$$Q(\alpha) = \frac{1}{\Delta}\left[2\alpha h e^{-2\alpha h}\bar{\varepsilon}(\alpha) + (1 + \varkappa e^{-2\alpha h})\,\bar{\eta}(\alpha)\right],$$

где $\Delta = (1+\varkappa e^{-2\alpha h})(\varkappa + e^{-2\alpha h}) + (2\alpha h)^2 e^{-2\alpha h}$.

Таким образом, решение поставленной задачи определяется выражениями (8)—(10) и (13).

2. Вторая основная задача. Пусть на контуре заданы перемещения $u = g_1(x) f(t)$, $v = g_2(x) f(t)$, где $g_1(x)$, $g_2(x)$ — известные функции, удовлетворяющие условию Гёльдера. $\Phi(z)$ должна удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\varkappa\Phi^-(x) + \Phi^+(x) = \psi_1 \text{ на } L; \tag{14}$$

$$\varkappa\Phi(\tau) + \overline{\Phi(\bar{\tau})} + 2ih\overline{\Phi'(\tau)} = 0 \text{ на } L_1, \tag{15}$$

где $\psi_1(x) = 2\mu[g_1(x) + ig_2(x)]$.

Решение задачи представим в виде:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\varkappa}\left[\Phi_0(z) + \int\limits_0^\infty G(-\alpha)\, e^{-i\alpha z}\, d\alpha\right], \quad z \in S^-; \tag{16}$$

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \int\limits_0^\infty G(\alpha)\, e^{i\alpha z}\, d\alpha, \quad z \in S^+, \tag{17}$$

где $G(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_1(x)\, e^{-i\alpha x}\, dx.$

Поступая, как и в предыдущем случае, находим:

$$R(\alpha) = \frac{1}{\Delta}\,[(1 + e^{-2\alpha h})\varepsilon_1(\alpha) - 2\varkappa^{-1}\alpha h \eta_1(\alpha)]; \tag{18}$$

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\Delta}\,[2\varkappa^{-1}\alpha h e^{-2\alpha h}\bar{\varepsilon}_1(\alpha) + (1 + e^{-2\alpha h})\bar{\eta}_1(\alpha), \tag{19}$$

где $\Delta = (1+e^{-2\alpha h})^2 - (2\varkappa^{-1}\alpha h)^2 e^{-2\alpha h}$.

Следовательно, напряженно-деформированное состояние в полосе определяется на основании формул (2)—(5) и (16)—(19).

Поступила в редакцию 10.09.84.

УДК 539.3

И. А. ПРУСОВ, Г. В. КОМАРОВ

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Контактная задача термоупругости для упругого полупространства при стационарном распределении температуры в [1] решается для изотропного полупространства, в [2] рассматривается только осесимметричная задача для трансверсально-изотропного полупространства. В настоящей работе предполагается, что штамп имеет произвольную форму. Для решения задачи используется подход, предложенный в [3, 4].

Пусть на упругое полупространство давит абсолютно жесткий произвольный в плане плоский штамп. Предполагается, что силы трения между штампом и полупространством отсутствуют. Поверхность штампа имеет температуру $T = T_0(x, y)$, а температура соприкасающихся со штампом сред полагается нулевой. Тепловой контакт между телами совершенный.

Пусть трансверсально-изотропное полупространство занимает область $D^+(z \geqslant 0)$, $S(z=0)$ — граница полупространства, параллельная плоскости изотропии в каждой точке среды, S_1 — область, занимаемая штампом, $S_2=S\setminus S_1$ — остальная часть плоскости S. Температура, в силу сделанных оговорок, удовлетворяет уравнению:

$$k\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)T+k'\frac{\partial^2}{\partial z^2}T=0, \tag{1}$$

где k, k' — коэффициенты теплопроводности в плоскостях изотропии и нормали к ним соответственно.

