взаимно простыми, а $p_k(z)$, $q_k(z)$— аналитические коэффициенты в области D.

Выделим такие классы уравнений (1), решения которых имеют особенность, в окрестности которой главная часть есть полюс первого порядка, т. е. если w — решение уравнения (1), то

$$w=\frac{\alpha_1}{z-z_0}+\dots,\tag{2}$$

где $z_0\in D$, α_1 — целое число.

Обозначим w' через u. Тогда (1) примет вид:

$$u''=\frac{P_n(z,\ u)}{Q_m(z,\ u)}.\tag{3}$$

Пусть $Q_m(z,\ u) = [u-\alpha(z)]^s Q_{m-s}(z,\ u)$, т. е. $u=\alpha(z)$ является s-кратным корнем уравнения $Q_m(z,\ u)=0$. Положив в (3) $u=\alpha+v$, получим:

$$v'' = \frac{P_n(z,\ \alpha+v) - \alpha'' Q_{m-s}(z,\ \alpha+v)v^s}{v^s Q_{m-s}(z,\ \alpha+v)}. \tag{4}$$

В результате подстановки (ε — малый параметр)* $v=\varepsilon^2 T$, $z = z_0+\varepsilon^{s+1}\tau$, $z_0\in D$ равенство (4) переписывается так:

$$\frac{d^2T}{d\tau^2} = \frac{P_n[z_0+\varepsilon^{s+1}\tau,\ \alpha(z_0+\varepsilon^{s+1}\tau)+\varepsilon^2 T]}{T^s Q_{m-s}[z_0+\varepsilon^{s+1}\tau,\ \alpha(z_0+\varepsilon^{s+1}\tau)+\varepsilon^2 T]} -$$

$$- \frac{\alpha''(z_0+\varepsilon^{s+1}\tau)\, Q_{m-s}(z_0+\varepsilon^{s+1}\tau,\ \alpha+\varepsilon^2 T)\,\varepsilon^{2s} T^s}{T^s Q_{m-s}[z_0+\varepsilon^{s+1}\tau,\ \alpha(z_0+\varepsilon^{s+1}\tau)\,\varepsilon^2 T]}. \tag{5}$$

Перейдем в последнем к пределу при $\varepsilon\to 0$, получим

$$\left.\frac{d^2T}{d\tau^2}\right|_{\varepsilon\to 0} = \frac{P_n[z_0,\ \alpha(z_0)]}{T^s Q_{m-s}[z_0,\ \alpha(z_0)]} = \frac{a(z_0)}{T^s}, \tag{6}$$

так как P_n и Q_m взаимно просты, то $a(z_0)\neq 0$.

Из (2) видно, что $u = -\dfrac{\alpha_1}{(z-z_0)^2}+\ldots$, т. е. имеет полюс второго порядка. Очевидно, что если решения уравнения (3) имеют полюсы второго порядка, то решения уравнения (5) также имеют полюсы второго порядка, и, обратно, если (5) имеет решения с полюсами второго порядка, то (3) также имеет решения с полюсами второго порядка. Тогда, чтобы выяснить классы уравнений (1), решения которых имеют простые полюсы, достаточно рассмотреть (5). Для того чтобы (5) было уравнением, решения которого имеют полюсы второго порядка, необходимо, но, очевидно, недостаточно, чтобы упрощенное уравнение (6) было уравнением с полюсами второго порядка.

Пусть в (6) $s\neq 1$. Положим $\dfrac{dT}{d\tau}=\xi$, имеем $\dfrac{d\xi}{dT}\xi = \dfrac{a}{T^s}$ или $\xi^2 = \displaystyle\int 2a\frac{dT}{T^s} = \frac{2a}{1-s}\left[\frac{1+c_1T^{s-1}}{T^{s-1}}\right]$.

Отсюда последовательно получим:

$$\frac{dT}{d\tau} = \sqrt{\frac{2a}{1-s}}\cdot\frac{(1+c_1T^{s-1})^{\frac{1}{2}}}{T^{\frac{s-1}{2}}},\qquad \frac{T^{\frac{s-1}{2}}\,dT}{(1+c_1T^{s-1})^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{2a}{1-s}}\,d\tau,$$

$$\frac{T^{\frac{s+1}{2}}(1+c_1T^{s-1})^{\frac{1}{2}}}{\frac{s+1}{2}} - \frac{c_1(s-1)}{s+1}\int T\,\frac{3(s-1)}{2}\cdot\frac{1}{(1+qT^{s-1})^{\frac{1}{2}}}\cdot dT =$$

$$= \sqrt{\frac{2a}{1-s}}\,(\tau+c_2).$$

Из последнего равенства при $c_1=0$ будем иметь

$$T = \left(\frac{s+1}{2}\right)^{\frac{2}{s+1}}\left(\frac{2a}{1-s}\right)^{\frac{1}{s+1}}(\tau+c_2)^{\frac{2}{s+1}}. \tag{7}$$

Значит, чтобы решения уравнения (6) имели полюсы второго порядка, необходимо в (7) положить: $\dfrac{2}{s+1}=-2$ или $s=-2$, что невозможно. При $s=1$ получим

$$T\frac{d^2T}{d\tau} = a. \tag{8}$$

Легко видеть, что (8) не имеет решений с полюсами второго порядка.

Таким образом, справедливо

---

* Айнс Э. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— Харьков, 1939.

Утверждение 1. Для того чтобы уравнение (1) имело простые полюсы, необходимо, чтобы знаменатель его правой части не содержал w', т. е. (1) должно иметь

$$w''' = p_0(z)\,w'^{n} + p_1(z)\,w'^{n-1} + \ldots + p_n(z), \tag{9}$$

где $n \geqslant 1$.

2. Определение $p_0(z)$. Положим в (9) $w' = \frac{v}{\varepsilon^2}$, $z = z_0 + \varepsilon^{n-1}\tau$, $z_0 \in D$.

Получим

$$v'' = p_0(z_0+\varepsilon^{n-1}\tau)\,v^n + \varepsilon^2\,[p_1(z_0+\varepsilon^{n-1}\tau)\,v^{n-1} + \ldots + \varepsilon^{2n-2}\,p_n(z_0+\varepsilon^{n-1}\tau)] \tag{10}$$

и

$$v''|_{\varepsilon\to 0} = p_0(z_0)\,v^n. \tag{11}$$

Проведя далее рассуждения, аналогичные 1, при $n \neq 1$ найдем

$$v = \left(\frac{1-n}{2}\right)^{\frac{2}{1-n}} \left(\frac{2p_0(z_0)}{n+1}\right)^{\frac{1}{1-n}} (\tau + c_2)^{\frac{2}{1-n}}. \tag{12}$$

Из последнего выражения видно, чтобы (11) имело полюсы второго порядка, необходимо выполнение условия $\frac{2}{1-n} = -2$ или $n = 2$. Значит, справедливо.

Утверждение 2. Для того чтобы уравнение (1) имело простые полюсы, необходимо, чтобы оно имело вид:

$$w''' = p_0(z)\,w'^{2} + p_1(z)\,w' + p_2(z). \tag{13}$$

Выделим из (13) классы уравнений, решения которых имеют простые полюсы с целыми вычетами.

Как видно из (12), для того чтобы (13) имело такие решения, необходимо, чтобы число $\left(\frac{1-n}{2}\right)^{\frac{2}{1-n}} \left(\frac{2p_0(z_0)}{n+1}\right)^{\frac{1}{1-n}}$ при $n = 2$ являлось целым, т. е. $\frac{6}{p_0(z_0)} \equiv k$, где k — целое число. Из приведенных рассуждений получим.

Утверждение 3. Уравнение вида $w''' = p_0(z)\,w'^{2} + p_1(z)\,w' + p_2(z)$ всегда имеет простые полюсы с целыми вычетами, где $p_k(z)$ — аналитические функции в области D и $p_0(z) \equiv \frac{6}{k}$, k — целое число.

3. Теорема. Пусть в (13) $n = 1$, тогда

$$v'' = p_0(z_0)\,v. \tag{14}$$

Интегрируя последнее уравнение, находим

$$v = \frac{e^{2\sqrt{p_0(z_0)}\,(\tau+c_1)} - c}{2e^{\sqrt{p_0(z_0)}\,(\tau+c_1)}} = \frac{1}{2}\left[1 + \sqrt{p_0(z_0)}\,(\tau+c_1) + \frac{p_0(z_0)\,(\tau+c_1)^2}{2!} + \ldots\right] -$$
$$- \frac{c}{2}\left[1 - \sqrt{p_0(z_0)}\,(\tau+c_1) + \frac{p_0(z_0)\,(\tau+c_1)^2}{2!} + \ldots\right].$$

Отсюда видно, что (14) не имеет полюсов второго порядка, поэтому для случая $n = 1$ уравнение (1) не имеет простых полюсов.

Окончательно получим следующую теорему.

Теорема. Уравнение вида

$$w''' = p_0(z)\,w'^{2} + p_1(z)w' + p_2(z), \tag{15}$$

где $p_k(z)$ — аналитические функции в области D, всегда имеет простые полюса; если $p_0(z) \equiv \frac{6}{k}$, где k — любое целое число, то (15) имеет решение с простыми полюсами и целыми вычетами.

Поступила в редакцию 24.05.85.

Краткие сообщения

УДК 535.343

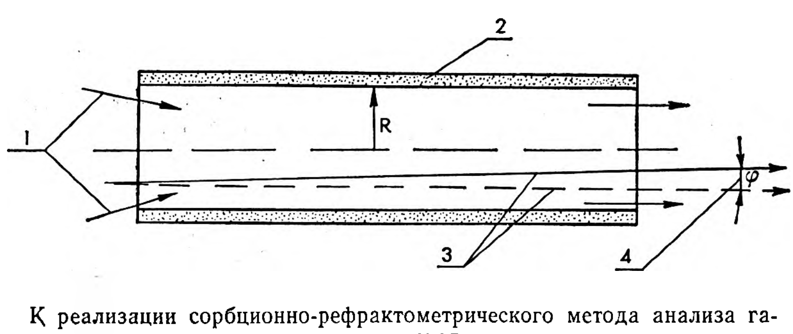
Б. Б. ВИЛЕНЧИЦ, Д. С. УМРЕЙКО

СЕЛЕКТИВНЫЙ АНАЛИЗ ГАЗОВЫХ СРЕД СОРБЦИОННО-РЕФРАКТОМЕТРИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

В [1] предложен оптический метод анализа газовых сред, основанный на создании сорбентом градиента показателя преломления в потоке исследуемой среды и измерении угла отклонения светового зондирующего пучка. Этот метод позволяет проводить селективный анализ газовых смесей без использования селективных источников излучения (например, лазеров) или спектральных устройств (интерференционных фильтров, монохроматоров и т. д.).

