УДК 519.62

В. В. БОБКОВ

О НЕКОТОРЫХ МЕТОДАХ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЖЕСТКИХ СИСТЕМ

Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$u'(t)+f(t,\ u(t))=0,\ u=(u_1,\ \dots,\ u_n)^T,\ f=(f_1,\ \dots,\ f_n)^T. \qquad (1)$$

Характерным примером жесткой системы вида (1) может служить система

$$u'(t)+Au(t)=b,\ A=A^T>0,\ b=(b_1,\ \dots,\ b_n)^T, \qquad (2)$$

с большим разбросом собственных значений $\lambda_1<\lambda_2<\dots<\lambda_n$ матрицы А. При построении эффективных методов численного решения таких систем обеспечение лишь классических требований аппроксимации и устойчивости часто оказывается недостаточным. В конструкцию метода приходится закладывать дополнительные свойства, гарантирующие более высокий уровень согласованности дифференциальной и соответствующей разностной задач.

Обратим внимание, например, на следующее свойство системы (2): если вектор $r(t)=b-Au(t)$ не является собственным вектором матрицы A, то отношение Релея $\mu_k(r(t))=r^T(t)A^{k+1}r(t)/r^T(t)A^kr(t)$, $k\gtrless 0$, монотонно убывает во времени для любого отличного от $u(t)\equiv A^{-1}b$ решения рассматриваемой системы. Для проверки этого свойства достаточно, учитывая неравенство Коши — Буняковского [1], выяснить знак производной по t функции $\mu_k(r(t))$. При конструировании численных методов естественно потребовать, чтобы аналогичное свойство (для краткости станем называть его свойством R-монотонности) имело место и в случае соответствующего приближенного решения, при этом в достаточно широком диапазоне изменения параметра дискретизации $\tau>0$.

Рассмотрим два семейства методов первого порядка точности вида

$$\hat{y}=y-\tau\rho_0(\mu)f\ (3),\qquad \hat{y}=y-\tau\rho_0(\mu)\hat{f}\exp(\mu\tau),\ (4)\qquad \mu=\mu_k(p),\ k\gtrless 0,\ (5)$$

где $y\approx u(t)$, $\hat{y}\approx u(t+\tau)$, $f=f(t,\ y)=Ay-b=-p$, $\hat{f}=f(t+\tau,\ \hat{y})$, $\rho_0(\mu)=[1-\exp(-\mu\tau)]/\mu\tau$, являющихся естественным обобщением на случай неоднородной системы (2) методов типа (4), (8) и (5), (7) из [2]. Аналогично [2] для методов (3), (5) и (4), (5) проверяются свойства устойчивости в смысле убывания нормы $p\approx r(t)$ в соответствующем энергетическом пространстве. Кроме того, оказывается, что методы (3), (5) и (4), (5) точны на решениях вида $u(t)=A^{-1}b+c_i\xi^i\exp(-\lambda_it)=\Gamma^i(t)$ системы (2), где $\xi^i(i=1,\ 2,\ \dots,\ n)$ есть собственные векторы матрицы A (ортонормированные, скажем, в рассматриваемом энергетическом пространстве), а $c_i(i=1,\ 2,\ \dots,\ n)$ — произвольные постоянные. Это проверяется непосредственно. Последнее свойство методов (3), (5) и (4), (5) особенно важно при выходе решения на так называемый регулярный режим [1], когда справедливо приближенное равенство $u(t)\approx\approx A^{-1}b+c_1\xi^1\exp(-\lambda_1,\ t)=\Gamma^1(t)$, $c_1\neq 0$. Функция $\mu_k(r(t))$ для случая решения $\Gamma^1(t)$, очевидно, тождественно равна λ_1.

Заметим, что для неявного метода (4), (5) при любых $\tau>0$ выполняется и свойство R-монотонности:

$$\mu_k(\hat{p})<\mu_k(p),\ \hat{p}=b-A\hat{y}. \qquad (6)$$

Аналогичное (6) требование в случае явного метода (3), (5) приводит к ограничению на шаг $\tau>0$ вида

$$\tau\rho_0(\mu)<2/\sigma_{k+1}(p), \qquad (7)$$

где $\mu=\mu_k(p)$, $\sigma_{k+1}(p)=\mu_{k+1}(p)\,(1+\Delta_{k+1}(p)/\Delta_k(p))$, $\Delta_i(p)=\mu_{i+1}(p)-\mu_i(p)$.