Граничные условия для температуры примут вид:

$$T=T_0(x,\ y)\ \text{в}\ S_1,\quad T=0\ \text{в}\ S_2. \tag{2}$$

Решение задачи Дирихле (1), (2) для квазигармонической функции T известно:

$$T(x,\ y,\ \bar{\zeta})=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S_1}\frac{\bar{\zeta}T_0(\alpha,\ \beta)\,d\alpha d\beta}{[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+\bar{\zeta}^2]^{3/2}},\ \bar{\zeta}=\bar{\lambda}z,\ \bar{\lambda}=\sqrt{\frac{k}{k'}}. \tag{3}$$

Напряжения $\tau_{xz}=\tau_{x1}$, $\tau_{yz}=\tau_{y1}$, $\sigma_z=\sigma_1$ и осадка $w=w_1$, соответствующие температурному полю полупространства, выражаются через функции φ и ψ по формулам, полученным в [4]:

$$\begin{gathered}\sigma_1=-\frac{2}{a_{44}}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\varphi+\psi);\\ \tau_{x1}=\frac{2}{a_{44}}\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}(\varphi+\psi),\quad \tau_{y1}=\frac{2}{a_{44}}\cdot\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}(\varphi+\psi);\\ w_1=\left(2-\frac{a_{66}}{a_{44}}\gamma_1\right)\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\left(2-\frac{a_{66}}{a_{44}}\gamma_2\right)\frac{\partial\psi}{\partial z},\end{gathered} \tag{4}$$

причем функции φ и ψ удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial\zeta_2^2}\right)\psi=-LT,\quad \zeta_2=\lambda_2 z;\\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial\zeta_1^2}\right)\varphi=-MT,\quad \zeta_1=\lambda_1 z,\end{gathered} \tag{5}$$

где L, M, λ_1, λ_2 выражаются через упругие постоянные коэффициенты a_{ij} трансверсально-изотропного тела; $\gamma_k=\dfrac{\lambda_k^2(a_{11}+a_{12})-a_{13}}{a_{11}}$.

Функции φ и ψ вполне определяются из (3) и (5):

$$\begin{gathered}\psi(x,\ y,\ \zeta_2)=\frac{L}{4\pi}\iiint\limits_{D^+}\frac{T(\delta,\ \omega,\ \alpha_2)\,d\delta d\omega d\alpha_2}{\sqrt{(x-\delta)^2+(y-\omega)^2+(\zeta_2-\alpha_2)^2}};\\ \varphi(x,\ y,\ \zeta_1)=\frac{M}{4\pi}\iiint\limits_{D^+}\frac{T(\delta,\ \omega,\ \alpha_1)\,d\delta d\omega d\alpha_1}{\sqrt{(x-\delta)^2+(y-\omega)^2+(\zeta_1-\alpha_1)^2}},\end{gathered} \tag{6}$$

где $\alpha_1=\dfrac{\bar{\lambda}}{\lambda_1}\zeta_1$, $\alpha_2=\dfrac{\bar{\lambda}}{\lambda_2}\zeta_2$. В интегралах (6) α_1 и α_2 выступают как параметры интегрирования.

Граничные условия для контактной задачи запишем в виде:

$$\begin{gathered}\tau_{xz}=\tau_{x1}+\tau_{x2}=0,\quad \tau_{yz}=\tau_{y1}+\tau_{y2}=0\ \text{в}\ S;\\ \sigma_z=\sigma_1+\sigma_2=0\ \text{в}\ S_2;\\ w=w_1+w_2=w_0(x,\ y)\ \text{в}\ S_1,\end{gathered} \tag{7}$$

где индекс 1 относится к напряжениям и осадке, соответствующим температурному полю, а индекс 2 относится к чисто упругим компонентам напряжений и осадке.