Сорбционно-рефрактометрический метод может быть реализован в каналах с различной формой в поперечном сечении, при разных гидродинамических режимах течения в них анализируемой газовой смеси [2].

Рассмотрим поток смеси двух газов в цилиндрическом канале, стенки которого выполнены из сорбента, например, активного угля (см. рисунок), а один из компонентов смеси (определямый) сорбируется стенками канала. Положим, что молекулярный вес этого сорбируемого компонента (например, этана) приближенно равен молекулярному весу другого компонента смеси (например, азота), а коэффициенты поляризуемости их различны. Пусть при входе в канал с сорбирующими стенками анализируемая газовая смесь однородна. При движении смеси в канале происходит поглощение сорбируемого компонента стенками канала, что нарушает однородность распределения концентрации как по радиусу канала, так и по его длине. Радиальный градиент концентрации порождает градиент показателя преломления того же направления, пропорциональный градиенту концентрации. Зондирующий пучок света, направленный внутрь канала на некотором расстоянии от его оси, будет отклоняться на выходе из канала от первоначального направления распространения. Изменение концентрации определяемого компонента в га-



К реализации сорбционно-рефрактометрического метода анализа газовых сред:

1 — поток анализируемой газовой смеси; *2* — сорбирующий канал; *3* — зондирующий световой пучок; *4* — угол отклонения пучка зовой смеси на входе в канал приведет к изменению распределения концентрации и показателя преломления в канале с сорбирующими стенками, а также к изменению угла отклонения зондирующего пучка на выходе из канала. Установив связь угла отклонения с концентрацией определяемого компонента, можно использовать ее в дальнейшем для анализа газовых сред.

Для описания концентрации исследуемого компонента по радиусу канала в различных его сечениях можно воспользоваться известным решением Гретца — Нуссельта [3], что позволит определить градиент показателя преломления в зависимости от поперечной и продольной координат, и, следовательно, углы отклонения светового зондирующего пучка.

Существенно, чтобы при выборе определенных газов и сорбентов не произошло насыщения сорбирующих стенок канала поглощаемым компонентом, тогда газовый поток в канале будет отклонять луч неограниченно долго. Объяснить это можно следующим образом.

Поток газа в сорбированной фазе через стенку канала можно записать [4, 5]:

$$j \approx D \exp\left(\frac{Q-E}{kT}\right)\frac{dN}{dr} = D_{eff}\frac{dN}{dr},$$

где D — коэффициент, близкий коэффициенту диффузии в газовой фазе; Q — теплота адсорбции; E — энергия активации для поверхностной диффузии; k — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура; N — концентрация определяемого компонента; r — радиальная координата.

Для этана, этилена и углей марок СКТ, АРТ и АГ, например, $E \approx 0{,}5Q$ [4]. Так как $Q \gg kT$, то D_{eff} может быть намного больше коэффициента диффузии в газовой фазе [4, 5]. При толщине стенки канала, сравнимой с ее радиусом, диффузионное сопротивление стенки примерно в сто раз меньше диффузного сопротивления самого газового потока в канале. Время релаксации концентрации определяется отношением $t = R^2/D$ и для канала с радиусом $R \approx 0{,}01$ м составит примерно 10 с.

Таким образом, очевидна возможность селективного анализа газовых смесей сорбционно-рефрактометрическим методом, которая определяется в основном свойствами сорбента и сорбируемого газового компонента. Производя непрерывный или циклический подогрев сорбирующих стенок канала, можно осуществлять анализ и влагосодержащих газовых смесей.

Список литературы

1. Виленчиц Б. Б., Коротких В. Т., Петрученко И. В. и др. Способ анализа газовых смесей: А. с. 792101 СССР // БИ.—1980.— № 48.
2. Ашкинадзе Д. А., Виленчиц Б. Б., Дубров Г. А., Сергеев Н. М. Газоанализатор: А. с. 1056007 СССР // БИ.— 1983.— № 43.
3. Гребер Г., Эрк С., Григуль У. Основы учения о теплообмене.— М.. 1958.
4. Де Бур Я. Динамический характер адсорбции.— М., 1962.
5. Старобинец Г. Г., Жуховицкий А. А. // Докл. АН СССР.— 1968.— Т. 178.— № 1.— С. 145.

Поступила в редакцию 03.06.85.

УДК 514.765

Ю. Д. ЧУРБАНОВ

ИНДУЦИРОВАННЫЕ СВЯЗНОСТИ НА ЛИНЕЙНЫХ ГРУППАХ ЛИ

Рассмотрим группу Ли $GL(n, R)$, которая является открытым подмногообразием во множестве всех квадратных матриц порядка n [1], аффинную связность ∇ на $GL(n, R)$, которую будем определять с помощью функций Γ_{ijkl}^{mt} $(i, j, k, l, m, t=\overline{1, n})$. Отметим считающийся известным факт, что так как $GL(n, R)$ обладает одной локальной картой, то аффинная связность левоинвариантна тогда и только тогда, когда все Γ^{mt}_{ijkl} постоянны.

Пусть H — замкнутая линейная группа Ли с алгеброй Ли h.

Определение. Будем говорить, что H является оснащенной группой Ли, если для любого $x \in H$ в касательном пространстве $GL(n, R)_x$ выбрано подпространство N_x такое, что $H_x + N_x = gl(n, R)$, где H_x — касательное пространство к H в точке x, а $gl(n, R)$ — алгебра Ли $GL(n, R)$, отождествляемая с множеством матриц порядка n [1].

Определение. Отображение $N: x \to N_x$, $x \in H$ будем называть оснащением группы Ли H. Оснащение называется левоинвариантным, если $dL_y N_x = N_{yx}$ для любых x, $y \in H$, где L_y — левый сдвиг на элемент y.

Обозначим через pr_x оператор проектирования параллельно оснащению N в точке $x \in H$ на H_x. Определим аффинную связность $\tilde{\nabla}$ на H, положив для любого $x \in H$.

$$(\tilde{\nabla}_X Y)_x = pr_x (\nabla_{X^1} Y^1)_x, \tag{1}$$

где X^1, Y^1 — продолжения гладких векторных полей X, Y на H соответственно до гладких векторных полей на $GL(n, R)$. Легко видеть, что $\tilde{\nabla}$ определена корректно. Связность $\tilde{\nabla}$ будем называть аффинной связностью на группе Ли H, индуцированной связностью ∇ вдоль оснащения N.

Теорема 1. Пусть ∇ — левоинвариантная аффинная связность на $GL(n, R)$; H — замкнутая линейная группа Ли; N — левоинвариантное оснащение H. Тогда связность $\tilde{\nabla}$, индуцированная связностью ∇ вдоль оснащения N, будет левоинвариантной. Наоборот, любую левоинвариантную аффинную связность на H можно получить проектированием вдоль N некоторой левоинвариантной аффинной связности на $GL(n, R)$.

Доказательство. Пусть $X_1, \ldots, X_m$ — базис h; $\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_m$ — соответствующие левоинвариантные векторные поля на H; $X^1_1, \ldots, X^1_m$ — их естественное продолжение до левоинвариантных векторных полей на $GL(n, R)$. Тогда $dL_y \, (\tilde{\nabla}_{\tilde{X}_i} \tilde{X}_j)_x = dL_y pr_x (\nabla_{X^1_i} X^1_j)_x = pr_{yx} dL_y (\nabla_{X^1_i} X^1_j)_x = pr_{yx} \times$ $\times (\nabla_{X^1_i} X^1_j)_{yx} = (\tilde{\nabla}_{\tilde{X}_i} \tilde{X}_j)_{yx}$ для любых y, $x \in H$, и в силу критерия левоинвариантности аффинной связности на группе Ли [1] получаем, что $\tilde{\Delta}$ левоинвариантна.

Пусть α — функция Номидзу левоинвариантной аффинной связности ∇, а $\tilde{\alpha}$ — функция Номидзу левоинвариантной аффинной связности $\tilde{\nabla}$, индуцированной связностью ∇ вдоль оснащения N [2]. Тогда

$$\tilde{\alpha}(X, Y) = (\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y})_e = pr_e (\nabla_{X^1} Y^1)_e = \alpha(X, Y)_h, \tag{2}$$

где $X, Y \in h$, $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ — соответствующие левоинвариантные векторные поля на H; X^1, Y^1 — их продолжение до левоинвариантных векторных полей на $GL(n, R)$, а Z_h — h-компонента элемента $Z \in gl(n, R)$ относительно разложения $gl(n, R) = h + N_e$, e — единица H.

Пусть теперь $\tilde{\nabla}$—произвольная левоинвариантная аффинная связность на H; $\tilde{\alpha}$ — ее функция Номидзу. Определим произвольное билинейное отображение $\beta: N_e \times N_e \to N_e$. Тогда определяется билинейное отображение алгебры Ли $g = gl(n, R)$ $\alpha: g \times g \to g$ по формуле

$$\alpha(X, Y) = \tilde{\alpha}(X_h, Y_h) + \beta(X_{N_e}, Y_{N_e}) \tag{3}$$

для любых $X, Y \in gl(n, R)$, где $X = X_h + X_{N_e}$, $Y = Y_h + Y_{N_e}$. Так как α — билинейна, то она определяет некоторую левоинвариантную аффинную связность на $GL(n, R)$, но тогда индуцируемая ею связность на H совпадает со связностью $\tilde{\nabla}$.

Следствие. Связность ∇ на произвольной линейной группе Ли, определяемая функциями Γ^{mt}_{ijkl} $(i, j, k, l, m, t = \overline{1, n})$, левоинвариантна тогда и только тогда, когда все Γ^{mt}_{ijkl} постоянны.

