

$$\text{где } f_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{\tau_{x1}(\alpha, \beta)(x-\alpha) d\alpha d\beta}{[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2]^{3/2}} + \\ + \frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{\tau_{y1}(\alpha, \beta)(y-\beta) d\alpha d\beta}{[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2]^{3/2}};$$

$$f_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{\tau_{x1}(\alpha, \beta)(y-\beta) d\alpha d\beta}{[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2]^{3/2}} - \frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{\tau_{y1}(\alpha, \beta)(x-\alpha) d\alpha d\beta}{[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2]^{3/2}}.$$

Учитывая, что $f_i(x, y) \neq 0$ для точек $(x, y) \in S$, из (13) получим:

$$\lambda_1 \Phi_1 + \lambda_2 \Phi_2 = q_4(x, y, \zeta); \quad \psi_0 = q_5(x, y, \zeta), \quad (14)$$

$$\text{где } q_4 = -\frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{f_3(\xi, \eta) d\xi d\eta}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + \zeta^2},$$

$$q_5 = -\frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{f_4(\xi, \eta) d\xi d\eta}{V(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + \zeta^2};$$

$$f_3(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{f_1(\delta, \omega) d\delta d\omega}{V(\xi-\delta)^2 + (\eta-\omega)^2}, \quad f_4(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{f_2(\delta, \omega) d\delta d\omega}{V(\xi-\delta)^2 + (\eta-\omega)^2}.$$

Решая теперь уравнения (12) и (14) относительно Φ_k и ψ_0 , имеем:

$$\Phi_1 = \frac{q_4 - \lambda_2 q_1}{\lambda_1 - \lambda_2}; \quad \Phi_2 = \frac{q_4 - \lambda_1 q_1}{\lambda_2 - \lambda_1}; \quad \psi_0 = q_5. \quad (15)$$

Для отыскания неизвестной функции $p(x, y)$ получаем интегральное уравнение, удовлетворяя граничному условию для осадки w :

$$w_0 - w_1 = + \frac{\lambda_1 \kappa_1 - \lambda_2 \kappa_2}{\lambda_2 - \lambda_1} f_3(x, y) + \frac{\lambda_2 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (\kappa_2 - \kappa_1) q_0(x, y), \quad (16)$$

где $(x, y) \in S_1$.

Список литературы

1. Хрусталева А. Ф. // ИФЖ.— 1965.— Т. 5.— № 1.— С. 180.
2. Грилицкий Д. В., Шелестовский Б. Г. // Вісник Льв. ун-ту. Сер. мех., мат.— 1971.— Вып. 6.— С. 83, 139.
3. Прусов И. А., Комаров Г. В. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук.— 1981.— № 5.— С. 43.
4. Комаров Г. В. Трехмерные задачи теории упругости и термоупругости для трансверсально-изотропного полупространства: Автореф. дис. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук.— Минск, 1984.

Поступила в редакцию 15.10.84.

УДК 517.937

АЛИ ХАСАН АЛЬ-РУБАЙИ

О СИЛЬНОМ ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОКАЗАТЕЛЕ МНОГОМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть K — выпуклый конус в R^m с вершиной в точке $x=0$, $x \in K$, $y \in R^n$, $A(x)$ — равномерно ограниченная и непрерывно дифференцируемая операторная функция, заданная на конусе K и со значениями в пространстве $L(R^m, L^n, R^n)$.

Рассмотрим многомерное линейное дифференциальное уравнение

$$y'(x)h = A(x)hy(x) \quad (1)$$

и так называемое возмущенное уравнение

$$y'(x)h = A(x)hy + f(x, y)h, \quad (2)$$

в котором возмущение $f(x, y)$ — непрерывно дифференцируемая функция, заданная на произведении конуса K и некоторой области G и удовлетворяющая условию малости $\|f(x, y)\| \leq \delta(x)\|y\|$, а $\delta(x) \leq \delta$, в частности, таким возмущением может быть линейное возмущение $f(x, y) = F(x)y$, где $\|F(x)\| \leq \delta(x)$.

Мы будем предполагать, что для любых $x_0 \in K$ и $y_0 \in G$ каждое из уравнений (1) и (2) имеет единственное решение, определенное на всем конусе K и удовлетворяющее данным начальным условиям.

В [1] введено понятие сильного показателя решения многомерного линейного уравнения. В настоящей статье ставится задача: аналогично [2 и 3] указать на два подхода в определении сильного центрального показателя и доказать, что сильный центральный показатель ограничивает подвижность сверху старшего сильного показателя уравнения (1).

