$$\times\, dx_1 \dots dx_n\, dx = \frac{\Gamma(c+c'+\lambda-\mu)}{(b+b')^{c+c'+\lambda-\mu}} \prod_{i=1}^{n} B(\alpha_i+\alpha_i'+\lambda_i-\mu_i,\ \beta_i+\beta_i'+\mu_i-\lambda_i)_{n+1} F_n\Big(\alpha_1+\alpha_1'+\lambda_1-\mu_1,\ \dots,\ \alpha_n+\alpha_n'+\lambda_n-\mu_n,\ c+c'+\lambda-\mu;$$

$$\beta_1+\beta_1'+\mu_1-\lambda_1,\ \dots,\ \beta_n+\beta_n'+\mu_n-\lambda_n;\ -\frac{\alpha+\alpha'}{b+b'}\Big), \qquad (11)$$

которое будет справедливо при условиях $\mathrm{Re}\,a$, $\mathrm{Re}\,a' \geqslant 0$, $\mathrm{Re}\,b$, $\mathrm{Re}\,b' > 0$; $\mathrm{Re}\,(\alpha_i' + \lambda_i - x_i) > 0$, $\mathrm{Re}\,(\beta_i' + x_i - \lambda_i) > 0$, $\mathrm{Re}\,(\alpha_i + x_i - \mu_i) > 0$, $\mathrm{Re}\,(\beta_i + \mu_i - x_i) > 0$, $\mathrm{Re}(c' + \lambda - x) > 0$, $\mathrm{Re}(c + x - \mu) > 0$, $i = \overline{1, n}$. Положив в (11) $\rho' = 0$ и заменив $c' + \lambda$, $c - \mu$, $\alpha_i' + \lambda_i$, $\beta_i' - \lambda$, $\alpha_i - \mu_i$, $\beta_i + \mu_i$, x_i соответственно на λ, λ' λ_i, λ_i', μ_i, μ_i', ix_i, окончательно получим следующую теорему умножения обобщенных гипергеометрических функций ${}_{n+1}F_n$:

$$\left(\frac{-1}{2\pi}\right)^{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda-ix)\,\Gamma(\lambda+ix)}{b'^{\lambda-ix}\, b^{\lambda'+ix}} \prod_{i=1}^{n} [B(\lambda_i-ix_i,\ \lambda_i'+ix) B(\mu_i+ix,\ \mu_i'-ix_i)]_{n+1} F_n\Big(\lambda_1-ix_1,\ \dots,\ \lambda_n-ix_n,\ \lambda-ix;\ \lambda_1'+ix_1,\ \dots,\ \lambda_n'+ix_n;\ -\frac{a'}{b'}\Big)\times$$

$$\times\, {}_{n+1}F_n\Big(\mu_1+ix_1,\ \dots,\ \mu_n+ix_n,\ \lambda'+ix;\ \mu_1'-ix_1,\ \dots,\ \mu_n'-ix_n;\ -\frac{a}{b}\Big)\times$$

$$\times\, dx_1 \dots dx_n\, dx = \frac{\Gamma(\lambda+\lambda')}{(b+b')^{\lambda+\lambda'}} \prod_{i=1}^{n} B(\lambda_i+\mu_i,\ \lambda_i'+\mu_i')\, {}_{n+1}F_n \times$$

$$\times \Big(\lambda_1+\mu_1,\ \dots,\ \lambda_n+\mu_n,\ \lambda+\lambda';\ \lambda_1'+\mu_1',\ \dots,\ \lambda_n'+\mu_n';\ -\frac{a+a'}{b+b'}\Big), \qquad (12)$$

где $\mathrm{Re}\,a$, $\mathrm{Re}\,a' \geqslant 0$; $\mathrm{Re}\,b$, $\mathrm{Re}\,b'$, $\mathrm{Re}\,\lambda$, $\mathrm{Re}\,\lambda'$, $\mathrm{Re}\,\lambda_i$, $\mathrm{Re}\,\mu_i$, $\mathrm{Re}\,\lambda_i'$, $\mathrm{Re}\,\mu_i' > 0$.

Автор выражает глубокую благодарность доценту О. И. Маричеву за внимание к работе.

Список литературы

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции.— М., 1965.— Т. 1.— С. 296.
2. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп.— М., 1965.— С. 588.
3. Виленкин Н. Я. // Матем. сб.— 1964.— Т. 64 (106).— № 4.— С. 497.
4. Виленкин Н. Я. Там же.— Т. 65 (107).— № 1.— С. 28.
5. Miller W. Jr. Lie Theory and Special Functions.— New York, 1968.— P. 338.