Пусть теперь Φ — произвольный автоморфизм группы Ли H; $\varphi = (d\Phi)_e$, φ_1 — продолжение φ до автоморфизма алгебры Ли $gl(n, R)$.

Определение. Оснащение N группы Ли H будем называть φ-антиприведенным, если $pr_{\varphi_1(N_e)}(X) = \varphi^{-1} pr_{N_e}(X)$ для всех $X \in gl(n, R)$, где $\varphi_1(N_e)$ образ N_e при отображении φ_1, а pr_{N_e} — оператор проектирования на h параллельно N_e.

По левоинвариантному оснащению N построим новое левоинвариантное оснащение $\varphi_1(N)$, положив $\varphi_1(N): x \to dL_x(\varphi_1(N_e))$, $x \in H$. Если $\varphi_1(N_e) = N_e$, то оснащение называется самосопряженным.

Рассмотрим левоинвариантные аффинные связности на $GL(n, R)$, определяемые функциями $\Gamma^{mt}_{ijkl}(i, j, k, l, m, t = \overline{1, n})$ такими, что $\Gamma^{ij}_{ikkj} = a$, $i, j, k = \overline{1, n}$, $a \in R$, а все остальные равны нулю. Функции Номидзу этих связностей имеют вид

$$\alpha(X, Y) = (a+1)XY \quad X, Y \in gl(n, R). \tag{4}$$

Положим $m = \{XY - \varphi(X)\varphi(Y) \mid X, Y \in h\}$.

Теорема 2. Пусть ∇ — левоинвариантная аффинная связность на $GL(n, R)$ с функцией Номидзу вида (4); N — левоинвариантное φ-антиприведенное оснащение замкнутой линейной группы Ли H, $\tilde{\nabla}$, ∇^1 — левоинвариантные аффинные связности на H, индуцированные связностью ∇ вдоль оснащений N и $\varphi_1(N)$ соответственно. Тогда ∇^1 является φ-преобразованной связностью к связности $\tilde{\nabla}$ [3] тогда и только тогда, когда $m \subset N_e \cap \varphi_1(N_e)$.

Теорема 3. Пусть ∇ — левоинвариантная аффинная связность на $GL(n, R)$ с функцией Номидзу вида (4); N — левоинвариантное самосопряженное оснащение замкнутой линейной группы Ли H, $\tilde{\nabla}$ — левоинвариантная аффинная связность, индуцированная связностью ∇ вдоль оснащения N. Тогда следующие условия равносильны:

1) $\tilde{\nabla}$ — φ-инвариантна [1];
2) $\varphi_1(XY) - \varphi(X)\varphi(Y) \in N_e$ для всех $X, Y \in h$;
3) $\varphi_2(Z^2) - (\varphi(Z))^2 \in N_e$ для всех $Z \in h$.

В заключение хочу поблагодарить доцента В. В. Балащенко за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

1. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства.— М., 1964.

2. Nomizu K. // Amer. J. Math.—1954.— V. 76.— № 1.— P. 33.

3. Балащенко В. В. D-преобразованные индуцированные связности на регулярных φ-пространствах линейных групп Ли: Тез. докл. VI Прибалт. конференц. по соврем. пробл. дифференц. геом. и их приложениям.— Таллин.—1984.— С. 19.

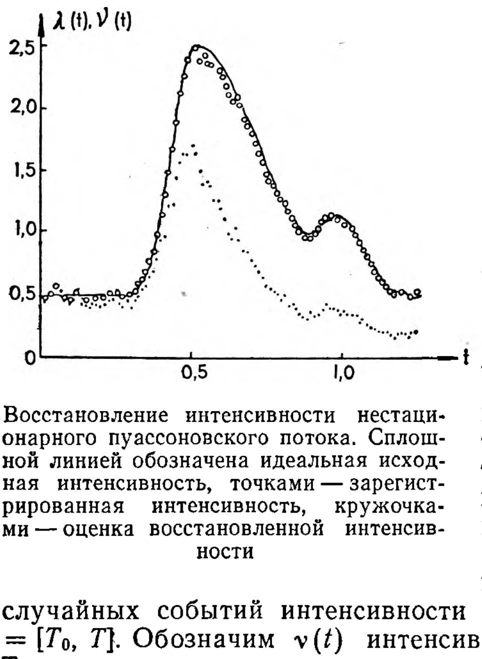
Поступила в редакцию 25.12.84.

УДК 539.107.5

В. В. АПАНАСОВИЧ, Е. Е. ПРОЛИСКО

ВЛИЯНИЕ ПРОДЛЕВАЮЩЕГОСЯ МЕРТВОГО ВРЕМЕНИ ПРИ РЕГИСТРАЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ СЛУЧАЙНЫХ ПОТОКОВ

Продлевающееся мертвое время характерно для многих систем регистрации потоков случайных событий. В реальных регистраторах мертвое время, как правило, носит случайный характер [1]. Задача учета продлевающегося мертвого времени весьма актуальна. В [2] приведены основные выражения, определяющие интенсивность зарегистрированного потока в случае простейшего потока на входе при постоянном мертвом времени регистрации. В [3] результаты расширены на случай нестационарных пуассоновских потоков. Влияние случайного мертвого времени регистрации исследовалось лишь в стационарном режиме для простейшего [4] и рекуррентного [1] потоков, причем авторы ограничились экспоненциальным распределением мертвого времени.



Восстановление интенсивности нестационарного пуассоновского потока. Сплошной линией обозначена идеальная исходная интенсивность, точками — зарегистрированная интенсивность, кружочками — оценка восстановленной интенсивности

В настоящей работе решается задача оценки влияния произвольного мертвого времени на интенсивность нестационарного пуассоновского потока и восстановление исходной интенсивности по зарегистрированной и известной функции распределения мертвого времени $F(t)$.

Предположим, что на вход системы поступает пуассоновский поток случайных событий интенсивности $\lambda(t)$, заданный на интервале $\Omega = [T_0, T]$. Обозначим $\nu(t)$ интенсивность зарегистрированного потока. Тогда

$$\nu(t) = \lambda(t) P(t), \tag{1}$$

где $P(t)$ — вероятность того, что событие, поступившее на вход системы в момент $t \in [T_0, T]$, будет зарегистрировано. Для данного момента t выделим из исходного потока события, с которых начинаются мертвые времена, перекрывающие момент t. В силу независимости длительности мертвых времен и моментов появления событий, их порождающих, выделенный поток будет также пуассоновским с интенсивностью $\lambda(x)[1 - F(t-x)]$, $x \in [T_0, t)$. Очевидно, вероятность $P(t)$ равна вероятности отсутствия событий выделенного потока на интервале $[T_0, t)$.

$$P(t) = \exp\left\{-\int_{T_0}^{t} \lambda(x)\,[1 - F(t-x)]\,dx\right\}.$$

Теперь (1) можно переписать в виде

$$\nu(t) = \lambda(t)\exp\left\{-\int_{T_0}^{t} \lambda(x)\,[1 - F(t-x)]\,dx\right\},\quad t \in [T_0, T]. \tag{2}$$

Если мертвое время постоянно и равно τ, то

$$F(x)\begin{cases}0, & x < \tau\\ 1, & x \geqslant \tau\end{cases}$$

и интенсивность зарегистрированного потока имеет вид

$$\nu(t) = \lambda(t) \exp\left\{- \int\limits_{\max(T_0,\, t-\tau)}^{t} \lambda(x)\, dx\right\},$$

что совпадает с выражением, полученным в [3].

Выражение (2) позволяет предложить следующую простую процедуру восстановления интенсивности исходного потока. Разобьем интервал Ω на N отрезков точками $t_i = T_0 + i\Delta t$, $T_0 = t_0$, $i = \overline{1, N}$, $\Delta t = (T - T_0)/N$. Обозначим λ_i оценку интенсивности в точке t_i. Тогда

$$\lambda_i = \nu(t_i) \exp\left\{\sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} [1 - F(t_i - x)]\, dx\right\} =$$

$$= \nu(t_i) \exp\left\{\sum_{j=0}^{i-1} \lambda_j \left[\Delta t - \int\limits_{(i-j-1)\Delta t}^{(i-j)\Delta t} F(y)\, dy\right]\right\},\ \lambda_0 = \nu(t_0),\ i = \overline{1, N}.$$

Для иллюстрации полученного вывода на рисунке представлен результат проведенного на э. в. м. имитационного эксперимента по регистрации и последующего восстановления исходного потока вида

$$\lambda(t) = A_1 \exp\left\{- \frac{(t - B_1)^2}{C_1^2}\right\} + A_2 \exp\left\{- \frac{(t - B_2)^2}{C_2^2}\right\} + D. \qquad (3)$$

Конкретные значения параметров в выражении (3) следующие: $A_1 = 2$; $B_1 = 0{,}5$; $C_1 = \begin{cases} 0{,}1 \text{ при } t < B_1 \\ 0{,}3 \text{ при } t \geqslant B_1 \end{cases}$; $A_2 = 0{,}5$; $B_2 = 1$; $C_2 = 0{,}1$; $D = 0{,}5$. Мертвое время имеет равномерный закон распределения на интервале [0,5; 1]. Значения всех величин даны в относительных единицах. Число повторений статистического эксперимента n равно $5 \cdot 10^4$.

Оценка среднеквадратического отклонения величины λ_i в нашем случае имеет вид

$$\sigma(\lambda_i) = \lambda_i / \sqrt{\nu_i\, n\, \Delta t}. \qquad (4)$$

Анализ полученных результатов показал, что восстановленные значения λ_i при данном количестве повторений лежат в пределах допустимого выражением (4) разброса, обусловленного статистическими погрешностями при определении значений ν_i.

Список литературы

1. Курочкин С. С. Многомерные статистические анализаторы.— М., 1968.
2. Маталин Л. А. Электронные методы ядерной физики.— М., 1973.
3. Рехин Е. И., Курашов А. А., Чернов П. С. Измерение интервалов времени в экспериментальной физике.— М., 1967.
4. Delotto I., Manfredi P. F. // Nucl. Instr. and Methods.—1965.—V. 32.—P. 175.