Из (4), с учетом (3) и (6), определяются τ_{x1}, τ_{y1}, σ_1, и w_1. Для того чтобы удовлетворить граничным условиям (7), необходимо решить упругую задачу со следующими граничными условиями:

$$\tau_{x2}=-\tau_{x1}, \quad \tau_{y2}=-\tau_{y1} \text{ в } S;$$
$$\sigma_2=-\sigma_1 \text{ в } S_2; \tag{8}$$
$$w_2=w_0-w_1 \text{ в } S_1.$$

Для решения этой задачи воспользуемся общими формулами, полученными в [3]. Положив в них для простоты выкладок $n_0=\lambda_0$, $n_1=n_2=1$, $m_k=m_0=0$, выпишем необходимые соотношения:

$$\sigma_{z2}=-\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial\zeta_k^2}; \quad w_2=-\lambda_k\varkappa_k\frac{\partial\Phi_k}{\partial\zeta_k};$$
$$\tau_{x2}=-\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial x\partial z}-\frac{1}{\lambda_0}\cdot\frac{\partial^2\psi_0}{\partial y\partial z}; \quad \tau_{y2}=-\frac{\partial^2\Phi_k}{\partial y\partial z}+\frac{1}{\lambda_0}\cdot\frac{\partial^2\psi_0}{\partial x\partial z}, \tag{9}$$

где $\varkappa_k=a_{44}+(a_{12}-a_{11})\gamma_k$, $\gamma_k=\dfrac{(a_{11}+a_{12})\lambda_k^2-a_{13}}{a_{11}}$; произвольные функции Φ_k и ψ_0 удовлетворяют уравнениям:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}\right)\Phi=0, \tag{10}$$

где $\Phi=\Phi_k,\ \psi_0;\ \zeta=\zeta_1,\ \zeta_2,\ \zeta_0;\ \zeta_k=\lambda_k z;\ \zeta_0=\lambda_0 z;\ \lambda_0=\sqrt{\dfrac{a_{66}}{a_{44}}}$.

Индекс k ($k=1, 2$) в формулах (9) собирательный, знак суммирования по которому опущен для упрощения записи.

На основании формул (9) и граничных условий (8) при $z=0$ получим:

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial\zeta}+\frac{\partial\Phi_2}{\partial\zeta}\right)=\begin{cases}\sigma_1+p(x,\ y) & \text{в } S_1,\\ \sigma_1 & \text{в } S_2;\end{cases}$$
$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\lambda_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial x}+\frac{\partial\psi_0}{\partial y}\right)=\tau_{x1} \text{ в } S; \tag{11}$$
$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\lambda_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial\Phi_2}{\partial y}-\frac{\partial\psi_0}{\partial x}\right)=\tau_{y1} \text{ в } S,$$

где $p(x, y)$ — неизвестная плотность распределения контактных усилий в области S_1. В формулах (11) и далее для каждой из функций Φ_k и ψ_0 берутся соответствующие ζ_k и ζ_0. Введенный в работе формализм только существенно упрощает выкладки.

Решение граничных задач (11), как известно, имеет вид:

$$\Phi_1+\Phi_2=q_1(x,\ y,\ \zeta);$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(\lambda_1\Phi_1+\lambda_2\Phi_2)+\frac{\partial\psi_0}{\partial y}=q_2(x,\ y,\ \zeta); \tag{12}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(\lambda_1\Phi_1+\lambda_2\Phi_2)-\frac{\partial\psi_0}{\partial x}=q_3(x,\ y,\ \zeta),$$

где

$$q_1=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S\frac{q_0(\xi,\ \eta)\,d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2}};$$
$$q_0=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S\frac{\sigma_1(\alpha,\ \beta)d\alpha d\beta}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}}+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{S_1}\frac{p(\alpha,\ \beta)\,d\alpha d\beta}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}};$$
$$q_2=-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S\frac{\tau_{x1}(\alpha,\ \beta)\,d\alpha d\beta}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+\zeta^2}};$$
$$q_3=-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S\frac{\tau_{y1}(\alpha,\ \beta)d\alpha d\beta}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+\zeta^2}}.$$

Принимая во внимание, что функции Φ_k и ψ_0 удовлетворяют уравнениям (10), на основании формул (9) и (12) при $z=0$ имеем:

$$\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}(\lambda_1\Phi_1+\lambda_2\Phi_2)=-f_1(x,\ y); \quad \frac{\partial^2\psi_0}{\partial\zeta^2}=-f_2(x,\ y), \tag{13}$$