В первом подходе рост решений $y(x)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$ будем изучать с помощью оценок вида

$$\|y(x)\| \leq \|y(s)\| D_Q \exp \int_s^x Q(x) dl, \quad (3)$$

где $Q: K \rightarrow R$ — интегрируемая и равномерно ограниченная функция, а $\int_s^x Q(x) dl$ — криволинейный интеграл первого рода по отрезку $[s, x]$, принадлежащему лучу $t\xi$ из конуса K ($\|\xi\|=1$), для любого $s \in K$ и с $\|s\| = \|x_0\|$, $D_Q = \text{const}$, зависящая лишь от Q .

Определение 1. Оценка (3) называется равномерной по начальному моменту x_0 для заданного множества решений, если для всех этих решений постоянную D_Q можно выбрать независимо от s .

Легко доказать, что справедливы два следующих утверждения.

Теорема 1. Равномерность оценки (3) для всех решений многомерного линейного уравнения (1) равносильна существованию такой же равномерной оценки для его матрицы Коши $Y(x, s)$, т. е.

$$\|Y(x, s)\| \leq D_Q \exp \int_s^x Q(x) dl, \quad (4)$$

где $\|s\| \leq \|x\|$.

Теорема 2. Если для матрицы Коши $Y(x, s)$ уравнения (1) существует равномерная оценка (4), то для всех решений возмущенного уравнения (2) существует равномерная оценка

$$\|y(x)\| \leq \|y(s)\| D_Q \exp \left(\int_s^x [Q(x) + D_Q \delta(x)] dl \right). \quad (5)$$

Следствие 1. Пусть $\Lambda(y)$ — сильный показатель решения уравнения (2). Тогда $\Lambda(y) \leq \bar{Q} + D\delta$, где $\bar{Q} = \overline{\lim_{\|x\| \rightarrow \infty}} \frac{1}{\|x\|} \int_s^x Q(x) dl$ — верхнее среднее значение функции Q .

Определение 2. Функция $Q: K \rightarrow R$ называется верхней функцией, если она равномерно ограничена, интегрируема и осуществляет оценку

$$\|Y(x, s)\| \leq D_{Q,\varepsilon} \exp \left(\int_s^x Q(x) dl + \varepsilon \|x - s\| \right), \quad (6)$$

где $\|s\| \leq \|x\|$.

Совокупность всех верхних функций обозначим $R(Q)$. Как следует из [1], множество $R(Q)$ не пусто, так как за функцию Q можно взять $\|A(x)\|$.

Пусть $\bar{Q} = \overline{\lim_{\|x\| \rightarrow \infty}} \frac{1}{\|x\|} \int_s^x Q(x) dl$ — верхнее среднее значение функции Q

(из равномерной ограниченности функции Q следует, что $\bar{Q}$ не зависит от s).

Определение 3. Число $\Omega = \inf_R \bar{Q}$ назовем верхним сильным центральным показателем уравнения (1).

Пусть $\bar{\Lambda}$ — старший сильный показатель уравнения (1) [1].

Определение 4. Старший сильный показатель $\bar{\Lambda}$ называется прочным вверх, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая малость возмущений, при которой старший показатель возмущенной системы (2) не превосходит $\bar{\Lambda} + \varepsilon$. При этом число Ω' называется верхней границей подвижности старшего сильного показателя $\bar{\Lambda}$, если для любого $\varepsilon > 0$ при всех достаточно малых возмущениях $f(x, y)$ старший сильный показатель возмущенной системы (2) не превосходит $\Omega' + \varepsilon$.

Ясно, что всегда $\Omega' \geq \bar{\Lambda}$ и что число $\bar{\Omega} = \inf \Omega' \geq \bar{\Lambda}$.

Теорема 3. Любая верхняя функция Q , а также верхний сильный центральный показатель Ω ограничивают подвижность вверх старшего сильного показателя уравнения (1), т. е. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, такое, что при любых возмущениях $\|f(x, y)\| < \delta$ будут выполняться неравенства

$$\|y(x)\| \leq D_\varepsilon \|y(s)\| \exp \left(\int_s^x Q(x) dl + \varepsilon \|x - s\| \right) \quad (7)$$

и

$$\|y(x)\| \leq D_\varepsilon \|y(s)\| \exp (\Omega + \varepsilon) \|x - s\| \quad (8)$$

равномерно по всем решениям всех возмущенных уравнений (2), причем неравенство (7) равномерно также по всем x_0 и $\|x\| \geq \|s\|$.