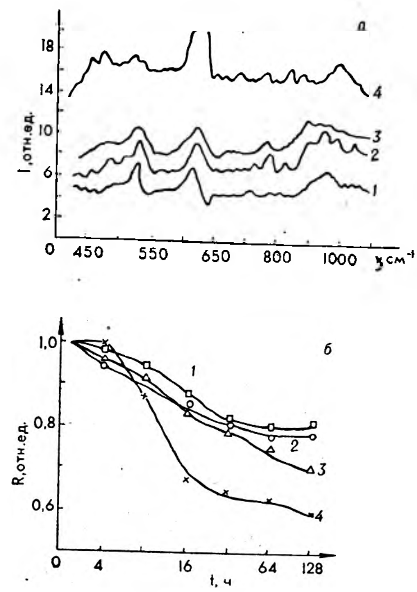
Поступила в редакцию 16.09.85.

УДК 621.315.592

Д. И. БРИНКЕВИЧ, В. В. ПЕТРОВ, В. В. ЧЕРНЫЙ

ОСОБЕННОСТИ СПЕКТРОВ ИК ПОГЛОЩЕНИЯ ТЕРМООБРАБОТАННОГО ПРИ 450 °С КРЕМНИЯ, ЛЕГИРОВАННОГО ГЕРМАНИЕМ

Присутствие германия подавляет генерацию кислородсодержащих термодоноров (ТД), вводимых в кремний в температурном интервале 400—500 °С [1]. Кроме того, легирование кремния германием изменяет структуру полосы решеточного поглощения в области 600—640 см$^{-1}$ [2].



а — Спектры ИК поглощения образцов № 1 (*1*, 3) и № 4 (*2*, *4*). Длительность отжига 16 (*1*, *2*) и 128 (*3*, *4*) ч. *б* — Зависимость нормированного R-фактора кислородной полосы от длительности ТО. Номера кривых соответствуют номерам образцов

В этом аспекте представляет интерес исследование характерных особенностей спектров инфракрасного поглощения (ИКП) в Si<Ge>, подвергнутом термообработке (ТО) при 450 °С.

Наряду с контрольным материалом (образец № 1) исследовался p-кремний, легированный германием в процессе выращивания из расплава по методу Чохральского. Концентрация германия (N_{Ge}), определенная методом нейтронно-активационного анализа, составляла в образце № 2 $3 \cdot 10^{18}$, № 3 — $3 \cdot 10^{19}$ и № 4 — $1{,}5 \cdot 10^{20}$ см$^{-3}$. Концентрация кислорода и углерода, определенная по соответствующим полосам ИКП при 1128 и 607 см$^{-1}$, и концентрация свободных носителей заряда, по данным эффекта Холла, составляла во всех исследовавшихся образцах $9{,}0 \cdot 10^{17}$, $5{,}6 \cdot 10^{16}$ и $7{,}1 \cdot 10^{14}$ см$^{-3}$ соответственно.

Изотермический отжиг кристаллов длительностью до 128 ч проводился при (450 ± 5) °С. Спектры ИКП регистрировались на спектрофотометрах UR-20 и Specord-75IR при 80 К.

На рисунке, *а* представлены типичные спектры ИКП подвергнутых ТО образцов. Отметим основные особенности.

1. В Si<Ge> в процессе отжига не вводятся в заметной концентрации новые оптически активные центры, включающие в свой состав атомы германия.

2. Данная примесь в концентрации $\leqslant 3 \cdot 10^{18}$ см$^{-3}$ не влияет на процессы генерации термодефектов (спектры ИКП образцов № 1 и № 2 идентичны). При увеличении N_{Ge} уменьшается интенсивность всех полос, связанных с ТД, т. е. имеет место подавление генерации оптически активных центров.

3. Присутствие германия по-разному влияет на эффективность введения отдельных дефектов, причем некоторые полосы, наблюдавшиеся в контрольном материале (ν, см$^{-1}$: 402, 440, 468, 478, 646, 825, 847, 862, 905, 1045), в образце № 4 не проявлялись.

4. Легирование кристаллов германием концентрацией $\geqslant 3 \cdot 10^{19}$ см$^{-3}$ приводит к уширению полос ИКП. Так, например, полуширина полосы при 715 см$^{-1}$ в образце № 4 примерно в три раза превосходит соответствующую величину для образцов № 1, 2.

Известно, что ТО при 450 °С кристаллов кремния вызывает изменение структуры кислородной полосы при ~9 мкм [3]. Следует отметить, что нами наблюдалось изменение структуры кислородной полосы при 9 мкм в нетермообработанном Si<Ge>. В этих кристаллах интенсивность полосы 1135 см$^{-1}$ значительно ниже, чем в контрольном материале. Для количественной оценки изменения структуры кислородной полосы обычно используют R-фактор [4]: $R = (\alpha_3 - \alpha_2)/(\alpha_1 - \alpha_2)$, где α_1, α_3 — коэффициенты поглощения в максимумах полос при 1128 и 1135 см$^{-1}$ соответственно; α_2 — коэффициент поглощения, измеренный в седловине между полосами 1128 и 1135 см$^{-1}$.

Уменьшение R-фактора при ТО в кремнии с $N_{Ge} \geqslant 3 \cdot 10^{19}$ см$^{-3}$ происходит гораздо эффективнее, чем в контрольном материале (см. рисунок, *б*). Отношение α_3/α_1 в ходе отжига во всех образцах изменялось слабо: на 15 % в контрольном материале и на 10 % в кремнии с $N_{Ge} \simeq \simeq 1,5 \cdot 10^{20}$ см$^{-3}$. Интенсивность полосы 1128 см$^{-1}$ уменьшалась незначительно ($\angle$ 10 %) во всех кристаллах. Таким образом, значительное уменьшение R-фактора в кремнии, легированном германием, связано с уширением полос ИКП при 1128 и 1135 см$^{-1}$ (либо одной из них), суперпозиция которых определяет значение α_2 в седловой точке. Вероятно, в ходе отжига Si<Ge> атомы кислорода взаимодействуют с атомами германия и окружающими их точечными дефектами, создавая дополнительные деформационные напряжения, приводящие к уширению полос ИКП термодоноров и кислорода (см. [4]). Данное взаимодействие может быть обусловлено полями упругой деформации, существующими в кремнии, легированном изовалентной примесью [5].

Список литературы

1. Бабицкий Ю. М., Горбачева Н. И., Гринштейн П. М., Ильин М. А., Мильвидский М. Г., Туровский Б. М. // ФТП.— 1984.— Вып. 7.— Т. 18.— С. 1309.
2. Кузнецов В. П., Ильин М. А., Горбачева Н. И. // Изв. АН СССР. Неорганические материалы.—1984.— Т. 20.— № 11.— С. 1781.
3. Ахметов В. Д., Болотов В. В., Васильев А. В. // Радиационные эффекты в полупроводниках.— Новосибирск.—1979.— С. 205.
4. Totterdell D. H. J., Newman R. C. // J. Phys., C.: Solid. State Phys.— 1975.— V. 8.— № 5.— P. 589.
5. Соловьева Е. В., Мильвидский М. Г. // ФТП.—1983.— Вып. 11.— Т. 17.— С. 2022.

Поступила в редакцию 29.10.85.

УДК 537.311/312:546.289

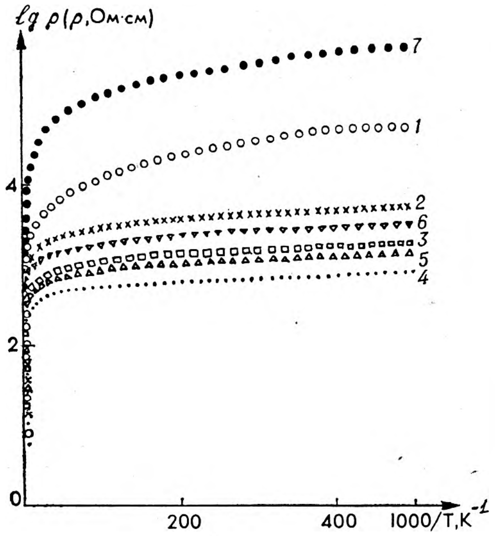
ДИАЛЛО АМАДУ ДЖУЛЬДЕ, А. К. ФЕДОТОВ

ПРОВОДИМОСТЬ ПО ГРАНИЦАМ ЗЕРЕН В ГЕРМАНИИ, ЛЕГИРОВАННОМ РТУТЬЮ

Проводимость поликристаллических полупроводников обычно на много порядков меньше проводимости монокристаллов того же состава, что объясняется наличием между хорошо проводящими монокристаллическими гранулами или зернами высоких ($\sim$ 1 эВ) энергетических барьеров разной природы. Представляет интерес изучить свойства поликристаллов, в которых границы зерен обладают большей проводимостью, чем их объем.

С этой целью исследована температурная зависимость проводимости в области 2—300 К образцов моно- и поликристаллического германия, легированного ртутью и компенсированного сурьмой. Слитки получали методом зонной плавки в парах ртути под высоким давлением.

Металлографический и рентгеноструктурный анализы свидетельствуют об ярко выраженной текстурированности поликристаллических слитков. Зерна вытянуты вдоль направления [III], совпадающего с осью роста слитков. Размеры зерен вдоль слитков 0,1—2 мм, а в поперечной плоскости — 10—300 мкм. Образцы для измерений вырезались поперек слитка и имели концентрацию ртути $N_{Hg} \simeq (1-2) \cdot 10^{15}$ см$^{-3}$. Компенсация сурьмой обеспечивала в поликристаллических образцах полное заполнение электронами первого уровня ртути $E_v + 0,09$ эВ ($K_1 = 1$), а второго уровня $E_v + 0,23$ эВ — в пределах $0 < K_2 < 0,9$. В монокристаллических слитках полностью компенсировать первый уровень ртути при одинаковых условиях выращивания не удалось.



Температурная зависимость удельного сопротивления для некоторых образцов германия, легированного ртутью и компенсированного сурьмой. Обозначения кривых соответствуют номерам образцов в таблице

Температурная зависимость сопротивления $\rho(T)$ серии поликристаллических образцов германия с различной компенсацией приведена на рисунке. В монокристаллических образцах германия наблюдается обычный ход $\rho(T)$, связанный с проводимостью по валентной зоне с энергией активации $\sim 0{,}09$ эВ.