где $f_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_S \frac{\tau_{x1}(\alpha, \beta)(x-\alpha)\, d\alpha d\beta}{[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2]^{3/2}} +$

$$+ \frac{1}{2\pi} \iint\limits_S \frac{\tau_{y1}(\alpha, \beta)(y-\beta)\, d\alpha d\beta}{[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2]^{3/2}};$$

$$f_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_S \frac{\tau_{x1}(\alpha, \beta)(y-\beta)\, d\alpha d\beta}{[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2]^{3/2}} - \frac{1}{2\pi} \iint\limits_S \frac{\tau_{y1}(\alpha, \beta)(x-\alpha)\, d\alpha d\beta}{[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2]^{3/2}}.$$

Учитывая, что $f_i(x, y) \neq 0$ для точек $(x, y) \in S$, из (13) получим:

$$\lambda_1\Phi_1 + \lambda_2\Phi_2 = q_4(x, y, \zeta); \quad \psi_0 = q_5(x, y, \zeta), \tag{14}$$

где $q_4 = -\frac{1}{2\pi} \iint\limits_S \frac{f_3(\xi\eta)\, d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2}}$,

$$q_5 = -\frac{1}{2\pi} \iint\limits_S \frac{f_4(\xi, \eta)\, d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2}};$$

$$f_3(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_S \frac{f_1(\delta, \omega)\, d\delta d\omega}{\sqrt{(\xi-\delta)^2+(\eta-\omega)^2}}, \quad f_4(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_S \frac{f_2(\delta, \omega)\, d\delta d\omega}{\sqrt{(\xi-\delta)^2+(\eta-\omega)^2}}.$$

Решая теперь уравнения (12) и (14) относительно Φ_k и ψ_0, имеем:

$$\Phi_1 = \frac{q_4 - \lambda_2 q_1}{\lambda_1 - \lambda_2}; \quad \Phi_2 = \frac{q_4 - \lambda_1 q_1}{\lambda_2 - \lambda_1}; \quad \psi_0 = q_5. \tag{15}$$

Для отыскания неизвестной функции $p(x, y)$ получаем интегральное уравнение, удовлетворяя граничному условию для осадки w:

$$w_0 - w_1 = + \frac{\lambda_1\varkappa_1 - \lambda_2\varkappa_2}{\lambda_2 - \lambda_1} f_3(x, y) + \frac{\lambda_2\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}(\varkappa_2 - \varkappa_1)\, q_0(x, y), \tag{16}$$

где $(x, y) \in S_1$.

Список литературы

1. Хрусталев А. Ф. // ИФЖ.— 1965.— Т. 5.— № 1.— С. 180.
2. Грилицкий Д. В., Шелестовский Б. Г. // Вісник Льв. ун-ту. Сер. мех., мат.— 1971.— Вып. 6.— С. 83, 139.
3. Прусов И. А., Комаров Г. В. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук.— 1981.— № 5.— С. 43.
4. Комаров Г. В. Трехмерные задачи теории упругости и термоупругости для трансверсально-изотропного полупространства: Автореф. дис. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук.— Минск, 1984.

Поступила в редакцию 15.10.84.

УДК 517.937

АЛИ ХАСАН АЛЬ-РУБАЙИ

О СИЛЬНОМ ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОКАЗАТЕЛЕ МНОГОМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть K — выпуклый конус в R^m с вершиной в точке $x=0$, $x \in K$, $y \in R^n$, $A(x)$ — равномерно ограниченная и непрерывно дифференцируемая операторная функция, заданная на конусе K и со значениями в пространстве $L(R^m, L^n, R^n))$.

Рассмотрим многомерное линейное дифференциальное уравнение

$$y'(x)h = A(x)hy(x) \tag{1}$$

и так называемое возмущенное уравнение

$$y'(x)h = A(x)hy + f(x, y)h, \tag{2}$$

в котором возмущение $f(x, y)$ — непрерывно дифференцируемая функция, заданная на произведении конуса K и некоторой области G и удовлетворяющая условию малости $\|f(x, y)\| \leqslant \delta(x)\|y\|$, а $\delta(x) \leqslant \delta$, в частности, таким возмущением может быть линейное возмущение $f(x, y) = F(x)y$, где $\|F(x)\| \leqslant \delta(x)$.