УДК 517.97

НГУЕН ЧАН

О МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ИГРОВОЙ ЗАДАЧИ НЕПРЕРЫВНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

1. Прямой опорный метод. Рассмотрим задачу (1): $\varphi(u(\cdot)) = \lambda = \min\limits_{t\in T} c'x(t) \to \max$; $\dot{x}(t) = A\dot{x}(t) + bu(t)$, $x(0)=x_0$, $t \in T = [0, t^*]$, где c, b, x_0, $x(t)$ — n-векторы; $c'b \neq 0$; $u(t)$ — скаляр; A — матрица, «$'$»—знак транспонирования.

Допустимым управлением считаем всякую кусочно-непрерывную функцию $u(\cdot)$, $|u(t)| \leqslant 1$, $t \in T$. Понятия оптимального и ε- или субоптимального управлений см. в работе Р. Габасова, Ф. М. Кирилловой (Конструктивные методы оптимизации.— Минск, 1984.— Ч. 2.— С. 52).

Пусть $F(t, \tau)$, $F_\Phi(t, \tau)$ — решения матричных дифференциальных уравнений $\frac{d}{dt} F(t, \tau) = AF(t, \tau)$, $\frac{d}{dt} F_\Phi(t, \tau) = \Phi A F_\Phi(t, \tau)$, $F(\tau, \tau) = F_\Phi(\tau, \tau) = E$(единичная диагональная матрица), $\Phi = E - bc'/c'b$.

Опорой назовем совокупность $S_{\text{оп}} = \{I_{\text{оп}}, t_{\text{оп}}\}$ из отрезков $I_{\text{оп}} = \{I_i = [\tau_i, \tau^i] \subset T,\ i = \overline{1, m}\}$, $\tau_i \leqslant \tau^i < \tau_{i+1}$, и точек $t_{\text{оп}} = \{t_j,\ j = \overline{1, m-1}\} \subset T \diagdown \bigcup\limits_{i=1}^{m} (\tau_i, \tau^i)$, $t_j < t_{j+1}$, для которой $\det P_{\text{оп}} \neq 0$, где матрица $P_{\text{оп}} = (p_{ij},\ i, j = \overline{1, m})$, $p_{ij} = c'G_{ik}F(\tau_k, t_j)b$, если $\tau^{k-1} < t_j \leqslant \tau_k$, $1 \leqslant k \leqslant i$; $p_{ij} = 0$; если $t_j > \tau^i$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, m-1}$; $p_{im} = -1$, $i = \overline{1, m}$; $G_{ik} = F(\tau_i, \tau^{i-1}) F_\Phi(\tau^{i-1}, \tau_{i-1}) \ldots F(\tau_{k+1}, \tau^k) F_\Phi(\tau^k, \tau_k)$, $1 \leqslant k \leqslant i \leqslant m$, $G_{ii} = E$. Опорное управление, т. е. пару $\{u(\cdot), S_{\text{оп}}\}$ из допустимого управления $u(\cdot)$ и опоры $S_{\text{оп}}$, считаем невырожденным, если $c'x(t) > \lambda\ \forall t \in I_{\text{н}} = T \diagdown I_{\text{оп}}$ и $|u(t)| < 1\ \forall t \in t_{\text{оп}} \cup I_{\text{оп}}$. Далее пусть $q_m = (q_{mi},\ i = \overline{1, m})$ — последняя строка матрицы $P_{\text{оп}}^{-1}$; $b_i(t) = -c'G_{ik}F(\tau_k, t)b$ для $t \in I_{\text{н}}^k = [\tau^{k-1}, \tau_k] \diagdown t_{\text{оп}}$, $1 \leqslant k \leqslant i$, $b_i(t) = 0$ для остальных точек множества $I_{\text{н}}$, $b'(t) = (b_1(t), \ldots, b_m(t))$, $t \in I_{\text{н}}$; $\alpha_i = q_{mi} + \sum\limits_{k>i} q_{mk}c'G_{ki}b/c'b$, $\beta_i = -\sum\limits_{k>i} q_{mk}c'G_{k,i+1} F(\tau_{i+1}, \tau^i)\, b/c'b$, $\gamma_i(t) = -\sum\limits_{k>i} q_{mk}c'G_{k,\,i+1} F(\tau_{i+1}, \tau^i) F_\Phi(\tau^i, t)\, \Phi A b/c'b$, $t \in I_i$, $i = \overline{1, m}$; $\gamma(t) = \gamma_i(t)$, если $t \in I_i$, $i = \overline{1, m}$; $\omega(t) = c'x(t) - \lambda$, $t \in T$.