Как видно из рисунка, у поликристаллических образцов наблюдается резкое замедление роста сопротивления при уменьшении температуры ниже 100 К. Характерный излом на кривых $\rho(T)$, а также неизмеримость эффекта Холла правее этого излома свидетельствуют о появлении нового (или новых) механизма проводимости, когда проводимость по валентной зоне вымораживается.

Обработка экспериментальных данных на э. в. м. показала, что в интервале 2—25 К с ошибкой, не превышающей нескольких процентов, проводимость поликристаллических образцов может быть описана соотношением

$$\sigma(T) = \sigma(0) + A\sqrt{T} + \sigma_0\left(\frac{T_0}{T}\right)^{0,35} \exp\left[-\left(\frac{T_0}{T}\right)^{0,25}\right],$$

в котором первые два члена в правой части отвечают вкладу металлической проводимости с учетом квантовой поправки, обусловленной электрон-электронным взаимодействием [1], а третий член описывает вклад прыжковой проводимости с переменной длиной прыжка (закон Мотта) в формулировке Киркпатрика [2]. Величины параметров $\sigma(0)$, A, σ_0 и T_0 приведены в таблице.

Номер образца	K_2	$\sigma(0)\cdot 10^{-4}$, Ом$^{-1}$·см$^{-1}$	$A\cdot 10^{-6}$, Ом$^{-1}$·см$^{-1}$ × К$^{-1/2}$	$\sigma_0\cdot 10^{-3}$, Ом$^{-1}$·см$^{-1}$	T_0, К	$N(\varepsilon_F)$, эВ$^{-1}$·см$^{-3}$	a_σ, Å
1	0,30	0,011	1,25	0,20	1985	$7{,}1\cdot 10^{14}$	541
2	0,40	0,645	2,75	0,77	777	$6{,}8\cdot 10^{15}$	348
3	0,46	2,62	6,10	1,50	478	$2{,}2\cdot 10^{16}$	278
4	0,52	7,81	9,89	2,93	577	$5{,}3\cdot 10^{16}$	222
5	0,60	3,55	7,21	1,82	442	$2{,}8\cdot 10^{16}$	261
6	0,63	1,40	4,75	1,08	742	$1{,}0\cdot 10^{16}$	310
7	0,70	0,001	0,07	0,09	7270	$8{,}1\cdot 10^{13}$	723

Значения T_0 и σ_0 в законе Мотта позволили оценить плотность состояний на уровне Ферми $N(\varepsilon_F)$, а также радиусы локализации дырок a_σ с помощью соотношений из [2]. Результаты расчетов $N(\varepsilon_F)$, приведенные в таблице, физически обоснованы. В то же время a_σ для столь значительных энергий ионизации атомов ртути в германии получаются явно завышенными. Отсутствие прыжковой проводимости в монокристаллическом германии при близких значениях N_{Hg} также согласуются с этим.

Возможное объяснение наблюдаемой зависимости $\sigma(T)$ в поликристаллах германия, легированных ртутью и компенсированных сурьмой, может дать качественная модель, основанная на предположении об образовании скоплений примесей на границах зерен в концентрациях, существенно превышающих предел растворимости ртути в объеме ($\sim 2 \cdot 10^{16}$ см$^{-3}$). В данном случае роль границ зерен в сегрегации примесей косвенно подтверждается тем фактом, что полная компенсация первого уровня ртути возможна лишь в поликристаллическом германии. Это и означает существенную роль границ зерен в задерживании атомов компенсирующей (и основной) примеси в слитке в процессе зонной плавки.

В результате эти пограничные, переобогащенные примесями межкристаллитные участки характеризуются значительной проводимостью с относительно слабой температурной зависимостью, которая и обусловливает ее преобладание при низких температурах. Неоднородность распределения примесей вдоль межзеренных границ делает возможным сосуществование путей тока, подчиняющихся как экспоненциальным, так и степенным закономерностям. Большие радиусы локализации дырок можно связать с тем, что образование примесных кластеров (выделений) приводит к увеличению длины спада локализованных волновых функций [3]. В таком контексте величинам a_σ можно приписать смысл размера этих кластеров по границам зерен.

В пользу предположения о значительной концентрации примесей в токовых путях, существующих в поликристаллах германия при низких температурах, по-видимому, говорит также положительный знак коэффициента A. Согласно [1], это должно наблюдаться лишь вдали от перехода металл — изолятор, т. е. при достаточно больших концентрациях металлических примесей.

Таким образом, проведенные исследования свидетельствуют о том, что за низкотемпературную проводимость поликристаллического германия, легированного ртутью и компенсированного сурьмой, ответственны границы зерен. В результате эти границы фактически представляют собой разупорядоченную квазиметаллическую фазу, что приводит к сосуществованию активационного и степенного законов проводимости при низких температурах.

В заключение авторы выражают благодарность сотруднику Черновицкого государственного университета Е. И. Радевичу за изготовление образцов для измерений.

Список литературы

1. Rosenbaum T. F., Milligan R. F., Paalen M. A., Thomas G. A., Bhatt R. N. // Phys. Rev. B.— 1983.— V. 27.— N 12.— P. 7509.
2. Kirkpatric S. // Proc. Internat. Conf. on Amorph. and Liquid Semicond.— London, 1974.— P. 183.
3. Möbius A., Elefant D., Heinrich A., Müller R., Schumann J., Vinzelberg H., Zies G. // Proc. 13 annual Internat. Simp. Electron Structure Metals and Alloys.— Dresden, 1983.— P. 219.

Поступила в редакцию 27.01.86.

УДК 681.3.06+621.372.8.049

А. Н. КОВАЛЕНКО, И. М. ПОЛЕЩУК

КОРРЕКЦИЯ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМ «АНТЕННА — ОБТЕКАТЕЛЬ». АДАПТИВНЫЙ ПОДХОД

Разработчики сложных антенных систем, содержащих защитный радиопрозрачный обтекатель, не всегда могут учитывать технологические погрешности изготовления системы, которые, в свою очередь, существенно влияют на характеристики проектируемых систем в условиях их эксплуатации [1].

Предлагается двухфазный адаптивный подход к коррекции характеристик систем «антенна — обтекатель» в САПР. Задача получения оптимальной разработки сводится к коррекции характеристик проектируемого объекта на каждом этапе его разработки с учетом условий серийного производства обтекателей.

Характеристики конкретных обтекателей антенн не всегда точно удовлетворяют рассчитанным параметрам в связи с тем, что в процессе производства конкретного обтекателя имеет место ряд неконтролируемых технологических погрешностей (структура материала, механообработка и т. д.), учет которых осложнен на стадии проектирования. При проектировании существует возможность указать лишь допустимые границы характеристик, но не конкретную величину этой характеристики для конкретного образца. Таким образом, возможно достижение лишь субоптимальных решений в оценке характеристик из-за сложного вида неявной зависимости критичных параметров технического задания на разработку обтекателя. Однако этап проектирования позволяет указать причины, влекущие за собой изменение проектирумых характеристик по ряду технологических параметров. В существующей ситуации двухфазный адаптивный подход на основе коррекции характеристик обтекателя в наилучшей степени позволяет добиться сглаживания суммарного скачкообразного характера зависимости выходных характеристик антенных систем от технологических погрешностей производства. Система автоматизированного проектирования, придерживающаяся данного подхода, предполагает коррекцию на двух этапах: разработки математической модели (по приоритетным параметрам технического задания) и экспериментальной отработки (по параметрам, не удовлетворяющим требованиям технического задания в системе обработки сигнала, которую использует антенна). Эти этапы являются составной частью автоматизированной системы проектирования антенн, поддерживающей полный цикл разработки антенных систем от разработки технического задания до оценки параметров антенных систем в условиях реальной эксплуатации.

На первом этапе работы в САПР в результате синтеза частичных моделей проводится оценка оптимальности критичного параметра с максимальным приоритетом при решении минимаксной задачи оптимизации; определяется набор параметров, определяющих неявную зависимость критичного параметра к технологическим погрешностям, а также степень устойчивости критичного параметра к технологическим погрешностям.

В процессе синтеза по дереву модели с уточненными узлами производится коррекция допусков критичных параметров синтезируемой модели антенной системы. В результате определяется диапазон отклонений семейства допустимых оптимальных решений, а также вид погрешности, максимально влияющий на характеристики антенной системы. Второй этап работы в САПР включает в себя экспериментальную отработку антенной системы, на котором выявляются ее реальные параметры и отклонения их от проектируемых с учетом коррекции на математической модели, полученной на первом этапе работы [2].

Для устранения совокупного влияния указанных характеристик предлагается использовать систему обработки сигналов с учетом реальных параметров антенной системы [3]. Коррекция указанных характеристик в системе обработки осуществляется спецпроцессором или универсальной микро-э. в. м. со специализированным математическим обеспечением. Алгоритмы доводки антенной системы определяются первым шагом процесса проектирования в САПР.

В рассматриваемой системе автоматизированного проектирования на первом этапе коррекции проводится определение структуры корректирующего устройства для системы обработки сигнала антенного устройства. В зависимости от технологических факторов проводится оценка ресурсов вычислительной техники устройств коррекции и выбор структурно-функциональной схемы такого устройства.

Предлагаемая взаимосвязь теоретических и экспериментальных исследований существенно усиливает САПР антенных систем, позволяет в процессе двухстадийной коррекции коррелированных параметров технического задания добиться приемлемого оптимального решения из класса допустимых в параметрическом семействе систем «антенна — обтекатель».

Список литературы

1. Дитрих Я. Проектирование и конструирование. Системный подход.— М., 1985.
2. Исследование операций: В 2 т. / Пер. с англ.; Под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби.— М., 1981.
3. Пригода Б. А., Кокунько В. С. Обтекатели антенн летательных аппаратов.— М., 1978.

Поступила в редакцию 24.02.86.

УДК 517.917

Б. С. КАЛИТИН

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРИ НАЛИЧИИ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ

При исследовании устойчивости точек покоя динамических систем возникают ситуации, когда первые интегралы не дают возможности построить определенно положительную функцию Ляпунова в виде связки интегралов Н. Г. Четаева [1]. Однако в этом случае всегда существует знакопостоянная функция, которая может дать достаточные условия неасимптотической устойчивости, если воспользоваться обобщением теоремы А. М. Ляпунова [2] или [3]. Действительно, пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \; x \in D \subset R^n, \tag{1}$$

где $f\colon D \to R^n$ — непрерывная функция, обеспечивающая единственность решений в открытой окрестности D начала координат R^n, причем $f(0) = 0$.