Если условие (7) не выполняется, в метод (3), (5) можно ввести корректирующий множитель $\rho(\nu)$ $(0<\rho(\nu)\leqslant 1$, $\rho(\nu)=1+O(\tau^m)$, $m\geqslant 1)$, зависящий от параметра $\nu\geqslant 0$:

$$\hat{y} = y - \tau\rho(\nu)\rho_0(\mu)f. \tag{8}$$

Тогда требование (6) вместо (7) порождает неравенство $\tau\rho(\nu)\rho_0(\mu) < 2/\sigma_{k+1}(p)$, которое, например, в случае

$$\rho(\nu) = (1 + \nu\tau)^{-1},\ \nu \geqslant 0, \tag{9}$$

приводит к следующему ограничению на выбор ν: $\nu > 1/2\sigma_{k+1}(p)\rho_0(\mu) - 1/\tau$, $\mu = \mu_k(p)$, $k \geqslant 0$.

Если вместо (9) корректирующий множитель $\rho(\nu)$ в (8) взять, скажем, в виде $\rho(\nu) = [1 - \tau\nu\mu_1(p)] / [1 - \tau\nu\mu_0(p)]$, то для выбора $\nu \geqslant 0$ можно рекомендовать правило $\nu = \begin{cases} \xi/\eta, & \xi > 0, \\ 0 & \xi \leqslant 0, \end{cases}$ где $\xi = \tau\rho_0(\mu) \times \sigma_{k+1}(p) - 2$, $\eta = \tau[\tau\rho_0(\mu)\sigma_{k+1}(p)\mu_1(p) - 2\mu_0(p)]$, $\mu = \mu_0(p)$, $k = 0 \vee 1$.

Построенные выше методы могут быть использованы и в общем случае системы (1). Для вычисления $\mu_k(r(t))$ при этом естественно положить $r(t) = -f(t, u(t))$, а в качестве матрицы A взять, например, матрицу Якоби системы (1) или ее аппроксимацию. Вместо вектора $r(t)$ можно использовать также вектор $\Delta\check{u} = u(t) - u(t-\tau)$. Тогда вычислительный процесс может быть несколько упрощен: взамен вектора $Ar(t)$ здесь можно брать вектор $f(t, u(t)) - f(t-\tau, u(t-\tau))$. Последнее особенно существенно для неявного метода вида (4), (5) при $k = 0$.

Список литературы

1. Самарский А. А. Теория разностных схем.— М., 1983.
2. Бобков В. В. // Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех.— 1984.— № 2.— С. 63.

Поступила в редакцию 20.06.84.

УДК 621.317.538.26

В. Г. ШЕПЕЛЕВИЧ

ФОРМИРОВАНИЕ НЕОДНОРОДНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ *C*-ОБРАЗНЫМИ МАГНИТНЫМИ ЛИНЗАМИ

Магнитная система, состоящая из двух *C*-образных магнитных линз, формирует неоднородное магнитное поле и используется в ряде устройств, например, гальваномагнитных преобразователях механических величин [1, 2]. Схема такой магнитной системы приведена в верхнем углу рис. 1, где точка *O* является ее центром симметрии. Ось *OX* параллельна плоскости полюсов, ось *OY* перпендикулярна к оси *OX* и лежит в плоскости рисунка, ось *OZ* перпендикулярна к осям *OX* и *OY* и на рисунке не указана. При перемещении гальваномагнитного преобразователя вдоль оси *OX* изменение его сигнала определяется градиентом компо-

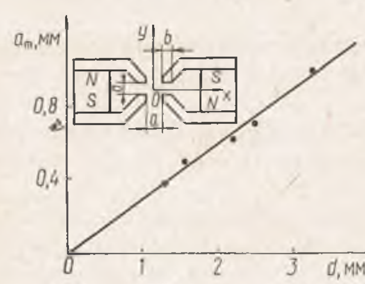

Рис. 1. Зависимость a_m от величины рабочего зазора d магнитных линз и схема магнитной системы

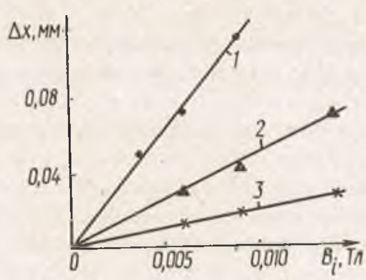

Рис. 2. Влияние внешнего магнитного поля B_i на смещение нулевой точки Δx ($1 - B_i \parallel OY$; $2 - B_i \parallel OX$; $3 - B_i \parallel OZ$)