К р и т е р и й о п т и м а л ь н о с т и. Для оптимальности опорного управления $\{u(\cdot), S_{\text{оп}}\}$ достаточны, а в случае невырожденности и необходимы, следующие соотношения:

$$q_m b(t) \left| \begin{array}{l} \leqslant 0,\ u(t) = -1, \\ \geqslant 0,\ u(t) = 1, \\ = 0,\ |u(t)| < 1, \end{array} \right. \qquad \gamma(t) \left\{ \begin{array}{l} \leqslant 0,\ \omega(t) = 0, \\ = 0,\ \omega(t) > 0, \end{array} \right.$$

$$t \in I_{\text{н}}; \qquad\qquad t \in I_{\text{оп}};$$

$$\alpha_i \left\{ \begin{array}{l} \leqslant 0,\ \omega(\tau_i) = 0, \\ = 0,\ \omega(\tau_i) > 0, \end{array} \right. \qquad \beta_i \left\{ \begin{array}{l} \leqslant 0,\ \omega(\tau^i) = 0, \\ = 0,\ \omega(\tau^i) > 0, \end{array} \right.$$

$$i = \overline{1, m}.$$

Пусть $M = \|c'A\| (L\|x_0\| + L\|b\| t^*) + |c'b|$, где $L = \max\limits_{t,\,\tau\in T} \|F(t, \tau)\|$.

Оценкой субоптимальности для $\{u(\cdot), S_{\text{оп}}\}$ может служить величина

$$\beta(u(\cdot), S_{\text{оп}}) = \int\limits_{I_{\text{н}}^+} q_m b(t)[1 - u(t)]\,dt - \int\limits_{I_{\text{н}}^-} q_m b(t)[1 + u(t)]\,dt +$$

$$+ \int\limits_{I_{\text{оп}}^+} \gamma(t)[M - \omega(t)]\,dt - \int\limits_{I_{\text{оп}}^-} \gamma(t)\,\omega(t)\,dt + \Sigma^+ \alpha_i[M - \omega(\tau_i)] -$$

$$- \Sigma^- \alpha_i\omega(\tau_i) + \Sigma^+ \beta_i[M - \omega(\tau^i)] - \Sigma^- \beta_i\omega(\tau^i),$$

где $I_{н}^{\pm} = \{t \in I_{н}: q_m b(t) \gtrless 0\}$, $I_{оп}^{\pm} = \{t \in I_{оп}: \gamma(t) \gtrless 0\}$, $\Sigma^{+}(\Sigma^{-})$ означает суммирование по тем i, для которых α_i (или β_i) >0 (<0).

Исходя из этой оценки и применяя метод опорных задач (см. указанную работу Р. Габасова, Ф. М. Кирилловой) можно в случае необходимости построить алгоритм улучшения имеющегося опорного управления.

2. Двойственный метод. Запишем двойственную к (1) задачу (2):

$$\varphi_1(v(\cdot)) = \int_T r(t)\, v(t)\, dt + \int_T |\delta(t)|\, dt \to \min; \quad \int_T v(t)\, dt = 1, \quad v(\cdot) \geqslant 0,$$

где $\delta(t) = \psi'(t) b$, $\dot{\psi}'(t) = -\psi'(t) A + c' v(t)$, $\psi(t^*) = 0$; $r(t) = c' F(t, 0)\, x_0$.