Предположим, что для системы (1) существуют k непрерывных первых интегралов $\varphi_j(x) = c_j$, $\varphi_j(0) = 0$, $j = \overline{1, k}$. Тогда в качестве обобщенной функции Ляпунова можно взять $V(x) = \varphi_1^2(x) + \ldots + \varphi_k^2(x)$. Поскольку $V(x)$ неотрицательна и сохраняет постоянное значение вдоль всякого решения (1), она удовлетворяет первым двум требованиям теоремы 2.1 [2]. Кроме того, в силу свойств инвариантности первых интегралов и теоремы 1.4 [2] последнее, третье, требование теоремы 2.1 [2] будет также выполнено, если нулевое решение (1) будет асимптотически устойчивым относительно множества $M_0 = \{x \in D \mid V(x) = 0\}$, т. е. относительно множества, где

$$\varphi_j(x) = 0, \; j = \overline{1, k}. \tag{2}$$

Предположим, что система уравнений (2) допускает непрерывное решение

$$x_j = \psi_j(x_{k+1}, \ldots, x_n), \; \psi_j(0) = 0, \; j = \overline{1, k}. \tag{3}$$

Тогда на множестве M_0 система (1) редуцируется в систему

$$\dot{x}_j = f_j(\psi(x_{k+1}, \ldots, x_n), x_{k+1}, \ldots, x_n), \; j = \overline{1, k}, \tag{4}$$

где $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_k)$.

Примером рассмотренной ситуации могут служить уравнения Лагранжа, описывающие движения системы материальных точек в позиционных и циклических координатах [4] и подверженных действию внешних сил. Используя имеющиеся здесь циклические первые интегралы, получаем следующий результат.

Теорема. Стационарное движение будет устойчивым при $t>0$ относительно циклических скоростей, если оно асимптотически устойчиво при $t>0$ относительно позиционных координат и скоростей.

Пример. Пусть на сферический маятник длиной l [5], кроме силы тяжести mg, действуют дополнительные силы, суммарный результат которых $F = F(\Theta, \dot{\Theta}, \dot{\psi})$ направлен вертикально вверх. Уравнения Лагранжа здесь имеют вид:

$$\begin{cases} ml^2\ddot{\Theta} - ml^2\dot{\psi}^2 \sin\Theta\cos\Theta + mgl\sin\Theta = lF(\Theta, \dot{\Theta}, \dot{\psi}), \\ ml^2\ddot{\psi}\sin^2\Theta + 2ml^2\dot{\Theta}\dot{\psi}\sin\Theta\cos\Theta = 0, \end{cases}$$

где Θ — угол отклонения маятника от вертикали; ψ — координата (циклическая) его проекции в горизонтальной плоскости. Система имеет первый интеграл $\dot{\psi}\sin^2\Theta = \text{const}$. Устойчивость стационарного движения (конический маятник), соответствующего значениям $\Theta = \alpha$, $\dot{\Theta} = 0$, $\dot{\psi} = \omega = \text{const}$ [5], путем замены переменных $\Theta = \alpha + x$, $\dot{\Theta} = y$, $\dot{\psi} = z + \omega$ сводится к устойчивости при $t>0$ нулевого решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{g}{l}\sin(\alpha + x) + (w+z)^2\sin(\alpha+x)\cdot\cos(\alpha+x) + \frac{1}{ml}F(x+\alpha, y, w+z), \\ \dot{z} = -2y(w+z)\operatorname{ctg}(\alpha + x). \end{cases}$$

В данном случае $V = [(\omega + z)\sin^2(\alpha + x) - \omega\sin^2\alpha]^2$ и (3) принимает вид: $z = (\omega\sin^2\alpha/\sin^2(x+\alpha)) - \omega$. Несложный подсчет показывает, что первое приближение редуцированной системы (4) в данном случае является линейной системой второго порядка

$$\dot{x} = y, \ \dot{y} = ax + by, \tag{5}$$

где $a = -\frac{g}{l}\cos\alpha - \omega^2(1 + 2\cos^2\alpha) + \frac{1}{ml}\cdot\frac{\partial F(\alpha, 0, \omega)}{\partial\Theta} - 2\omega\operatorname{ctg}\alpha \times$

$$\times \frac{\partial F(\alpha, 0, \omega)}{\partial\dot{\psi}}\cdot\frac{1}{ml},$$

$$b = \frac{1}{ml}\cdot\frac{\partial F(\alpha, 0, \omega)}{\partial\dot{\Theta}},$$

поэтому условия асимптотической устойчивости системы (5) при $t>0$ (а значит, и условия асимптотической устойчивости исследуемого конического маятника) задаются неравенствами $a<0$, $b<0$.

Список литературы

1. Четаев Н. Г. Устойчивость движения работы по аналитической механике.— М., 1962.
2. Kalitine B. // RAIRO Automatique: Systems Analysis and Control.—1982.— V. 16.— № 3.— P. 275, 286.
3. Калитин Б. С. Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.—1984.— № 3.— С. 61.
4. Румянцев В. В. Матем. выводы в динамике космических аппаратов.— 1967.— Вып. 4.
5. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения.— М., 1976.

Поступила в редакцию 14.02.85.

УДК 519.1

А. В. МОЩЕНСКИЙ

ПОЛУМАТРОИДЫ И ДИАГРАММЫ ГЕЙЛА

Матроиды, введенные в тридцатые годы нашего века как обобщение понятия линейной зависимости, к настоящему времени являются одним из основных понятий дискретной математики. В работе [1] при аксиоматизации понятия конической зависимости введено обобщение матроидов, так называемые полуматроиды. В настоящей заметке устанавливается их связь с известными комбинаторными объектами — диаграммами Гейла (см. [2]).

Полуматроидом ранга d называется пара (N, B), где N — непустое конечное множество, B — семейство его непустых d-элементных подмножеств (называемых кобазами), для которых выполняется следующее условие: для любого элемента g из каждой кобазы B_i существует единственный $f \in N \setminus B_i$ такой, что $(B_i \setminus g) \cup f$ также кобаза.

Пусть M — простой d-многогранник. Тогда пара (N, B), где N — множество $(d-1)$-мерных граней многогранника M, а B — множество его вершин, является полуматроидом (называется полуматроидом многогранника M и обозначается через $P(M)$).

Диаграммой Гейла $D(M)$ многогранника M назовем пару $(V, (F)^{\max})$, где $V = \operatorname{vert} M$, а $(F)^{\max}$ — семейство $(d-1)$-мерных граней M. Грань $F_i \in (F)^{\max}$ задается принадлежащими ей вершинами (ср. со стандартным определением [2]).

Лемма. Диаграмма Гейла симплициального d-многогранника M является полуматроидом.

Доказательство. Покажем, что $D(M) = (V, (F)^{\max})$ удовлетворяет определению полуматроидов. Из симплициальности M следует, что если $F_i \in (F)^{\max}$, то $|F_i| = d$, и любое $(d-1)$— подмножество грани F_i задает $(d-2)$-мерную грань, которая есть пересечение ровно двух $(d-1)$-мерных граней. Лемма доказана.

Многогранник M^* называется двойственным к многограннику M, если существует взаимно однозначное соответствие φ между множествами граней всех размерностей многогранников M и M^*, обладающее свойством: $F_1 \subset F_2 \leftrightarrow \varphi(F_1) \supset \varphi(F_2)$. На основании леммы доказывается следующая

Теорема. Полуматроид простого многогранника изоморфен диаграмме Гейла двойственного многогранника.

Дополнением полуматроида $P(M) = (N, B)$ ранга d назовем пару $\bar{P}(M) = (N, \bar{B})$, где $\bar{B} = \{\bar{B}_i : \bar{B}_i = N \setminus B_i, B_i \in B\}$.

Если $|B_i| = d$, то дополнение полуматроида $\bar{P}(M)$ есть полуматроид, изоморфный $P(M)$. Множество B есть множество допустимых базисов многогранника M в канонической форме задания. Ввиду этого можно говорить, что полуматроиды обобщают понятие конической зависимости.

Список литературы

1. Ковалев М. М. // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук.—1979.— № 3.— С. 7.
2. Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К. Многогранники, графы, оптимизация.— М., 1981.
3. Kovalev M. M., Isatsehenko A. N. // 24. Intern. Wiss. Koll. TH Ilmenau.— 1979.— S. 57.

Поступила в редакцию 24.04.85.

УДК 517.977

О. Н. БУДЬКО

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОСТИ ВТОРОЙ ВАРИАЦИИ В ЗАДАЧЕ ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО УПРАВЛЕНИЮ

Для задачи терминального управления со свободным правым концом $I(u) = \varphi(x(t_1)) \to \min$, $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), u(t-h), t)$, $x(t_0) = x_0$, $u_0(\cdot) = \{\varphi_1(\tau), \tau \in [t_0 - h, t_0)\}$, $u(t) \in U$, $t \in [t_0, t_1] = T$, $U \subset R^m$, $x \in R^n$, $h > 0$ вдоль экстремалей Понтрягина $u^0(t) \in \operatorname{int} U$, $t \in T$, рассматривается присоединенная задача:

$$\delta^2 I(u^0) = \bar{x}'(t_1) Q_1(t_1) \bar{x}(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} [\bar{x}'(t)Q(t)\bar{x}(t) + \bar{u}'(t) R(t) \bar{u}(t) + 2\bar{x}'(t) \times$$

$$\times D_1(t) \bar{u}(t) + 2\bar{x}'(t) D_2(t) \bar{u}(t-h) + 2\bar{u}'(t) R_2(t) \bar{u}(t-h)]\, dt \to \min, \quad (1)$$

$$\dot{\bar{x}}(t) = A(t) \bar{x}(t) + B(t) \bar{u}(t) + C(t) \bar{u}(t-h), \ t \in T,$$

$$\bar{x}(t_0) = 0, \quad \bar{u}(\tau) = 0, \ \tau \in (t_0 - h, t_0). \quad (2)$$

Здесь $\bar{u}(t) = \delta u(t)$, $\bar{x}(t) = \delta x(t)$, $t \in T$, — вариации управления и траектории в смысле [1], $Q_1(t_1) = \frac{\partial^2 \varphi(x^0(t_1))}{\partial x^2}$, $Q(t) = -H_{xx}$, $R_1(t) = -H_{uu}$, $R_2(t) = -H_{uu_h}$, $R_3(t) = -H_{u_h u_h}$, $D_1(t) = -H_{xu}$, $D_2(t) = -H_{xu_h}$, $A(t) = f_x$, $B(t) = f_u$, $C(t) = f_{u_h}$, $t \in T$, $R(t) = R_1(t) + R_3(t)$, $t \in [t_0, t_1 - h)$, $R(t) = R_1(t)$, $t \in [t_1 - h, t_1)$, f_x, f_u, f_{u_h} — соответствующие производные функции $f(x^0(t), u^0(t), u^0(t-h), t)$, $t \in T$, по x, u, u_h, $u_h(t) = u(t-h)$, $t \in T$, H_{xx}, H_{uu}, $H_{u_h u_h}$, H_{xu}, H_{xu_h}, H_{uu_h} — производные второго порядка от гамильтониана $H(x^0(t), \psi^0(t), u^0(t), u^0(t-h), t)$ исходной системы по соответствующим переменным.