Поступила в редакцию 02.07.84.

УДК 539.3:534.1

В. И. ПРУСОВ

РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ И ВТОРОЙ ОСНОВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ

Построена математическая модель распространения упругих волн в однородной изотропной полосе, опирающейся на абсолютно жесткое основание *. Предполагалось, что объемными силами являются силы инерции, силы сопротивления и восстанавливающие силы. Общие формулы представлены в виде, позволяющем получать решения основных граничных задач методом сопряжения.

* Ю. В. Василевич, В. И. Прусов. Об одном представлении общих формул упругих колебаний однородной изотропной полосы.— Рукопись деп. в БелНИИНТИ.— № 902 Бе-Д84.—Деп. от. 20.06.84.

Используя представление комплексных потенциалов интегралами Лапласа, мы получили решение первой и второй основных граничных задач для полосы.

1. Первая основная задача. Пусть полоса шириной h занимает в плоскости комплексного переменного $z=x+iy$ область S^-, ограниченную прямыми $L(y=0)$ и $L_1(y=-h)$. Внешняя нагрузка во всех точках контура L изменяется по закону:

$$\sigma_y=f_1(x)f(t),\quad \tau_{xy}=f_2(x)f(t) \quad \text{на } L, \tag{1}$$

где $f_1(x)$, $f_2(x)$ — известные функции, удовлетворяющие на контуре L условию Гёльдера, $f(t)=\sin\omega t$; ω — круговая частота.

По контуру L_1 полоса защемлена и $u(x, y, t)=v(x, y, t)=0$ на L_1.

Напряженно-деформированное состояние полосы определяется по формулам *:

$$\sigma_x+\sigma_y=2[\Phi(z)+\overline{\Phi(z)}]f(t); \tag{2}$$

$$\sigma_y-i\tau_{xy}=[\Phi(z)-\Phi(\bar{z})+(z-\bar{z})\overline{\Phi'(z)}]f(t); \tag{3}$$

$$2\mu\frac{\partial}{\partial x}(u+iv)=[\varkappa\Phi(z)+\Phi(\bar{z})-(z-\bar{z})\overline{\Phi'(z)}]f(t); \tag{4}$$

$$2\mu(u+iv)=[\varkappa\varphi(z)+\varphi(\bar{z})-(z-\bar{z})\overline{\Phi(z)}]f(t). \tag{5}$$

На основании формул (4) и (5) получаем граничные условия:

$$\Phi^-(x)-\Phi^+(x)=\varphi_1(x) \quad \text{на } L; \tag{6}$$

$$\varkappa\Phi(\tau)+\Phi(\bar{\tau})+2ih\overline{\Phi'(\tau)}=0 \quad \text{на } L_1, \tag{7}$$

где $\tau=x-ih$, $\bar{\tau}=x+ih$, $\Phi^+(x)$, $\Phi^-(x)$ — предельные значения $\Phi(z)$ на L; $\varphi_1(x)=f_1(x)-if_2(x)$, остальные обозначения приведены в упомянутой работе *.

Решение задачи, соответствующее условию (6), запишем в виде:

$$\Phi(z)=\Phi_0(z)+\int_0^\infty F(-\alpha)e^{-i\alpha z}d\alpha,\quad z\in S^-; \tag{8}$$

$$\Phi(z)=\Phi_0(z)-\int_0^\infty F(\alpha)e^{i\alpha z}d\alpha,\quad z\in S^+, \tag{9}$$

где

$$\Phi_0(z)=\int_0^\infty [R(\alpha)e^{-i\alpha(z-ih)}+Q(\alpha)e^{i\alpha(z+ih)}]d\alpha: \tag{10}$$

$$F(\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(x)e^{-i\alpha x}dx; \tag{11}$$

S^+ — полоса $(0<y<h)$, $R(\alpha)$ и $Q(\alpha)$ — произвольные функции, абсолютно интегрируемые по α на интервале $(0, \infty)$.