Оценка субоптимальности здесь равна:

$$\beta_1(u(\cdot), v(\cdot)) = \int_{T^{+}} \delta(t)[1 + u(t)]\, dt - \int_{T^{-}} \delta(t)[1 - u(t)]\, dt +$$

$$+ \int_T \omega(t)\, v(t)\, dt, \quad T^{\pm} = \{t \in T: \delta(t) \gtrless 0\}.$$

Функцию $v(\cdot)$, удовлетворяющую ограничениям задачи (2), назовем допустимым двойственным управлением, а $\delta(\cdot)$ — соответствующим ему коуправлением.

Фиксируем $\varepsilon \geqslant 0$.

К р и т е р и й ε-о п т и м а л ь н о с т и. Для ε-оптимальности допустимого управления $u^{\varepsilon}(\cdot)$ задачи (1) необходимо и достаточно существование последовательности допустимых двойственных управлений $v_{\nu}(\cdot)$, $\nu = 1, 2, \ldots$, такой, что $\lim\limits_{\nu \to \infty} \beta_1(u^{\varepsilon}(\cdot), v_{\nu}(\cdot)) \leqslant \varepsilon$.

Оценку $\beta_1(\cdot)$ можно уменьшить путем улучшения двойственного управления $v(\cdot)$. С этой целью подсчитаем начальную скорость $\alpha(0)$ убывания функции $\varphi_1(v(\cdot))$ по направлению $\Delta v(\cdot)$:

$$\alpha(0) = \int_T r(t) \Delta v(t)\, dt + \int_{T^{+}} \Delta\delta(t)\, dt - \int_{T^{-}} \Delta\delta(t)\, dt,$$

$$\int_T \Delta v(t) dt = 0, \quad \Delta v(t) \geqslant -v(t), \quad \Delta\delta(t) = -\int_t^{t^*} c' F(\tau, t)\, b \Delta v(\tau)\, d\tau, \quad t \in T.$$

Теперь путем соответствующей дискретизации находится направление $\Delta v(\cdot)$ с минимальной $\alpha(0)$, а максимальный шаг вдоль найденного направления вычисляется по способу, изложенному в указанной работе Р. Габасова, Ф. М. Кирилловой (с. 114).

В заключение отметим, что нами рассмотрена также задача (1) с еще дополнительным ограничением $Hx(t^*) = g$ (H — матрица, g — m-вектор).

3. Пример. В качестве примера мы взяли задачу:

$$\varphi(u(\cdot)) = \min_{t \in [0;\, 2\pi]} (-x_1(t)) \to \max; \quad \dot{x}_1(t) = x_2(t) - u(t), \quad \dot{x}_2(t) = -x_1(t) +$$

$$+ u(t), \ t \in [0;\, 2\pi], \ x_1(0) = -1, \ x_2(0) = 0; \ |u(t)| \leqslant 1, \ t \in [0;\, 2\pi].$$

Начальное управление $u(t) = -1/2$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$; $=0$, $\pi/2 < t \leqslant 2\pi$; $\varphi(u(\cdot)) = 0$. Подходящее направление $\Delta u(t) = -1/2$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/4$; $= -\left\{\frac{\sqrt{2}-1}{2} + \frac{2-\sqrt{2}}{2} e^{t - \frac{\pi}{4}}\right\}$, $\frac{\pi}{4} \leqslant t \leqslant 2\pi$, максимальный допустимый шаг $\Theta = 2\{\sqrt{2} - 1 + (2 - \sqrt{2})\, e^{7\pi/4}\}^{-1}$. Для нового управления $\bar{u}(\cdot) = u(\cdot) + \Theta \Delta u(\cdot)$ имеем $\varphi(\bar{u}(\cdot)) \approx 0{,}00414$.