Пусть $\bar{u}(t)$, $t \in T$,— кусочно-дифференцируемые функции. В работе приведены достаточные условия неотрицательности второй вариации $\delta^2 I(u^0)$ вида (1) для неособых и особых управлений.

Определение 1. Управление $u^0(t)$, $t \in T$, назовем неособым (особым), если $R(t) > 0$, $t \in T$ $(R(t) \equiv 0,\ t \in T)$.

Пусть существуют дифференцируемые по совокупности переменных матричные функции $P(t)$, $P(t, s)$, $P(t, s, r)$, $t \in T$, $s, r \in [-h, 0]$ такие, что

$$P(t_1) = Q_1(t_1),\ P(t_1, s) = P(t_1, s, r) = 0,\ P'(t) = P(t),\ P'(t, s, r) = P(t, r, s),$$
$$P(t, -h) = D_2(t) + P(t) C(t),\ P(t, s, -h) = P'(t, s) C(t),$$
$$t \in T,\ s, r \in [-h, 0]. \quad (3)$$

Присоединяя к функционалу (1) тождества

$$\bar{x}'(t_0) P(t_0) \bar{x}(t_0) - \bar{x}'(t_1) P(t_1) \bar{x}(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} [\bar{x}'(t) P(t) \bar{x}(t)]\, dt = 0,$$

$$2\bar{x}'(t_0) \int_{-h}^{0} P(t_0, s) \bar{u}(t_0 + s)\, ds - 2\bar{x}'(t_1) \int_{-h}^{0} P(t_1, s) \bar{u}(t_1 + s) ds +$$
$$+ 2 \int_{t_0}^{t_1} \int_{-h}^{0} \frac{d}{dt} [\bar{x}'(t) P(t, s) \bar{u}(t+s)]\, ds dt = 0,$$

$$\int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0} \bar{u}'(t_0 + s) P(t_0, s, r) \bar{u}(t_0 + r)\, ds dr - \int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0} \bar{u}'(t_1 + s) P(t_1, s, r) \bar{u}(t_1 +$$
$$+ r)\, ds dr + \int_{t_0}^{t_1}\int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0} \frac{d}{dt} [\bar{u}'(t+s) P(t, s, r) \bar{u}(t+r)]\, ds dr dt = 0,$$

с учетом (2), (3) можно установить справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. Для неотрицательности второй вариации $\delta^2 I(u^0)$ в указанном классе вариаций управления $\bar{u}(t)$, $t \in T$, достаточно существования дифференцируемых по совокупности переменных матричных функций $P(t)$, $P(t, s)$, $P(t, s, r)$, $t \in T$, $s, r \in [-h, 0]$, удовлетворяющих (3), и таких, что выполняется неравенство

$$S(t, s, r) \geqslant 0,\ t \in T,\ s, r \in [-h, 0]. \quad (4)$$

Здесь $S(t, s, r) = \{s_{ij}(t, s, r),\ t \in T,\ s, r \in [-h, 0],\ i, j = \overline{1, 4}\}$ — матрица со следующими блоками: $s_{11}(t) = \dot{P}(t) + P(t) A(t) + A'(t) P(t) + Q(t)$,

$s_{12}(t) = s'_{21}(t) = D_1(t) + P(t)B(t) + P(t, 0)$, $s_{13}(t) = s_{31}(t) = s_{34}(t) = s_{43}(t) = 0$, $s_{14}(t, s) = s'_{41}(t, r) = A'(t)P(t, s) + \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial s}\right)P(t, s)$, $s_{22}(t) = R_1(t)$, $s_{23}(t) = s'_{32}(t) = R_2(t)$, $s_{24}(t, s) = s'_{42}(t, r) = B'(t)P(t, s) + P'(t, s, 0)$, $s_{33}(t) = R_3(t)$, $s_{44}(t, s, r) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial r}\right)P(t, s, r)$.

Теорема 1 применима в случае особых и неособых управлений $u^0(t)$, $t \in T$. В неособом случае неотрицательность второй вариации тесно связана с разрешимостью системы матричных дифференциальных уравнений Риккати (СМДУР), что отражено в работах [2—5]. Справедлива

Теорема 2. Если существуют такие достаточно гладкие матричные функции $K(t)$, $K(t, s)$, $K(t, s, r)$, $t \in T$, $s, r \in [-h, 0]$, являющиеся решением СМДУР [6], то условие (4) выполняется при $P(t) = K(t)$, $P(t, s) = K(t, s)$, $P(t, s, r) = K(t, s, r)$, $t \in T$, $s, r \in [-h, 0]$.

Подобный факт установлен ранее для систем без запаздывания по управлению в [3, 5]. Теорема 2 указывает на содержательный смысл теоремы 1. Даже если СМДУР [6] неразрешима, ее вид подсказывает возможный способ построения матричных функций $P(t)$, $P(t, s)$, $P(t, s, r)$, $t \in T$, $s, r \in [-h, 0]$, как решение линейной системы дифференциальных уравнений, построенной по линейной части СМДУР [6] с граничными условиями (3). Такие линейные уравнения используются при построении функционалов Ляпунова — Красовского при исследовании асимптотической устойчивости линейных систем с запаздыванием [7].

Замечание. Теоремы 1 и 2 справедливы в случае кусочно-непрерывных функций $\bar{u}(t)$, $t \in T$. Доказательство при этом усложняется.

Список литературы

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Особые оптимальные управления.— М., 1973.
2. Soliman M. A., Ray W. H. // Int. J. of Control.—1972.— V. 15.— № 4.— P. 609.
3. Bell D. J., Jacobson D. H. Singular Optimal Control Problems.— Academic Press, 1975.
4. Черноусько Ф. Л., Колмановский В. Б. Оптимальные управления при случайных возмущениях.— М., 1978.
5. Забелло Л. Е. Минимизация квадратичных функционалов и проблема второй вариации для управляемых систем с запаздыванием / Ред. ж. «Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.» — Минск, 1983.—Деп. в ВИНИТИ 27.01.83, № 505-83.
6. Будько О. Н. // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.—1985.— № 2.— С. 60.
7. Репин Ю. М. // ПММ.—1957.— Т. 21.— Вып. 2.— С. 253.

Поступила в редакцию 24.04.85.

РЕФЕРАТЫ

УДК 530.12; 530.145

Шишкин Г. В., Андрушкевич И. Е. **Разделение переменных в уравнении Дирака в общей теории относительности. IV** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.—1986.— № 3.

Изучается ковариантное обобщение уравнения Дирака (КОУД) в общей теории относительности (ОТО) на предмет разделения переменных. Для полей ОТО с метрикой вида $ds^2 = A \cdot (dx^1)^2 + B \cdot (dx^2)^2 + C \cdot (dx^3)^2 - D \cdot (dx^4)^2$, где A, B, C, D — произвольные, положительно определенные функции переменных x^1, x^2, x^3, x^4, приведена схема полного разделения переменных по методике выделения дифференциальных операторов первого порядка при диагональной калибровке тетрады. Сформулированы условия, налагаемые на компоненты метрического тензора и позволяющие осуществить полное разделение переменных в КОУД. Доказана их необходимость и достаточность. Указан явный вид операторов, соответствующих разделенным переменным.

Сообщения I — III см.: Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.— 1985.— № 3.— С. 26; — 1986.— № 1.— С. 6; № 2.— С. 5.

Библ. 3 назв.

УДК 535.34

Иванова Н. А., Толстик А. Л., Чалей А. В. **Влияние пространственной решетки на бистабильные характеристики нелинейного интерферометра Фабри — Перо** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.—1986.— № 3.

Теоретически исследовано влияние светоиндуцированной амплитудно-фазовой решетки просветления на характеристики передачи интерферометра Фабри — Перо. Показано, что учет интерференции распространяющихся в высокодобротном резонаторе потоков практически не изменяет бистабильных характеристик прибора и для расчета можно использовать приближение средней интенсивности.

Библ. 4 назв., ил. 2.

УДК 535.012.2

Буров Л. И., Воропай Е. С., Ганчеренок И. И., Саечников В. А. **Проявление эффектов светоиндуцированной анизотропии растворов красителей при неколлинеарной накачке** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.—1986.— № 3.

В приближении заданного поля получено общее решение для эволюции зондирующего сигнала в растворе красителя в присутствии сильного поля накачки. Показано, что такое решение может рассматриваться как разложение по нормальным волнам. Для некоторых частных случаев указана структура этих волн. Экспериментальная проверка полученных результатов для случая ортогональной накачки подтвердила корректность теоретических выводов.

Библ. 7 назв., ил. 1.

УДК 541.65

Зажогин А. П., Серафимович А. И., Шашков С. Н. **Спектроскопические закономерности координации нитратных групп в соединениях уранила** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.—1986.— № 3.

На основании анализа спектров КР и ИК поглощения, рентгено- и нейтронографических данных по структуре ряда кристаллических солей нитрата уранила предложены некоторые спектральные критерии, которые могут быть использованы при изучении комплексообразования нитратных соединений уранила в растворах.