Подставив выражения (8), (9) в формулу (7) и приравнивания затем коэффициенты при $e^{-i\alpha x}$ и $e^{i\alpha x}$ в подынтегральных выражениях обеих частей уравнения, получаем:

$$\begin{aligned}&(1+\varkappa e^{-2\alpha h})R(\alpha)+2\alpha h\bar{Q}(\alpha)=\varepsilon(\alpha);\\ &-2\alpha he^{-2\alpha h}R(\alpha)+(\varkappa+e^{-2\alpha h})\bar{Q}(\alpha)=\eta(\alpha),\end{aligned} \tag{12}$$

где $\varepsilon(\alpha)=-\varkappa F(-\alpha)e^{-\alpha h}$, $\eta(\alpha)=[\bar{F}(\alpha)+2\alpha hF(-\alpha)]e^{-\alpha h}$.

Решая систему уравнений (12), находим:

$$R(\alpha)=\frac{1}{\Delta}\left[(\varkappa+e^{-2\alpha h})\varepsilon(\alpha)-2\alpha h\eta(\alpha)\right]; \tag{13}$$

---

* Ю. В. Василевич, В. И. Прусов. Об одном представлении общих формул упругих колебаний однородной изотропной полосы.— Рукопись деп. в БелНИИНТИ.— № 902 Бе-Д84.— Деп. от 20.06.84.

$$Q(\alpha) = -\frac{1}{\Delta}\left[2\alpha h e^{-2\alpha h}\bar{\varepsilon}(\alpha) + (1 + \varkappa e^{-2\alpha h})\,\bar{\eta}(\alpha)\right],$$

где $\Delta = (1+\varkappa e^{-2\alpha h})\,(\varkappa + e^{-2\alpha h}) + (2\alpha h)^2 e^{-2\alpha h}$.

Таким образом, решение поставленной задачи определяется выражениями (8)—(10) и (13).

2. Вторая основная задача. Пусть на контуре заданы перемещения $u = g_1(x) f(t)$, $v = g_2(x) f(t)$, где $g_1(x)$, $g_2(x)$ — известные функции, удовлетворяющие условию Гёльдера. $\Phi(z)$ должна удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\varkappa\Phi^-(x) + \Phi^+(x) = \psi_1 \text{ на } L; \tag{14}$$

$$\varkappa\Phi(\tau) + \Phi(\bar{\tau}) + 2ih\overline{\Phi'(\tau)} = 0 \text{ на } L_1, \tag{15}$$

где $\psi_1(x) = 2\mu[g_1(x) + ig_2(x)]$.

Решение задачи представим в виде:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\varkappa}\left[\Phi_0(z) + \int_0^\infty G(-\alpha)\, e^{-i\alpha z}\, d\alpha\right], \quad z \in S^-; \tag{16}$$

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \int_0^\infty G(\alpha)\, e^{i\alpha z}\, d\alpha, \quad z \in S^+, \tag{17}$$

где $G(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(x)\, e^{-i\alpha x}\, dx.$

Поступая, как и в предыдущем случае, находим:

$$R(\alpha) = -\frac{1}{\Delta}\,[(1 + e^{-2\alpha h})\varepsilon_1(\alpha) - 2\varkappa^{-1}\alpha h\eta_1(\alpha)]; \tag{18}$$

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\Delta}\,[2\varkappa^{-1}\alpha h e^{-2\alpha h}\bar{\varepsilon}_1(\alpha) + (1 + e^{-2\alpha h})\bar{\eta}_1(\alpha), \tag{19}$$

где $\Delta = (1+e^{-2\alpha h})^2 - (2\varkappa^{-1}\alpha h)^2 e^{-2\alpha h}$.

Следовательно, напряженно-деформированное состояние в полосе определяется на основании формул (2)—(5) и (16)—(19).

Поступила в редакцию 10.09.84.

УДК 539.3

И. А. ПРУСОВ, Г. В. КОМАРОВ

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Контактная задача термоупругости для упругого полупространства при стационарном распределении температуры в [1] решается для изотропного полупространства, в [2] рассматривается только осесимметричная задача для трансверсально-изотропного полупространства. В настоящей работе предполагается, что штамп имеет произвольную форму. Для решения задачи используется подход, предложенный в [3, 4].

Пусть на упругое полупространство давит абсолютно жесткий произвольный в плане плоский штамп. Предполагается, что силы трения между штампом и полупространством отсутствуют. Поверхность штампа имеет температуру $T = T_0(x, y)$, а температура соприкасающихся со штампом сред полагается нулевой. Тепловой контакт между телами совершенный.

Пусть трансверсально-изотропное полупространство занимает область $D^+(z \geqslant 0)$, $S(z=0)$ — граница полупространства, параллельная плоскости изотропии в каждой точке среды, S_1 — область, занимаемая