Двойственная задача:

$$\varphi_1(v(\cdot)) = \int_0^{2\pi} v(t) \cos t\, dt + \int_0^{2\pi} |\delta(t)|\, dt \to \min; \quad v(\cdot) \geqslant 0, \quad \int_0^{2\pi} v(t)\, dt = 1,$$

$$\delta(t) = -\int_t^{2\pi} [\cos(\tau - t) - \sin(\tau - t)]\, v(\tau)\, d\tau, \quad t \in [0;\ 2\pi].$$

Начальное двойственное управление $v(t) \equiv 1/2\pi$, $t \in [0;\ 2\pi]$, $\varphi_1(v(\cdot)) = \frac{\pi + 4}{2\pi}$. Подходящее направление $\Delta v(\cdot) = 3/2\pi$, $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$; $= -1/2$, $\pi/2 < t \leqslant 2\pi$ (скорость $\alpha(0) = -\frac{1}{2\pi}(8 - \pi)$), шаг $\Theta = \frac{1}{5}$. Для нового двойственного управления $\bar{v}(\cdot) = v(\cdot) + \Theta \Delta v(\cdot)$ имеем $\varphi_1(\bar{v}(\cdot)) \approx 0{,}982$.

Поступила в редакцию 16.11.84.

УДК 517.925.6

А. И. ЯБЛОНСКИЙ, А. Ф. КОРЗЮК, С. А. МЫЗГАЕВА

ХАРАКТЕР ВЕТВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ПОДВИЖНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ В СЛУЧАЕ АППЕЛЬРОТА

Рассмотрим известную задачу движения твердого тела вокруг неподвижной точки, решение которой сводится к исследованию системы дифференциальных уравнений вида [1]:

$$\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} &= (B - C)qr + Mg(y_0\gamma'' - z_0\gamma'), \\ B\frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + Mg(z_0\gamma - y_0\gamma''), \\ C\frac{dr}{dt} & (A - B)pq + Mg(x_0\gamma' - y_0\gamma), \end{aligned} \qquad (1)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = r\gamma' - q\gamma'', \quad \frac{d\gamma'}{dt} = p\gamma'' - r\gamma, \quad \frac{d\gamma''}{dt} = q\gamma - p\gamma',$$

где A, B, C — главные оси эллипсоида инерции рассматриваемого тела относительно неподвижной точки; M — масса тела; g — ускорение свободного падения; x_0, y_0, z_0 — координаты центра тяжести рассматриваемого тела в системе координат, начало которой находится в неподвижной точке и направление осей которой совпадает с направлением осей эллипсоида инерции.

В настоящей работе выясняется характер ветвления решений в окрестности подвижных особенностей при условии Аппельрота:

$$y_0 = 0, \quad x_0\sqrt{A(B - C)} + z_0\sqrt{C(A - B)} = 0, \quad A > B > C. \qquad (2)$$

Решения системы (1) ищем в виде

$$\begin{aligned} p(t) &= t^{-1}(p_0 + u_1(t)), & \gamma &= t^{-1}(f_0 + u_4(t)), \\ q(t) &= t^{-1}(q_0 + u_2(t)), & \gamma' &= t^{-1}(g_0 + u_5(t)), \\ r(t) &= t^{-1}(r_0 + u_3(t)), & \gamma'' &= t^{-1}(h_0 + u_6(t)). \end{aligned} \qquad (3)$$

После подстановки (3) в (1) с учетом условий (2) получаем систему:

$$\begin{aligned} -Ap_0 &= (B - C)q_0r_0, & -f_0 &= r_0g_0 - q_0h_0, \\ -Bq_0 &= (C - A)r_0p_0, & -g_0 &= p_0h_0 - r_0f_0, \\ -Cr_0 &= (A - B)p_0q_0, & -h_0 &= q_0f_0 - p_0g_0, \end{aligned} \qquad (4)$$

решая которую, находим коэффициенты представления (3):

$$p_0 = \frac{i\sqrt{BC}}{\sqrt{(A - B)(A - C)}}, \quad f_0 = \mu\sqrt{A(B - C)},$$

$$q_0 = -\frac{\sqrt{AC}}{\sqrt{(A - B)(B - C)}}, \quad g_0 = i\mu\sqrt{B(A - C)}, \qquad (5)$$