Доказательство. Пусть $Q(x)$ верхняя функция. Тогда

$$\|Y(x, s)\| \leq D_Q \exp \left(\int_s^x Q(x) dl + \varepsilon_1 \|x - s\| \right), \quad \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{3},$$

откуда, согласно теореме 1 и при достаточно малых $\delta(x) \leq \delta = \frac{\varepsilon_1}{D_Q}$, получаем

$$\|y(x)\| \leq D \|y(s)\| \exp \left(\int_s^x Q(x) dl + 2\varepsilon_1 \|x - s\| \right), \quad (9)$$

а это неравенство (7).

Теперь по определению Ω функцию Q можно взять такой, что

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{1}{\|x\|} \int_s^x Q(x) dl < \Omega + \varepsilon_1, \text{ откуда } \int_s^x Q(x) dl < (\Omega + \varepsilon_1) (\|x - s\|) + \ln D.$$

Из (9) получаем (8). Теорема доказана.

Выделим в верхнем классе $R(Q)$ подкласс C , состоящий из констант c .

Определение 5. Число $\Omega^0 = \inf_C c$ называется верхним особым показателем уравнения (1), где C — совокупность всех констант c таких, что

$$\|Y(x, s)\| \leq D_{c,\varepsilon} + (c + \varepsilon) (\|x - s\|). \quad (10)$$

Из всего изложенного получаем следующие следствия.

Следствие 2. $\bar{\Lambda} \leq \bar{\Omega} \leq \Omega \leq \Omega^0$.

Следствие 3. Особый показатель Ω^0 дает оценку

$$\|y(x)\| \leq D_\varepsilon \|y(s)\| \exp ((\Omega^0 + \varepsilon) \|x - s\|),$$

которая равномерна как по решениям возмущенных систем, так и по x_0 , если возмущения достаточно малы.

Следствие 4. Для прочности вверх старшего сильного показателя достаточно его совпадения с верхним сильным центральным показателем или совпадения с верхним особым.

Аналогично определению 2 можно ввести понятие нижней функции и нижнего сильного центрального показателя уравнения (1) и доказать

теорему о том, что нижний сильный центральный показатель ограничивает подвижность вниз младшего сильного показателя уравнения (1).

Во втором подходе определения сильного центрального показателя будем изучать рост решений $y(x)$ с помощью оценок вида

$$\|y(x)\| \leq \|y(x_0)\| D_P \exp \int_{x_0}^x P(x) dx,$$

где $P:K \rightarrow R^m$ — интегрируемая и равномерно ограниченная функция, имеющая примитивную, а $\int_{x_0}^x P(x) dx$ — криволинейный интеграл второго рода, не зависящий от пути интегрирования (так как P имеет примитивную), $D_P = \text{const}$, зависящая лишь от P .

При этом подходе, точно так же, как и в первом, справедливы обе теоремы 1 и 2.

Определение верхней функции введем следующим образом.

Определение 6. Функция $P:K \rightarrow R^m$ называется верхней, если она равномерно ограничена, интегрируема, имеет примитивную и осуществляет оценку

$$\|Y(x, s)\| \leq D_{P,\varepsilon} \exp \left(\int_s^x P(x) dx + \varepsilon \|x - s\| \right),$$

где $\|s\| \leq \|x\|$.

Совокупность всех верхних функций обозначим $R(P)$. Множество $R(P)$ не пусто, так как за P можно взять функцию $P:K \rightarrow M \frac{d}{dx}(\|x\|)$ ($\|x\| > 0$), где $M = \sup \|A(x)\|$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. Тогда число $\Omega_1 = \inf \bar{P}$, где $\bar{P} = \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{1}{\|x\|} \int_{x_0}^x P(x) dx$, назовем верхним сильным центральным показателем уравнения (1).

При таком определении сильного центрального показателя остаются справедливыми все утверждения и определения, приведенные здесь для сильного центрального показателя в первом подходе. Естественно, возникает вопрос о взаимосвязи между сильными центральными показателями в обоих подходах. На этот счет справедлива

Теорема 4. $\Omega \leq \Omega_1$. (11)

Действительно, из связи между криволинейными интегралами обоих родов имеем

$$\int_{x_0}^x P(x) dx = \int_{x_0}^s P(x) dx + \int_s^x P(x) \xi dl,$$

где $\xi = \frac{x}{\|x\|}$ и $x \in K$, а $[s, x]$ — отрезок, принадлежащий лучу $x = t\xi$ из конуса K . Откуда видно, что $P(x)\xi$ входит в верхний класс $R(Q)$, а следовательно, имеет место (11).

Список литературы

1. Кожеро М. В. // Дифференц. уравнения. — 1980. — Т. 16. — № 11. — С. 1742.
2. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. — М., 1966.
3. Виноград Р. Э. // Матем. сб. — 1957. — Т. 42 (84). — Вып. 2. — С. 207.

Поступила в редакцию 25.10.84.