Библ. 9 назв., ил. 2, табл. 2.

УДК 621.372.853

Хапалюк А. П., Логвин Ю. А. **Открытый резонатор с гауссовой диафрагмой** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.—1986.— № 3.

В параксиальном приближении рассчитаны параметры собственных пучков низшей (гауссовой) моды в режиме стационарной генерации резонатора, одно выходное сферическое зеркало которого содержит гауссову диафрагму. Показано, что фазово-неустойчивые резонаторы при наличии гауссовой диафрагмы становятся устойчивыми и могут быть рассчитаны обычным образом. Исследовано также влияние параметра гауссовой диафрагмы на порог генерации.

Библ. 4 назв., ил. 3.

681.327.22

Лобко А. С., Мисевич О. В. **Графическая приставка к алфавитно-цифровому дисплею** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.—1986.— № 3.

На основании анализа характера графической информации, подлежащей визуальному контролю в большинстве физических приложений, предложен оптимальный способ кодирования изображений. Описано устройство, позволяющее выводить на экран дисплея 15ИЭ00-013 графическую информацию в виде двух графиков или гистограмм однозначных функций и координатных осей в поле форматом 512×256 точек. Использование быстродействующей памяти емкостью 1 Кбайт, выполненной на микросхемах КР132РУ4, значительно упростило схемное решение и программное обслуживание устройства. Приведена принципиальная схема устройства, содержащего 27 микросхем (без интерфейсной части).

Ил. 3.

УДК [539.143+681.12]:662.6/8

Пряхин А. Е., Оробей И. О., Роман Падилья Альварес, Файбышев А. Е. **Ядерно-магнитный расходомер топлива** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.—1986.— № 3.

Описан расходомер топлива, основанный на эффекте ядерного магнитного резонанса (ЯМР). Рассмотрены особенности ЯМР в проточных жидкостях.

Библ. 5 назв., ил. 2.

УДК 621.315.590

Добрего В. П., Ермолаев О. П., Каба С., Тарасик М. И. **Влияние одноосного сжатия на прыжковую проводимость по мелким уровням радиационных дефектов в германии** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.—1986.— № 3.

Рассматривается влияние одноосной упругой деформации на прыжковую проводимость по мелким уровням радиационных дефектов, возникающих при облучении германия быстрыми реакторными нейтронами. Делается вывод о качественном сходстве с поведением германия, легированного химическими акцепторами III группы. Количественные особенности обусловлены различием структуры химического акцептора III группы и радиационного дефекта акцепторного типа с энергией активации 16 мэВ.

Библ. 6 назв., ил. 3, табл. 1.

УДК 535.37

Аль-Мутавалли Маад Сабри, Горбацевич С. К. **Метод определения функции распределения молекул по частотам 0-0-перехода в трехкомпонентных растворах** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1986, № 3.

На основании экспериментально полученных электронных спектров трехкомпонентных растворов путем решения интегрального уравнения рассчитана функция распределения молекул по частотам чисто электронного перехода, обусловленная флуктуациями числа полярных молекул растворителя в ближайшем окружении активатора.

Библ. 2 назв., ил. 1.

УДК 681.325

Коляда А. А., Селянинов М. Ю. **Умножение дробей в модулярной системе счисления с использованием интервального индекса** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.—1986.— № 3.

Предлагается метод умножения дробей типа Свободы в модулярной системе счисления с использованием интервального индекса числа. Формулируется алгоритм, имеющий конвейерную структуру и обладающий высоким уровнем параллелизма.

Библ. 9 назв.

УДК 519.1

Левин А. Г. NP-**полнота задачи реализации гиперграфов графами с заданной четностью степеней вершин** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.— 1986.— № 3.

В работе доказывается NP-полнота задачи реализации гиперграфов графами с заданной четностью степеней вершин путем сведения к ней известной NP-полной задачи о пути с запрещенными парами дуг.

Библ. 11 назв.

УДК 519.95

Нгуен Ван Хоа. **О групповой эквивалентности в** P_k // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.—1986.— № 3.

Доказана континуальность $\tilde{G}$- и G-решеток в P_k.

Библ. 3 назв.

УДК 517.925

Яблонский А. И., Корзюк А. Ф. **Свойства одного класса систем трех линейных дифференциальных уравнений** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.— 1986.— № 3.

Рассматривается линейная система трех уравнений специального вида. Показана связь между решениями этой системы и решениями одной нелинейной системы с однозначными подвижными особыми точками.

Библ. 2 назв.

УДК 519.1

Ковалев М. М., Котов В. М. **Оценка погрешностей серий приближенных алгоритмов** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.—1986.— № 3.

Предлагаются методика и способ определения оценки точности серий субоптимальных алгоритмов. Методика иллюстрируется на примере задачи коммивояжера на максимум, для которой построены серии алгоритмов с рекордными оценками точности.

Библ. 8 назв., ил. 3, табл. 1.

УДК 517.937

Третьякова Л. Г. **К задаче о 2π-периодических решениях уравнения колебаний нелинейной струны** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.—1986.— № 3.

Получена теорема существования и единственности 2π-периодического решения уравнения колебаний нелинейной струны с жестко закрепленными концами для случая существенно нелинейной зависимости возмущения от смещения и скорости.

Библ. 4 назв.

УДК 539.3

Прусов И. А., Савенков В. А. **Смешанная задача теории упругости для ортотропной полуплоскости с внутренним прямолинейным разрезом** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.—1986.— № 3.

Рассматривается задача о давлении жесткого штампа на границу упругой ортотропной полуплоскости, содержащей прямолинейный внутренний разрез. Решение строится при помощи полученного фундаментального решения, которое соответствует действию сосредоточенной силы в ортотропной полуплоскости со смешанными граничными условиями на границе. Краевая задача для полуплоскости с разрезом сведена к сингулярному интегральному уравнению.

Библ. 4 назв.

УДК 517.925

Козулин А. В. **Дифференциальное уравнение третьего порядка специального вида** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.—1986.— № 3.

Получено необходимое и достаточное условие отсутствия в решениях дифференциального уравнения третьего порядка подвижных критических особых точек. Выделены классы уравнений, имеющие решения с простыми полюсами и целыми вычетами.

УДК 535. 343

Виленчиц Б. Б., Умрейко Д. С. **Селективный анализ газовых сред сорбционно-рефрактометрическим методом** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.— 1986.— № 3.

На основе использования газовой смеси этан — азот и сорбента (активный уголь) показана возможность селективного анализа сорбционно-рефрактометрическим методом концентраций газовых компонентов.

Библ. 5 назв., ил. 1.

УДК 514.765

Чурбанов Ю. Д. **Индуцированные связности на линейных группах Ли** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.—1986.— № 2.

Рассмотрена задача получения левоинвариантных аффинных связностей на замкнутых линейных группах Ли путем проектирования левоинвариантных аффинных связностей с полной линейной группы, а также некоторые вопросы геометрии оснащений, связанные с автоморфизмом группы Ли.

Библ. 3 назв.

УДК 539.107.5

Апанасович В. В., Пролиско Е. Е. **Влияние продлевающегося мертвого времени при регистрации интенсивности случайных потоков** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.— 1986.— № 3.

Получено выражение для интенсивности потока импульсов, зарегистрированного системой с продлевающимся мертвым временем, на вход которой поступает пуассоновский поток с переменной во времени интенсивностью. Предлагается процедура, позволяющая однозначно восстанавливать интенсивность исходного потока по интенсивности зарегистрированного потока событий. Приведены результаты математического моделирования.

Библ. 4 назв., ил. 1.

УДК 621.315.592

Бринкевич Д. И., Петров В. В., Черный В. В. **Особенности спектров ИК поглощения термообработанного при 450 °С кремния, легированного германием** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.—1986.— № 3.

Рассмотрено влияние примеси германия на полосы ИК поглощения термодефектов и структуру кислородной полосы вблизи 9 мкм. Показано, что в ходе термообработки в образцах с высоким содержанием германия ($N_{Ge} \geqslant 3 \cdot 10^{19}$ см$^{-3}$) имеет место уширение полос ИК поглощения термодефектов и кислорода.

Библ. 5 назв., ил. 1.

УДК 537.311/312:546.289

Диалло Амаду Джульде, Федотов А. К. **Проводимость по границам зерен в германии, легированном ртутью** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.—1986.— № 3.

Обнаружено сильное различие температурной зависимости проводимости в моно- и поликристаллическом германии, легированном ртутью и компенсированном сурьмой. В поликристаллах проводимость при температурах 2—25 К определяется степенным и экспоненциальным вкладами, что обусловливается выделением ртути по границам зерен.

Библ. 3 назв., ил. 1, табл. 1.

УДК 681.3.06.+621.372.8.049

Коваленко А. Н., Полещук И. М. **Коррекция характеристик систем «антенна — обтекатель». Адаптивный подход** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.— 1986.— № 3.

Предлагается двухфазный адаптивный подход к коррекции характеристик систем «антенна — обтекатель» в процессе их разработки. Рассматриваемый подход предполагает учет технологических погрешностей и позволяет определить вид корректирующих устройств.

Библ. 3 назв.

УДК 517.917

Калитин Б. С. **Устойчивость при наличии первых интегралов** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.—1986.— № 3.

Развивается идея использования первых интегралов для построения функции Ляпунова в виде связки интегралов Н. Г. Четаева на случай, когда такая связка не является определенно положительной функцией. Приводится теорема об устойчивости стационарных движений.

Библ. 5 назв.

УДК 519.1

Мощенский А. В. **Полуматроиды и диаграммы Гейла** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.—1986.— № 3.

Устанавливается связь между полуматроидами и диаграммами Гейла.

Библ. 3 назв.

УДК 517.977

Будько О. Н. **Достаточные условия неотрицательности второй вариации в задаче терминального управления системами с запаздыванием по управлению** // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.—1986.— № 3.

Для задачи терминального управления системами с запаздыванием по управлению рассматривается присоединенная задача. Приведены достаточные условия неотрицательности второй вариации для особых и неособых управлений. В случае неособых управлений эти условия связаны с решением системы матричных дифференциальных уравнений Риккати.

Библ. 7 назв.