

ЕН-(Е-) волны, то это могут быть либо поверхностные квазинепрерывные, либо квазиповерхностные направляемые моды. Утверждение справедливо только по отношению к собственным решениям.

Список литературы

1. Шевченко В. В. Плавные переходы в открытых волноводах.— М., 1969.
2. Гончаренко А. М., Карпенко В. А. Основы теории оптических волноводов.— Минск, 1983.
3. Рудницкий А. С., Титов А. Д., Хапалюк А. П. // Труды Респ. науч.-техн. совещ.: Функциональные оптоэлектронные элементы и устройства для аппаратуры средств связи.— Минск, 1984.— С. 104.
4. Титов А. Д., Хапалюк А. П. // Изв. вузов. Радиофизика.— 1983.— Т. 26.— № 4.— С. 455; № 5.— С. 593.
5. Рудницкий А. С., Титов А. Д., Хапалюк А. П. // Радиотехника.— 1985.— С. 68.
6. Справочник по элементам радиоэлектронных устройств / Под ред. В. Н. Дулина, М. С. Жука.— М., 1977.— С. 429.

Поступила в редакцию 13.05.85.

УДК 517.51

Л. И. ШЛОМА

ОБ ОЦЕНКАХ УКЛОНЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ ОТ ПОЛИНОМОВ ИЗ НЕКОТОРОГО СЕМЕЙСТВА

Обозначим $T_k(x) = \cos k \arccos x$, $S_k(x) = \sin k \arccos x$, $k=0, 1, \dots$; $a_k^{(r)} = a_k(f^{(r)})$ — коэффициенты Фурье — Чебышева функции $f^{(r)}(x)$; $\omega(f; \delta)$ — модуль непрерывности $f(x)$; $\bar{f}(\varphi) = f(\cos \varphi)$ — функция, индуцированная по отношению к $f(x)$; $\Phi(f; \varphi, \theta) = \bar{f}(\theta + \varphi) - 2\bar{f}(\varphi) + \bar{f}(\theta - \varphi)$. Имеет место

Лемма. Пусть $f(x) \in C^r[-1, 1]$, $r \in \mathbb{N}$. Тогда для любого $x \in [-1, 1]$ справедливо разложение

$$f(x) \sim P_{2r}(x) + \sum_{m=0}^{\left[\frac{r}{2}\right]} x^{r-2m} (1-x^2)^m \tau^{(r)}(2m, x) + \\ + \sum_{m=1}^{\left[\frac{r+1}{2}\right]} x^{r-2m+1} (1-x^2)^{m-\frac{1}{2}} \tau^{(r)}(2m-1, x), \quad (1)$$

где $P_{2r}(x)$ — алгебраический многочлен степени $2r$, $\tau^{(r)}(2m, x) = \sum_{k=r+1}^{\infty} p_{2m}^{(r)}(k) a_k^{(r)} T_k(x)$, $\tau^{(r)}(2m-1, x) = \sum_{k=r+1}^{\infty} p_{2m-1}^{(r)}(k) a_k^{(r)} S_k(x)$.

Множители $p_j^{(r)}(k)$ вычисляются по следующим рекуррентным формулам:

$$p_0^{(1)}(k) = -\frac{1}{k^2-1}, \quad p_1^{(1)}(k) = -\frac{k}{k^2-1}; \quad (2) \\ p_j^{(r+1)}(k) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{p_j^{(r)}(k+1)}{k+1} - \frac{p_j^{(r)}(k-1)}{k-1} + \right. \\ \left. + (-1)^j \left[\frac{p_{j-1}^{(r)}(k+1)}{k+1} + \frac{p_{j-1}^{(r)}(k-1)}{k-1} \right] \right\}, \\ j = \overline{0, r+1}; \quad p_{-1}^{(r)}(k) = p_{r+1}^{(r)}(k) = 0.$$

З а м е ч а н и е 1. Из (2) следует, что

$$p_j^{(r)}(k) = O\left(\frac{1}{k^{2r-j}}\right), \quad k \rightarrow \infty.$$

Используя (1), построим семейство линейных операторов, отображающих $C[-1, 1]$, $r \in N$, в подпространство алгебраических многочленов степени $2n-1$, $n > r$:

$$\begin{aligned} W_{n,q}(f; x) = & P_{2r}(x) + \sum_{m=0}^{\left[\frac{r}{2}\right]} x^{r-2m} (1-x^2)^m \tau_{n,q}^{(r)}(2m, x) + \\ & + \sum_{m=1}^{\left[\frac{r+1}{2}\right]} x^{r-2m+1} (1-x^2)^{m-\frac{1}{2}} \tau_{n,q}^{(r)}(2m-1, x), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tau_{n,q}^{(r)}(2m, x) &= \sum_{k=r+1}^n p_{2m}^{(r)}(k) \mu_{n,q}(2m, k) a_k^{(r)} T_k(x), \\ \tau_{n,q}^{(r)}(2m-1, x) &= \sum_{k=r+1}^n p_{2m-1}^{(r)}(k) \mu_{n,q}(2m-1, k) a_k^{(r)} S_k(x), \\ \mu_{n,q}(j, k) &= 1 - \frac{p_j^{(r)}(n+1)}{p_j^{(r)}(k)} \cdot \frac{k^q}{n^q}, \quad q \in N, \quad k = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Зафиксируем q и будем приближать функции $f(x) \in C[-1, 1]$, $r = 2, 3, \dots$, многочленами $W_{n,q}(f; x)$. Если обозначить:

$$\begin{aligned} Q_1 = Q_{n,1}^{(r)}(x) &= \sum_{m=0}^{\left[\frac{r}{2}\right]} |p_{2m}^{(r)}(n+1)| \cdot |x|^{r-2m} (1-x^2)^m, \\ Q_2 = Q_{n,2}^{(r)}(x) &= \sum_{m=1}^{\left[\frac{r+1}{2}\right]} |p_{2m-1}^{(r)}(n+1)| \cdot |x|^{r-2m+1} (1-x^2)^{m-\frac{1}{2}}, \\ D_n^{(r)}(x) &= \frac{1}{\pi n} \sum_{m=0}^{\left[\frac{r}{2}\right]} p_{2m}^{(r)}(n+1) (1-x^2)^m \int_{\frac{\pi}{n}}^{\infty} \frac{\Phi(f^{(r)}; \varphi, \theta)}{\theta^2} d\theta, \end{aligned}$$

то справедлива следующая

Теорема. Пусть $f(x) \in C[-1, 1]$, $r = 2, 3, \dots$. Тогда $\forall n > r$ и $\forall x \in [-1, 1]$ верны оценки:

$$\begin{aligned} |f(x) - W_{n,1}(f; x) - D_n^{(r)}(x)| &\leq (\alpha_1 Q_1 + \beta_1 Q_2) \omega\left(f^{(r)}; \frac{1}{n}\right); \\ |f(x) - W_{n,2}(f; x)| &\leq [(84 \ln n + \alpha_2) Q_1 + (125 \ln n + \beta_2) Q_2] \omega\left(f^{(r)}; \frac{1}{n}\right); \\ |f(x) - W_{n,q}(f; x)| &\leq (\alpha_q Q_1 + \beta_q Q_2) \omega\left(f^{(r)}; \frac{1}{n}\right), \quad q \geq 3, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_q = \alpha_q(r) &= \begin{cases} 56r + 43 & \text{при } q = 1, \\ 56r + 71 & \text{при } q = 2, \\ 56r + 36q^2 - 16q + 43 & \text{при } q \geq 3; \end{cases} \\ \beta_q = \beta_q(r) &= \begin{cases} 84r + 96 & \text{при } q = 1, \\ 84r + 128 & \text{при } q = 2, \\ 84r + 54q^2 - 24q + 89 & \text{при } q \geq 3. \end{cases} \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е 2. Для любого $x \in (-1, 1)$

$$D_n^{(r)}(x) = \begin{cases} O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\right), & \text{если } r \text{ нечетное} \\ O\left(\frac{1}{n^r}\right), & \text{если } r \text{ четное} \end{cases}$$

$$\text{и } D_n^{(r)}(\pm 1) = O\left(\frac{1}{n^{2r}}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

З а м е ч а н и е 3. Для любых $q=1, 2, \dots, r=2, 3, \dots$

$$\alpha_q(r) Q_{n,1}^{(r)}(x) + \beta_q(r) Q_{n,2}^{(r)}(x) \leq c_q(r) \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{|x|}{n^2} \right)^r,$$

причем, способ доказательства позволяет оценить константы $c_q(r)$ (определяются из (2), (3), бинома Ньютона), которые при фиксированном q зависят лишь от r .

Многочлены $W_{n,q}(f; x)$, $q \geq 3$, для любого $n > r$ осуществляют приближение $f(x) \in C[-1, 1]$ порядка наилучшего. Оценка уклонения этих полиномов в точках $x = \pm 1$ и «близких» к ним несколько хуже, чем известная оценка А. Ф. Тимана (Докл. АН СССР.— 1951.— Т. 78.— № 1.— С. 17).

В заключение автор выражает искреннюю благодарность А. К. Покало за постановку задачи и помощь при ее решении.

Поступила в редакцию 21.12.84.